数学解题新思路

Qimiao jielongfa

奇妙接龙法

徐世雲 著

苏州大学出版社

数学解题新思路

奇妙接龙法

徐世震 著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奇妙接龙法/徐世震著．—苏州：苏州大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-81137-497-1

Ⅰ.①奇…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①数列-中学-课外读物
Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124825号

奇妙接龙法
徐世震　著
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街1号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路58号　邮编：214217)

开本787mm×960mm　1/16　印张11　字数195千
2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-497-1　定价：26.00元

自 序

求学时，同学赐我雅号："傻子，杜撰先生！"缘由是，我有疑问，曾在课上请教老师，引发哄堂大笑，搅扰课堂气氛. 我的疑问是："课本上只谈等差数列与等比数列，为什么不见等和数列和等积数列？"年少无知，荒唐疑问，真是傻到极点！

当我甘为人梯登上三尺讲台后，鬼使神差又让陈年旧疑萦绕脑际……

一天，偶阅一书刊有范例：计算 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^5$，细读其解，冗繁乏味，乃漫步静思良策. 回首骤见小侄女与伙伴在玩名为"接龙"的扑克牌游戏，停观揣摩，体味游戏规则，似有所悟，遂即试笔探索，竟获简捷解法，因而将思路冠名"接龙法". 接龙法使我开窍，释我陈年旧疑. 苦苦追索等和数列所蕴玄理，聚得涓涓之流，终于集成《奇妙接龙法》书稿，迟迟付梓，唯恐难以相契当今时令.

本书将递推数列分成两大类：一是线性递推数列；二是非线性递推数列. 书中郑重陈述等和数列即是等积数列，两者合一，深蕴玄理. 等和数列是一阶或二阶线性递推数列，而等积数列却是非线性递推数列. 这种奇异数列独具矛盾对立两重性——既属线性递推数列，又属非线性递推数列，岂可遗忘！辨析玄理，略陈管见点滴：

1. 具有矛盾对立两重性的奇异数列，本身就凸显线性递推数列与非线性递推数列存在通用求解法则的可能性. 等和数列能成为沟通线性递推数列与非线性递推数列的桥梁.

2. 运用接龙法开创新思路，架构一个公式化模式，既能应用于求线性递推数列的通项，又能兼用于求前 n 项和，使得等比数列、等差数列与高阶等差数列、等和数列与高阶等和数列、差比数列与高阶差比数列，以及一类混合数列共享统一解法.

3. 由等积数列推广到一般形式——线性分式递推数列，可以架构线性分式递推数列的通项模式. 将架构原理应用于探索其他非线性递推数列的求解思路，此举乃是上策.

4. 数列 $\{a_n\}$ 存在极限，自古即有经典求解法则，即是假设 $a_{n+1}=a_n=x$ 作代

换，转化为关于 x 的一元方程而求解. 本书在架构线性分式递推数列的通项模式时，也运用这种古老的经典法则，并赋予其崭新生命力，证实该法则在不存在极限的问题中也可施行. 这种循环蜕变是质的飞跃，体现对立统一规律具有强劲的创新原动力.

5. 探索线性分式递推数列的特征根时发现：该数列的通项 $a_n=f(n)$ 必须定义在整数集 $\mathbf{Z}$ 上方能获得正确理解，因而新概念"双翼数列"自然而然凸显. 再者，由于我国近年已对自然数概念作了修正（属于传统理念的自然数集记作 $\mathbf{N}^*$，修正理念的自然数集记作 $\mathbf{N}$），因而大量的权威参考书在探究数列 $\{a_n\}$ 时，引进 a_0，并将该数列通项 $a_n=f(n)$ 定义在 $\mathbf{N}$ 上. 凡此种种，笔者认为已经搅扰传统经典理念下的通项概念，时至今日，未见权威性定论公示.

众所周知，既然数列的通项 $a_n=f(n)$ 是定义在 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，那就必须与经典函数概念相契. 譬如说，经典理念认为两个函数 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 当且仅当解析表达式相同且定义域相同时，方称是相同的函数. 这是一条必须遵循的原则. 现在再探本书第三章中的例 3.15，在原题中部分如此描述：

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，$a_2=2$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}(n\geqslant 3)$，….

兹录该题两种描述答案的形式如下，以供思考.

$$a_{n-2}=\frac{1}{4}[13\times(-1)^{n-3}+7\times 3^{n-3}](n\geqslant 3\text{ 且 }n\in\mathbf{N}), \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{4}[13\times(-1)^{n-1}+7\times 3^{n-1}](n\in\mathbf{N}^*). \tag{2}$$

考察(1)式，与原命题叙述十分贴切.

考察(2)式，与传统经典理念十分吻合.

作为典范性答案是不是应该认同(2)式？为什么？

6. 采用数列作为"MM"的"MMM"，能覆盖数学许多层面，特别在函数方程方面尤显奇异有趣.

追忆年少傻想疑问，谁能预料疑问还能滋润思维，从中更能品出无限乐趣. 傻子傻想，还想表白表白新鲜的傻想疑问，提供疑问之前先申明：

(1) 下面所选疑问的探索程序中特地安插一种古老的代换法则，旨在说明赋予它新生活力——数列不存在极限时也可施行.

(2) 探索过程中每个步骤均作诠释，具体内容附在括号之内.

(3) 每例由初始条件 a_1 可以探究 a_2，从而判断数列 $\{a_n\}$ 不存在极限，在下面的探索程序中不再重复诠释.

提供的疑问是：

辨析所列各例对采用的代换法则作出的诠释是否合乎情理？是否堪称完美？

请公正评判.

【疑问 1】 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=5$，且$a_1=2$，试诠释：

$$a_{n+1}+a_n=5\Leftrightarrow(-1)^n\left(a_{n+1}-\frac{5}{2}\right)=(-1)^{n-1}\left(a_n-\frac{5}{2}\right).$$

诠释如下：令$a_{n+1}=a_n=x$，代入$a_{n+1}+a_n=5$，得

$$2x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2}\text{（有限数}\frac{5}{2}\text{在欧氏直线轴上可以定位），}$$

所以$a_{n+1}+a_n=5\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{5}{2}=-\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$（代换法则有助滋生递推因子$a_{n+1}-\frac{5}{2}$与$a_n-\frac{5}{2}$，则$5=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}$说明是等价代换）

$$\Leftrightarrow(-1)^n\left(a_{n+1}-\frac{5}{2}\right)=(-1)^{n-1}\left(a_n-\frac{5}{2}\right).$$

注 疑问 1 示明：运用古老法则探究等和数列，合理合法，不言而喻. 而等和数列即等积数列，再由各项都不为零的等积数列引申推广为线性分式递推数列，由此，古老法则成为架构该数列特征方程的主干元素. 古老法则起了质的飞跃，并在探索非线性递推数列求解思路中发挥强劲作用. 逆向思考：有了质变的古老法则，在属于线性递推数列的等和数列中占有合理合法地位，引人注目！

循此一脉相传的理念探索疑问 2、疑问 3、疑问 4，更能深刻认识这条古老法则的真谛.

【疑问 2】 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=n$，且$a_1=2$，试诠释：

$$a_{n+1}+a_n=n\Leftrightarrow(-1)^n\left[a_{n+1}-\frac{1}{4}(2n+1)\right]=(-1)^{n-1}\left[a_n-\frac{1}{4}(2n-1)\right].$$

诠释如下：令$a_{n+1}=a_n=x$，代入$a_{n+1}+a_n=n$，得

$x=\frac{1}{2}n$（$n\to\infty$时，$x\to\infty$在欧氏轴线上无法定位，因此必须将欧氏直线添加无穷远点之后视为仿射直线，则可承认无穷大“∞”存在）.

仿效疑问 1 作等价代换可得

$a_{n+1}+a_n=n\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{1}{4}(2n+1)=-\left[a_n-\frac{1}{4}(2n-1)\right]$（当$n\to\infty$时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}(2n+1)}{\frac{1}{2}n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}(2n-1)}{\frac{1}{2}n}=1$，从而得知$\frac{1}{2}n\to\infty$、$\frac{1}{4}(2n+1)\to\infty$、$\frac{1}{4}(2n-1)\to\infty$是等价的，分别以$\frac{1}{4}(2n+1)$与$\frac{1}{4}(2n-1)$代换$\frac{1}{2}n$，既体现等价代换，又体现递

推性. 这种代换法则有助滋生递推因子 $a_{n+1}-\frac{1}{4}(2n+1)$ 与 $a_n-\frac{1}{4}(2n-1)$，从思维高品位视角审视可知：在疑问 1 与疑问 2 中代换法则同宗).

从而即得

$$a_{n+1}+a_n=n\Leftrightarrow(-1)^n\left[a_{n+1}-\frac{1}{4}(2n+1)\right]=(-1)^{n-1}\left[a_n-\frac{1}{4}(2n-1)\right].$$

【疑问 3】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=5$，且 $a_1=2$，试诠释：

$$a_{n+1}-a_n=5\Leftrightarrow a_{n+1}-5(n+1)=a_n-5n.$$

诠释如下：令 $a_{n+1}=a_n=x$，代入 $a_{n+1}-a_n=5$，得 $x-x=5$(在 $\mathbf{R}$ 上方程是矛盾方程，无解，因此必须再度探研).

所以 $0\cdot x=5$(首先将“0”视为无穷小量，这样 $x\to\infty$，由于仿射直线容纳无穷大量，可无定位，因此必须将无穷大“∞”与有限数等同看待，这样的仿射直线称为射影直线).

从而记作 $x=\frac{5}{0}\to\infty$(这是背经叛典、逼于无奈傻想所取的代号，承认分母为零时分数有意义，非合法的数学语言，不作为准；再者，当 $n\to\infty$ 时，$5(n+1)\to\infty$，$5n\to\infty$ 与 $\frac{5}{0}\to\infty$ 是等价的，它们之间的代换是等价代换).

仿效疑问 1 作等价代换可得

$a_{n+1}-a_n=5\Leftrightarrow a_{n+1}-5(n+1)=a_n-5n$(从数学分析、射影几何视角审视疑问 1、疑问 2、疑问 3，代换法则同宗).

【疑问 4】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=n$，且 $a_1=2$，试诠释：

$$a_{n+1}-a_n=n\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{1}{2}(n+1)n=a_n-\frac{1}{2}n(n-1).$$

诠释如下：令 $a_{n+1}=a_n=x$，代入 $a_{n+1}-a_n=n$，得

$x-x=n$($n\in\mathbf{N}^*$，矛盾方程在 $\mathbf{R}$ 上无解，因此必须再度探研).

所以 $0\cdot x=n$(诠释与疑问 3 相同，从略).

所以 $x=\frac{n}{0}\to\infty$(无奈取此代号，不作为准. 当 $n\to\infty$ 时，将 $x=\frac{n}{0}\to\infty$ 与 $n\to\infty$ 比较，可知 $x=\frac{n}{0}\to\infty$ 是高阶无穷大. 由此即知 $\frac{1}{2}(n+1)n\to\infty$、$\frac{1}{2}n(n-1)\to\infty$ 与 $x=\frac{n}{0}\to\infty$ 是等价的，它们间的代换是等价代换).

所以 $a_{n+1}-a_n=n\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{1}{2}(n+1)n=a_n-\frac{1}{2}n(n-1)$(从高位思维视角审视

疑问 1、疑问 2、疑问 3、疑问 4，代换法则同宗）.

探研数列，对于 $n\to\infty$ 的研讨是无法回避的，对于 $x\in\mathbf{R}$ 也有经典著作描述 $x\in(-\infty,+\infty)$，不是充分说明无穷大"∞"在 $\mathbf{R}$ 上是不能承认它的！因此，正确认识无穷大是重要的、必要的探研课题. 如果在 $\mathbf{R}$ 上以恒等变换原理诠释接龙法基本定理，其深刻性何以体现？当然，以教学而言，作为教者应有"一桶水"，思维品位越高越好.

学习《自然辩证法》与《矛盾论》，获益匪浅，懂得对立统一规律是宇宙的根本规律，是唯物辩证法的实质和核心. 依循这条真理探研数列，新创接龙法架构线性递推数列通项模式定理，而将经典理念认为矛盾对立但具线性递推数列属性的一大批各色各样的数列纳入统一范畴以后，特别再与由等和数列拓展的具有最小正周期 $T=t+1(t\in\mathbf{N}^*)$ 的摆动数列（数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+t+1}+a_{n+t}+a_{n+t-1}+\cdots+a_n=$ 非零常数）的特征根是 $t+2$ 次单位根中的虚根互相挂钩时，思路豁然开朗. 又以接龙法新创架构线性分式递推数列通项模式定理（它是属于非线性递推数列的一族数列的统一求解公式），统一之后，又有新生矛盾出现. 首先傻想：什么原理可使矛盾对立的线性递推数列与线性分式递推数列重获统一（本书已有定论）？其次傻想：由线性分式递推数列求解模式的架构原理如何才能探索出其他非线性递推数列的合理求解思路（本书仅吐新芽）？莫道数列是科研小题，涉足方觉深奥如大海，波澜汹涌，又觉玄妙若长空，风云虚幻. 傻想易入"非想非非想处"，书中谬误难免，恳请批评指正.

前 言

求解数学问题，贵在创新，此乃本书要旨.《奇妙接龙法》开宗明义，对传统经典理念弥缝补苴，以猎通古今之变！

1. 常数数列$\{a_n\}$是最最简易的一类数列，若$a_1\neq 0$，则该数列既是等差数列(公差$d=0$)，又是等比数列(公比$q=1$)，它的两栖性启发逆向思考：对于公差$d\neq 0$的等差数列与公比$q\neq 1$的等比数列，能否由它们所满足的逆推关系式分别经过等价变换而转化为新型的常数数列？本书独特新创接龙法作出肯定回答，继而运用接龙法深入探索传统经典范例，辩证剖析、筛选甄别、严谨论证，列出款款形变模式.

2. 按二阶常系数微分方程经典理念，彰显特征方程与特征根以协同接龙法架构k阶线性递推数列的统一求解模式定理(求通项与前n项和两者可兼用)，潜心探研发现传统理念束缚产生的现象：r阶等差数列与r阶差比数列本是一对“孪生兄弟”，一个被传统理念视为宠儿扬名古今中外经典名著，另一个却鲜有论述. 20世纪60年代“弃儿”闯入《奇妙接龙法》书稿，迄今方付梓露面.

探一探特征根的非凡性能即可知晓：r阶等差数列是$r+1$阶线性递推数列，它的$r+1$个特征根都是1；而r阶差比数列也是$r+1$阶线性递推数列，它的特征根是$q\neq 1$. 由特征根揭示一对孪生兄弟的血缘关系，两兄弟间的其他奥秘随之荡然无存.

3. “弃儿”回归焕发英姿，定然万众瞩目. 力挺接龙法伴同“弃儿”壮行而创设如下定理：

定理 1 设$\{a_n\}$为差比数列，且满足$a_n=[\lambda_{21}(n+t)+\lambda_{22}]q^{n-1}$($\lambda_{21},\lambda_{22},q,t$为常数，且$\lambda_{21}\neq 0,q\neq 1,t\in\mathbf{Z}$).

若$\dfrac{\lambda_{22}}{\lambda_{21}}=\dfrac{1}{q-1}$，则$a_n=\dfrac{\lambda_{21}}{q-1}[(n+t)q^n-(n+t-1)q^{n-1}]$.

定理 2 设$\{a_n\}$为高阶差比数列，且满足$a_n=n(n+i)q^{n-1}$(i,q为常数，

且$q\neq 1$).

(1) 若 $i>0$ 且 $i=\frac{q+1}{q-1}$,则

$$a_n=\frac{1}{q-1}[(n+1)nq^n-n(n-1)q^{n-1}];$$

(2) 若 $i<0$ 且 $i=\frac{q+1}{1-q}$,则

$$a_n=\frac{1}{q-1}[(n+i+1)(n+i)q^n-(n+i)(n+i-1)q^{n-1}];$$

(3) 若 $i=0$,则

$$a_n=\frac{1}{q-1}\left[(n+1)n-\frac{q+1}{q-1}\cdot n+\frac{q+1}{(q-1)^2}\right]q^n$$
$$-\frac{1}{q-1}\left[n(n-1)-\frac{q+1}{q-1}(n-1)+\frac{q+1}{(q-1)^2}\right]-q^{n-1}.$$

创设定理本意:辩证剖析,深刻领悟,结合对照例 2.3、例 2.4 进一步梳理思路,娴熟转化规律,而后亦能灵活作出有律转化.虽说接龙法可以由新创定理启蒙,但它却以自身潜力献技.细细咀嚼本书所言:r 阶差比数列接龙法形变模式随 r 值变化而变化,但在变化中存在不变因素,此乃形变模式体现客观规律的核心,真是一语中的.

4. 由于传统经典理念认为等和数列与等积数列简易肤浅,致使等和数列与等积数列双双"隐姓埋名".其实此类数列本身具有矛盾对立的两重性——既属线性递推数列,又属非线性递推数列,貌似简易肤浅,实则深蕴玄理.遗忘也罢,复苏也罢,传统经典理念束缚产生的现象,难以抹尽.

由等和数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}+a_n=a_1+a_2(a_1a_2\neq 0)$可得

$$a_{n+1}a_n=a_1a_2\neq 0\Rightarrow a_{n+1}=\frac{t}{a_n}(t=a_1a_2\neq 0). \tag{1}$$

而(1)式是线性分式递推数列 $a_{n+1}=\frac{pa_n+t}{ra_n+s}$($p,t,r,s$ 为常数,且 $r\neq 0,p,t$ 不同时为零)的一个特例.

本书彰显特征方程与特征根的非凡性能以协同接龙法架构线性分式递推数列的统一求解模式,其架构原理能为探索非线性递推数列另辟坦途.

5. “MMM”是“数学模型方法”的简称. 本书以数列为“MM”伴随接龙法探索恒等式、不等式、三角、函数方程的求解思路，充分发挥离散型理念对于连续型问题的催化作用. 审视第六章中数处知识点：

(1) 诸多文献探究计算 $\left[\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{i}}\right]$ 一题，提供了很多方法，本书新创求解公式：

定理　若 $n=p^2$ 或 $n=p^2-1$($p\geqslant 2$ 且 $p\in\mathbf{N}$)，则

$$\left[\sum_{i=1}^{p^2-1}\frac{1}{\sqrt{i}}\right]=\left[\sum_{i=1}^{p^2}\frac{1}{\sqrt{i}}\right]=2(p-1).$$

应用此公式不仅能快速回答原问题，而且还能扩大覆盖面，使其他大量命题获得圆满答案.

(2)《一个不等式问题的初等研究》(数学通讯 1998 年 5 月)是一篇高质量的文章，该文最后遗留下一个待解决的问题：

试问 $\sum_{i=1}^{1999}\frac{1}{\sqrt{i}}$ 的整数部分是 87 呢，还是 88? 并说明理由.

本书例 6.10 对这一问题作出了回答.

(3) 本书例 6.15 是三角学中常见的一个题目，传统解法比较繁琐，难度较大，本书给出的解答不仅过程十分简捷，而且思路平直浅易.

(4) 以数列为“MM”探求函数方程的求解模式，结构新颖，趣味浓醇.

有鉴于特征方程、特征根的非凡性能以及传统经典理念束缚产生的现象，《奇妙接龙法》是对传统数列教材进行了新的探索. 本书例 3.15、例 3.16、例 3.17、例 3.18所阐发的 k 阶线性递推数列求解新理论体系，是一种创新的思维体系. 在提倡建设创新型国家的大背景下，《奇妙接龙法》若能为数列教材增添一种新的思路，将是对教育创新的一种贡献.

目　录

第一章　接龙法

探究数列问题，古今中外先哲确立典范题型：等差数列、$r(r\in\mathbf{N}^*)$阶等差数列、等比数列、$r(r\in\mathbf{N}^*)$阶差比数列等等，强化它们的矛盾对立，各自以不同思路构建互异的求解公式与法则，形成经典理念，奠定探求相关命题的解法导向.

面对千姿百态的数列命题，践行经典理念探索求解，往往感到思路迂回，甚至难以畅达终极，迷惘中偶然浮现司马迁名言：通古今之变！不禁勾起遐想：能否对传统经典理念弥缝补苴，以猎通古今之变？

辩证剖析各类数列的对立统一性，接龙法开启创新之路！

§1　一类数列问题的经典解法

计算 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^p (n,p\in\mathbf{N}^*)$ 是数列问题中的经典范例，一般参考文献推荐如下经典解法（称为错位相消法）：

当 $p=1$ 时，由等差数列求和公式得

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1).$$

当 $p=2$ 时，因为 $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$，所以

取 $i=1$ 得　　$2^3=1+3\times1+3\times1^2+1$，

取 $i=2$ 得　　$3^3=1+3\times2+3\times2^2+2^3$，

取 $i=3$ 得　　$4^3=1+3\times3+3\times3^2+3^3$，

…　　　　…

取 $i=n-1$ 得　　$n^3=1+3\times(n-1)+3\times(n-1)^2+(n-1)^3$，

取 $i=n$ 得　　$(n+1)^3=1+3\times n+3\times n^2+n^3$，

以上 n 个等式两边分别相加并化简，得

$$(n+1)^3=n+1+3(1+2+3+\cdots+n)+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$\Rightarrow 3\sum_{i=1}^{n} i^2=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}(n+1)[2(n+1)^2-2-3n]=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

当 $p=3$ 时，因为 $(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4$，所以

取 $i=1$ 得 $\quad 2^4=1+4\times1+6\times1^2+4\times1^3+1^4$，

取 $i=2$ 得 $\quad 3^4=1+4\times2+6\times2^2+4\times2^3+2^4$，

取 $i=3$ 得 $\quad 4^4=1+4\times3+6\times3^2+4\times3^3+3^4$，

… $\quad$ …

取 $i=n$ 得 $\quad (n+1)^4=1+4\times n+6\times n^2+4\times n^3+n^4$，

以上 n 个等式两边分别相加并化简，得

$$(n+1)^4=n+1+4(1+2+3+\cdots+n)+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$+4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} i^3=(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)$$
$$=(n+1)(n^3+3n^2+3n-2n-2n^2-n)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

同理，依次类推可得出 $\sum_{i=1}^{n} i^4, \sum_{i=1}^{n} i^5, \cdots, \sum_{i=1}^{n} i^p\ (n,p\in\mathbf{N}^*)$ 的计算公式.

若采用此法计算 $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$，则首先要求得 $\sum_{i=1}^{n} i^p\ (p=1,2,3,\cdots,8,9)$，而后方可得出答案，但是这样很麻烦，由此引发探索这类数列问题的求解捷径的想法.

§2　接龙法基本定理

扑克牌游戏名目繁多,其中有一名曰“接龙”的,从中悟出一系列数学公式,运用它们求解有关数学问题,故而特称此法为“接龙法”.

2.1　三龙诀

例如,由三个连续整数5,4,3构成积式$5\times4\times3$,按扑克接龙游戏术语呼之为“三节老龙”.再按游戏法则:冠首则变成“四节新龙”$6\times5\times4\times3$,拖尾则变成“四节新龙”$5\times4\times3\times2$.以上的“三条龙”可配搭构成等式:

$$5\times4\times3=\frac{1}{4}(6\times5\times4\times3-5\times4\times3\times2).$$

刻画这样的接龙法则,可拟成歌诀(称为三龙诀):

冠首拖尾一老龙,摇身变成两新龙,

新龙节数除差数,仔细剖析乃老龙.

一般地,对于t节老龙$(z+t-1)(z+t-2)\cdots(z+2)(z+1)z(t\in\mathbf{N}^*)$,按三龙诀处理如下:

冠首得一条$(t+1)$节新龙$(z+t)(z+t-1)\cdots(z+1)z$,

拖尾得一条$(t+1)$节新龙$(z+t-1)(z+t-2)\cdots(z+1)z(z-1)$,

新龙节数$(t+1)$作为除数,两新龙差数作为被除数,即现老龙.从而得等式:

$$(z+t-1)(z+t-2)\cdots(z+1)z=\frac{1}{t+1}[(z+t)(z+t-1)\cdots(z+1)z-(z+t-1)(z+t-2)\cdots(z+1)z(z-1)].\tag{1}$$

公式(1)的理论十分浅显,证明从略.

2.2　三龙诀一字形变律

设数列$\{a_n\}$为等差数列,且公差$d\neq0$.若由三个连续项a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}构成积式$a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}$,依然按扑克接龙游戏术语呼之为“三节老龙”,再按游戏法则:冠首则变成“四节新龙”$a_{n+4}\cdot a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}$,拖尾则变成“四节新龙”$a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot a_n$,以上三条龙可配搭构成等式:

$$a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}=\frac{1}{4d}(a_{n+4}\cdot a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}-a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot$$