辛破茧

辛拓展新层次

钟万勰 高 强 著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

辛破茧

辛拓展新层次

钟万勰　高　强　著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

辛破茧:辛拓展新层次 / 钟万勰,高强著. 一大连:大连理工大学出版社,2011.4
ISBN 978-7-5611-6118-0

Ⅰ.①辛… Ⅱ.①钟… ②高… Ⅲ.①力学—研究 Ⅳ.①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 045586 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连金华光彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:7.625 字数:205 千字
2011 年 4 月第 1 版 2011 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟 责任校对:婕 琳
封面设计:孙 元 宋明亮

ISBN 978-7-5611-6118-0 定 价:25.00 元

本书由

国家基础研究发展计划973(2009CB918501)
自然科学基金(10721062)
工业装备结构分析国家重点实验室专项基金(S08101)
大连市人民政府

资助出版

前 言

首先说明，书名、前言和结束语以及一些议论，是钟万勰写的。不当之处由钟万勰负责。

解释书名：辛需要**破茧**，“*破茧而飞*”么。起飞，要解放思想，挣脱束缚。不可局限于过去，更要着眼于未来；结合现实世界的课题。本书引用数学大师们的许多论述，体会其哲学思想。因为我们同意大师们的论述，也可使读者有更深刻感受。**上兵伐谋**。

1900 年 Hilbert 在著名的《**数学问题**》报告中，提出了数学 23 个问题，其中第 23 号是*变分法的进一步发展*。Hilbert 说：“我已经广泛地涉及了尽可能是确定的和特殊的问题……，用一个一般的问题来做结束……我指的是**变分法**”，见文献[1]。**变分法**不单纯是一个数学问题，而是一个方向，是大师的**远见卓识**。

著作《力、功、能量与辛数学》已经出了 2 版了，作者依然感觉不满意。因为在应用中已经呈现出辛的局限性，但书中只是简单提及而没有进一步探讨。**局限性**意味着不够，受到束缚，在茧中。

下阶段再求发展就要**破茧**。**破茧**是为了进入另一个更成熟的发展阶段，挣脱束缚而面向广阔天地，人云“**破茧而飞**”。首先是突破局限性，这就是本书的目的；至于飞，则是以后的事了。

数学也要讲哲学，Hilbert 的报告讲了许多关于数学的观点，就是讲了有关数学的哲学。Hilbert 说：“*在每个数学分支中，那些最初的、最老的问题首先是起源于经验，是由外部的现实世界所提出的。*”在[2]的序言以及[3]的结束语中明确指出，结合了应用力学的实际后，也暴露了传统经典分析力学的局限性：

• 它奠基于连续时间的系统，但应用力学有限元、控制与信号处理等需要**离散系统**。

• 动力学总是考虑同一个时间的位移向量，但应用力学有限元需要考虑**不同时间**的位移向量。

• 动力学要求体系的维数自始至终不变，但应用力学有限元需要**变动的维数**。

• 它认为物性是即时响应的，但**时间滞后**是常见的物性，例如粘弹性、控制理论等。

这些局限性表明传统分析力学还需要大力发展。当今世界发展趋势是数字化，离散处理是必然的。直视辛数学的局限性，**破茧**并拓展新层次，就要开阔思路，这也是我们的机会。

变分原理的提出，由来已久。“*大自然总是走最容易和最可能的途径*”，这是费尔马(Fermat)著名的自然哲学原理。1744 年，J. Bernoulli 提出了“*最速下降线*”问题，大体上可认为是数学变分法的开始。以后蓬勃发展，Euler-Lagrange 方程，继而总结为 Hamilton 变分原理。分析动力学与相应的常微分方程理论的成功，自然

要发展到偏微分方程。到位势理论,有 Laplace 方程的求解,Green,Gauss,Dirichlet 等先后指出,可将其转化为变分原理。Riemann(1826～1866) 将其命名为 Dirichlet 原理,属于椭圆型偏微分方程理论,本来在蓬勃发展,然而在 1870 年发生了曲折,强调数学严格性的维尔斯特拉斯(Weierstrass)否定了 Dirichlet 原理;然而数学物理中许多重要结果都依赖于此原理而建立。1899 年,Hilbert 用边界条件的光滑化保证了极小化函数的存在,从而挽救了 Dirichlet 原理。表明变分原理经历了"**凤凰涅槃,在烈火中重生**"的过程。

此后一个多世纪以来,变分原理有了巨大进展,从**有限元法**发展出来的"**计算科学**"也是变分法的发展;而辛也属于变分法的发展。今天,"**计算科学与理论、实验共同构成现代科学的 3 大支柱**"的论点,已经得到了广泛认同。我们讲辛数学的局限性,不是为了否定,而是需要挣脱束缚后再扩展新层次,"**凤凰涅槃,在烈火中重生**"么。进发前要退够,要退到变分法的进一步发展来着手。

数学应随着与世界的发展而发展。**计算科学**已经呈现如此重要的地位,既然是计算,就不能离开数学,数学应密切关注其发展。本书希望能对此有所推动,力求不偏离当代发展的主流。

辛的局限性产生原因如下。历史上**辛**(symplectic)对称的概念是 Hilbert 的学生,大数学家 H. Weyl 在 1939 年研究一般对称性时,注意到分析动力学 Hamilton 正则方程的对称特点而提出的。当年没有计算机,分析动力学 Hamilton 正则方程就是只讨论连续时间恒定维数的体系的,因此辛的局限是与生俱来的。

随着计算力学、有限元,以及航空航天等的推进,动力系统的

求解成为不可缺少。绝大部分课题分析求解无望，只能数值求解。国外数学家大力发展 Runge-Kutta 法等许多差分算法，可谓五花八门；我国数学家冯康指出，动力学微分方程是保守系统，其差分法积分格式应保辛[4]，棋高一着。继而国外进行了许多研究，一批保辛差分算法相继出现[5]。动力学系统的积分特别讲究所谓首次积分（first integral），其实就是积分不变量。其中总动量、总动量矩向量各有 3 个不变量，以及总能量，共 7 个；其中总能量不变特别重要。

差分法意味着时间坐标要离散，连续时间系统要近似地转化到离散时间系统。离散时间系统的近似积分要保辛。而检验差分算法是否优越，大体上就用能量是否能守恒，或偏离最慢来判断[5]，但保辛差分格式的积分得到的大量数值结果，却未能保证能量守恒。从而使数学家出现了误判[6]，认为“不可积系统，保辛近似算法不能使能量守恒”（“approximate symplectic algorithms cannot preserve energy for nonintegrable system”）！！！事实上，通过参变量方法，运用拓扑学的同伦（homotopy）概念，能在保辛的同时，也保证守恒的[7]。

原创者 H. Weyl 是从物理、力学问题提出辛的。但后来的纯数学家对辛的理解却是从抽象几何学的角度讲的。例如可见[4]，以及著作《经典力学的数学方法》（V. I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, 1978）。首先定义微分形式、切丛（tangent bundle）、余切丛（cotangent bundle）（纤维丛），再是其外乘积（exterior product），然后是所谓嘉当（Cartan）几何。纯数学家认为逻辑严谨形式一般，从纯数学微分几何的角度，

对微分方程讲述其**数学结构**，因此称为**辛几何**。（注：Cartan，陈省身，Arnold，全部获得沃尔夫数学大奖）。然而其抽象、艰深的表述却远离了大众的认知，物理意义不明显。从而使名词辛，产生了神秘感。有如“神龙现首”，却不知根扎何处，玄而不可方物。即使在大学，哪怕是数学教师，也有许多人远而避之。

辛数学的适用范围远超分析动力学。虽然它先在分析动力学内发生，后在数学公理系统的范围内发展，却也受到动力学范围的限制。在发育成熟后，自然要**破茧**，在广阔天地继续发挥，需要广为人知。**破茧**就是要破公理系统的**辛几何**的局限。

应用力学引入**辛数学**是从结构力学与最优控制间的模拟关系切入的。因此不用纯数学艰深的**辛几何**定义，不需要微分几何。从一根弹簧的分析就引入了辛的概念，浅近易懂。教学、传播应讲究“**深入浅出**”。一味地抽象、严谨，往往难懂。中国大批古文是用文言文写的，其中有许多优美的好文章。但文言文毕竟难懂。自从五四新文化运动到今天，人们用的大多数是白话文。也许有些人看不起白话文，认为不够优美；但毕竟易于掌握，大家都喜欢用。今天还有多少文章是用文言文写的呢？本文就是用白话文写的么。写白话文根本不必“自惭形秽”。以往对辛几何的表述太艰深，应让辛走下神坛，平易近人，用大众熟悉的概念和语言来讲述。**一根弹簧，白话文，简单！！**

简单的模型是否不严格、水平低呢？请看 Hilbert 的讲述：“清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题却使我们望而却步”，“严格的方法同时也是比较简单、比较容易理解的方法。正是追求严格化的努力，驱使我们去寻求比较简单的推理方

法……对于严格性要求的这种片面理解，会立即导致对一切从几何、力学和物理中提出的概念的排斥，从而堵塞来自外部世界新的材料源泉，……由于排斥几何学与数学物理，一条多么重要的，关系到数学生命的神经被切断了”!! 有些人艰难的学不懂，通过简明的方法学懂了，于是就看不起了，不对。请再看 Hilbert 的论述：“数学中每一步真正的进展，都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的、复杂的东西抛到一边。数学科学发展的这种特点是根深蒂固的。因此，对于个别的数学工作者来说，只要掌握了这些有力的工具和简单的方法，他就有可能在数学的各个分支中比其他科学更容易地找到前进的道路。”

力、功、能量在中学已经有了较好的理解，**物理概念**清楚。故选择为辛数学讲述的对象，引入辛数学不需要那些难于掌握的抽象概念，而需要通过清楚的、易于理解的问题来引入。书[3]完全不采纳**切丛**、**余切丛**、外乘积、Cartan 几何的**辛几何**提法，而从最简单力学、电学问题的实际出发。力学与电学是现代科学的最基本部分，入门最方便，辐射面也最广，所以选择为入门讲述的模型。这里要指出，入门的课题是从结构静力学的角度讲的。静力学模型简单，容易理解。而且也开拓了辛数学可在结构力学范畴内发展的机会。正因为结构静力学的模型简单，才能够发现上述辛的局限性，这里要加以扩展。而扩展也要从简单模型开始，方可易于理解。

计算机之父、数学大师冯·诺依曼(J. von Neumann)指出：“数学的构造用模型来表示。……数学构造合理与否完全严格取

决于它能否起作用,即,正确地描述相当广泛领域内的现象。而且……在描述程度方面,数学构造必须很简单。”[8] 1990 年英国皇家学会会长,现代纯数学大师 M. Atiyah 也说:“在数学这种抽象的世界中,简单性(simplicity)与优美(elegance)获得了绝对的重要性。”将辛数学用最简单的物理、力学模型表达,可描述相当广泛领域内的现象。将广泛适用的新基础数学知识及早介绍给年轻人,对于他们将来的跨学科发展有很大好处。如果不从实际需要出发,总是局限在纯数学公理系统中,辛的局限性也不会发觉了。

近年来,不断强调要研究交叉学科,在学科交叉处往往可以有新进展。**辛数学**,表明是有辛结构的数学,但仅仅有数学结构尚不够,还需要知道与物理、力学等的结构有何关联,才能有实际的发挥。况且本来辛就是从分析动力学发现的。应用数学,数学要应用,数学发展应当与应用交叉,大势所趋么。

当代著名数学家 P. Lax 讲:“今天,我们可以毫无顾忌地说,纯数学的浪潮已经逆转……在不太久远的过去,如果一位数学家说:‘应用数学是坏数学’,或者说‘最好的数学是纯粹数学’,他会得到别人的赞同和欢迎。但今天,如果有人这么说,他就会被人们视为愚昧无知。”

有限元法是计算机时代的重大贡献,已经在各种科学与工程中广泛应用。2005 年,美国总统信息科学顾问打报告给白宫,标题是《Computational Science: Ensuring America's Competitiveness.》(**计算科学:确保美国的竞争力**)。尽管美国在计算科学方面已经领先世界,但仍然抓紧不放,其重要性可见一斑。让读者早日具备计算科学有限元的概念是有利的。2006 年,美国国家科学基

金会 NSF，又提出 SBES(Simulation Based Engineering Sciences)**“基于模拟的工程科学”**。人家的一系列布局、安排，应当使我们对发展思路引起警觉。人家 CAE 程序系统的高端，对我们是**“禁运”**的。

孙中山先生有名言：“世界潮流，浩浩荡荡，顺之者昌，逆之者亡。”我们必须有清醒的对策。

钱学森(我对今日力学的认识)指出：“总起来一句话：今日的力学要充分利用计算机和现代计算技术去回答一切宏观的实际科学技术问题，计算方法非常重要；另一个辅助手段是巧妙设计的实验”。实际上也强调了**计算机模拟**的方向。

历史上，分析动力学与结构力学是独立分别发展的。两方面各自按自己的规律取得进展，互相之间本来并无联系。后来我们发现了原来在结构力学与线性二次最优控制(Linear Quadratic Optimal Control)的理论之间有**模拟关系**。这是在 Hamilton 变分原理的基础上建立起来的。而动力学 Hamilton 体系的理论，需要引入状态向量的描述，这也正是最优控制的基础。而 Hamilton 体系本是分析动力学的。然后很自然地，分析动力学的理论体系也与结构力学以及最优控制的理论相关联。从而必然会提出**分析结构力学**的理论[2]，尽量将分析动力学与结构力学相融合。

我国对结构力学的变分原理有深入研究，而有限元法的基础就是变分原理。在有限元推导的单元列式中，**单元刚度矩阵的对称性**，就是从变分原理自然得到的。但对称单元刚度矩阵，与辛又有什么联系，却从来没有考虑过。通过**力、功、能量与辛数学**的讲述看到，它们是紧密相关的。可推想，对称的单元刚度矩阵就保证

了有限元法的保辛性质。在理论上对有限元的认识，又深入了一步。

分析结构力学指出，有限元法具有自动保辛的性质。此话已经破除了恒定维数的限制，是对于辛概念的推广。今天有限元法得到广泛应用，有限元法自动保辛的优良性质是其重要原因。

著作[2]提出了**分析结构力学**，并指出分析力学应包含分析动力学与分析结构力学。而有限元法本来是从结构力学开始发展的。众所周知，有限元法的单元刚度矩阵是对称的。而对于恒定维数的力学问题，其传递辛矩阵与之对应。这是我们在一系列著作中反复讲解的。

数学家往往喜欢采用 DTP(Definition, Theorem, Proof)方式进行表述公理系统。M. Atiyah 说："一些人认为公理是用来界定一个自我封闭的完整的数学领域的。我认为这是错的。公理的范围愈窄，您舍弃得愈多。当您在数学中进行抽象化时，您把您想要研究的与您认为是无关的东西分离开，这样在一段时间里是方便的，它使思维集中。但是通过定义，舍弃了宣布您认为不感兴趣的东西，而从长远来看，您舍弃了很多根芽。如果您用公理化方法做了些东西，那么在一定阶段后您应该回到它的来源处，在那儿进行同花和异花受精，这样是健康的。您可以发现约 30 年前，von Neumann 和 H. Weyl 就表达了这种意见。他们担心数学会走什么样的路，如果远离了它的源泉，就会变得不育，我认为这是非常正确的。"

前面纯数学的**微分形式**、**切丛**、**余切丛**、**外乘积**、**Cartan 几何**等所定义的**辛几何**的公理系统，显然是在分析动力学的范围内提出

的，并未超出 H. Weyl 提出问题的范围。在该公理系统的范围内得到了发育成长，使分析动力学的理论与方法有所进展。

如在变分法的进一步发展范畴中观察，**辛几何**的公理系统范围毕竟太窄，舍弃了很多东西。因此就要**破茧**，要向更广阔天地拓展。以下按前述辛的 4 点局限性，逐个讲述。本书**破茧**只讲简单基本的内容，只讲基本思路而不追求详细成果。不求高深，而求**简明、易懂、实用**。

然而，不能离开以往的一些基本成果。正则变换、辛数学等的基本点在[3]中以简单方式介绍了。然而多维线性动力学的内容也要介绍，其实[2]中也讲过，以下是简单的复习。讲多维线性动力学的求解，为后文准备。

钟万勰

于大连理工大学

2011 年 3 月

目　录

〇　多维线性动力学的求解 ……………………………………… 1
0.1　线性系统的分离变量法与本征问题 ……………………… 3
0.2　传递辛矩阵的本征问题 ………………………………… 8
一　离散系统的保辛-守恒算法 ………………………………… 13
1.1　坐标变换的 Jacobi 矩阵 ………………………………… 18
1.2　传递辛矩阵，Lagrange 括号与 Poisson 括号 ………… 20
1.3　保辛-守恒的参变量算法……………………………………… 31
1.4　用辛矩阵乘法表述的正则变换 ………………………… 42
1.4.1　时不变正则变换的辛矩阵乘法表述 ……………… 43
1.4.2　时变正则变换的辛矩阵乘法表述 ………………… 44
1.4.3　基于线性时不变系统的时变正则变换 …………… 45
1.4.4　包含时间坐标的正则变换 ………………………… 47
1.5　保辛-守恒的接触参变量算法……………………………… 49

1.6 保辛摄动多层网格法 …………………………………… 51
1.6.1 多层次有限元 …………………………………… 52
1.6.2 多层次的迭代求解 ………………………………… 56
1.6.3 数值例题 ……………………………………… 57
1.7 传递辛矩阵群 ……………………………………… 71
二 不同时间的有限元离散 ………………………………… 79
2.1 双曲型偏微分方程的特征线理论概要 ………………… 84
2.2 波动方程 ………………………………………… 86
2.3 变动边界问题与混和元 ……………………………… 92
2.4 刚性双曲型偏微分方程例题 ………………………… 94
2.5 物理意义,Lorentz 变换 …………………………… 108
三 不同维数的有限元离散 ……………………………… 111
3.1 结构力学有限元自动保辛 ………………………… 113
3.2 波动偏微分方程,不同维数位错的转换 ………………… 117
3.3 数值算例 ……………………………………… 125
3.4 辛数学能改革开放吗? …………………………… 131
3.5 接触问题 ……………………………………… 133
3.5.1 拉压模量不同材料的参变量变分原理和有限元方法[24] ……………………………………… 134
3.5.2 拉压不同刚度桁架的动力参变量保辛方法[25] … 148
3.6 本章结束语 …………………………………… 161
四 界带与时滞 ………………………………………… 164
4.1 结构力学的界带分析[30,33] ………………………… 165

4.1.1 结构力学的界带理论与能带分析 …………… 165
4.1.2 界带分析的能量变分法 ………………………… 168
4.1.3 色散关系 …………………………………………… 170
4.1.4 子结构界带分析 …………………………………… 173
4.1.5 不同原子组成周期链的数值分析 …………… 175
4.1.6 无限长多排原子链组合的情况 ……………… 178
4.2 时滞与界带 ………………………………………………… 182
4.2.1 离散一维链系统的模拟 ………………………… 182
4.2.2 逐步前进的算法 …………………………………… 185
4.3 连续系统的能量形式 ………………………………… 200
4.3.1 连续系统动力学的能量形式 ………………… 206

五 结束语 ……………………………………………………………… 211

附 录 …………………………………………………………………… 218
附录 1 SiPESC 构造的简单介绍 …………………………… 218
附录 2 力学具有基础与应用学科的两重性 …………… 220

参考文献 ……………………………………………………………… 222