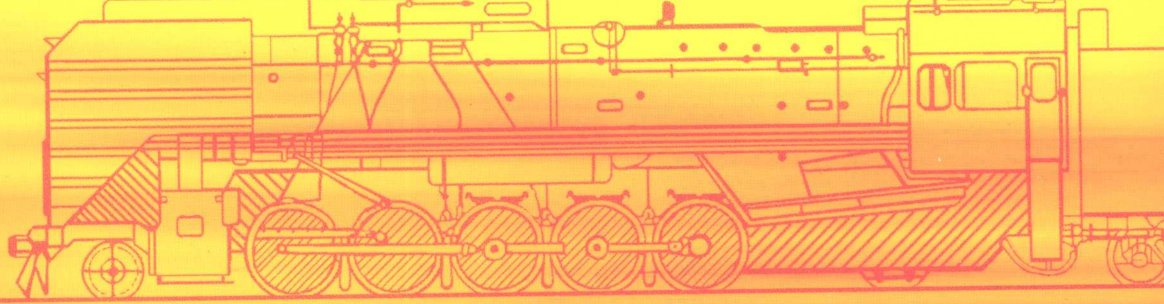
高等学校教材

高等数学 下册

<< 主编 殷锡鸣 编者 李红英 江志松 许树声

mathematics



高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

下　册

主编　殷锡鸣

编者　李红英　江志松　许树声

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是按照最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（征求意见稿），并结合多年教学改革实践经验编写而成的教材。全书共 14 章，分上、下两册出版。下册介绍微分方程、空间解析几何、多元函数微积分及傅里叶级数，内容包括微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数的积分及其应用、向量函数的积分、傅里叶级数。书中加强了对基本数学概念、基本数学思想和基本数学方法的阐述，注重应用数学能力的培养，增加了有关数学模型与数学实验、数学软件应用的内容，力求满足高素质科技人才培养的需要。全书例题丰富，叙述注重几何与物理直观，通俗易懂，并含有丰富的有关微积分发展的历史资料，具有较好的可读性。全书在节末配有大量的习题，章末配有总习题和有关的数学建模、小课题研讨等内容。

本书可作为高等院校理工科、经济、管理等各专业高等数学课程的教材，也可作为教师和学生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/殷锡鸣主编．—北京：高等教育出版社，2010. 3

ISBN 978 - 7 - 04 - 028399 - 0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①殷…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 001618 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	河北新华印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 960　1/16	版　　次	2010 年 3 月第 1 版
印　　张	31.25	印　　次	2010 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	580 000	定　　价	33.30 元

物料号　28399 - 00

力和运用数学知识能力的目的。

2. 围绕课程培养目标,按照研究型的要求合理整合教材内容体系

贯彻研究型、探索型的新的人才培养要求,首先要从“研究探索”型的教材着手。为此,我们按照“研究探索”型教材的要求对内容体系进行了合理整合,力求体现“研究和探索”的思想方法和过程。例如,我们从非均匀平面薄板的质量计算引申到非均匀空间立体、曲线、曲面的质量计算,然后对涉及的数学问题进行归纳,抽象出多元函数(数量值函数)在一般几何形体上的积分的概念,并统一研究它们的基本性质。在此基础上,再回到具体问题涉及的二重积分、三重积分、第一型曲线积分和曲面积分的概念,并进一步研究它们的计算方法。又如,有关向量场在曲线与曲面上的积分(即第二型曲线积分与曲面积分)以及涉及的积分公式和特殊向量场的积分问题,我们统一放在“多元向量函数的积分”这一章中进行讨论。这样安排,既可以突出第二型曲线与曲面积分与其他各型积分之间的区别,又可以突出这类积分本身所具有的一些共性,从而可以帮助读者综合理解格林公式、高斯公式、斯托克斯公式以及曲线积分与路径无关等难点问题。再如,适当加强了有关向量场的一些内容的讨论,特别对向量场的散度和旋度等概念,突出了对它们的实际背景的描述。通过这样的处理,力求能更好地反映出这些概念和公式产生的背景,进一步加深对格林公式、高斯公式、斯托克斯公式以及对通量、环量的理解,使学生认识和掌握运用数学语言描述客观现象的思想和方法,等等。

3. 内容安排突出重点,概念、定理分析细致,例题典型

在教材内容的选取上做到重点突出;在概念、定理的论述方式上采用启发式,尽力做到水到渠成,通俗易懂;在例题的选择上力求全面、典型,突出对问题难点的分析以及解决问题思想方法的阐述。

4. 将数学模型的思想和方法以及有关的拓展内容引入教材

数学模型几乎是所有应用科学的基础,数学建模和与之相关的科学计算正在成为科学研究和工程设计的重要工具。在大学数学基础课程学习阶段,特别是在高等数学课程的学习中,渗透数学建模的思想和方法是极为重要的。我们在这方面做了不少探索:除在例题中引入大量的实际应用问题外,我们在各章的“数学模型与拓展”中安排了与该章内容相关或应用所学知识的数学模型内容,另外作为练习,还安排了三个“小课题研讨”,供有兴趣的学生学习或课堂研讨。同时,在各章的“数学模型与拓展”中我们还安排了一些与该章内容相关的进一步的拓展内容。例如,在第 9 章的“数学模型与拓展”中,作为解微分方程内容的延伸,我们介绍了一些求解微分方程的数值方法和求解差分方程的方法;在第 11 章的“数学模型与拓展”中作为多元函数微分学传统应用内容的延伸我们介绍了应用广泛的最小二乘法,偏导数在经济学中的应用等内容。希望通过这些

编者的话

进入21世纪以来，随着科学技术的飞速发展以及经济竞争的日益激烈，对技术人才提出了更高的要求。在高素质科技人才的培养过程中，数学教育正日益显示出其独特的、不可替代的重要作用。高等数学是高等院校绝大多数专业的一门重要的基础课，它为学生学习后继课程，进一步从事工程技术和科学研究提供必要的数学基础。高等数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养和文化。能否运用高等数学的观念去进行定量的思维，并切实解决遇到的实际问题是衡量人才的科学文化素质和数学素质的一个重要标志。

长期以来，我校一贯重视高等数学课程的建设，开展了以课程体系、教学内容和教材建设为核心的教学改革，取得了不少成果。本教材就是在校领导的支持下，结合我校原有教材，参照最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”(征求意见稿)，并融入我们多年来对这门课程的教改实践和设想组织编写的。本书宗旨是在传授数学知识的同时，着力培养学生的数学素养和能力、应用数学知识解决实际问题的意识和学习数学的兴趣，提高他们学习数学的能力，从而为他们在将来更新知识，科技创新，学习现代数学方法提供必要的数学基础。本书在保证教学要求、遵循教学规律的前提下，在教材的体系、选材和编写中努力突出以下特点。

1. 贯彻“学数学是为了用数学”的课程培养目标

选材以培养理工科应用型人才为出发点，重视数学思想方法、数学演绎和归纳素质的培养。对定义、定理及有关结论的介绍，注重它们的几何直观和物理背景；力求阐明问题产生的缘由、需要解决的问题以及处理问题的基本思想和过程。当“严格”和“直观”相矛盾时，我们选择直观，不过于追求严格的数学证明。这样做可以潜移默化地使学生了解数学概念来自于实践，是从具体问题中抽象出来的；了解如何从“直观现象”到“数学抽象”，经数学演绎和归纳产生“数学结论”后回到“直观现象”解决具体问题的全过程，从而达到提高学生数学思维能

内容的学习,能够在学生的思想中树立起运用数学方法的意识,提高学习高等数学课程的兴趣和积极性,从而达到运用数学知识解决实际问题能力培养的目的。

5. 把数学软件的运用引入教材

与数学模型紧密相连的是数学软件的运用。长期以来,人们总认为数学就是凭脑袋、纸和笔进行推理、证明和计算。但随着计算机和数学软件的发展,数学软件已经成为科学研究的一种基本工具。因此对未来高素质人才来讲,具有良好的数学软件运用能力对他们将来的发展非常重要。为此,我们在“数学模型与拓展”中选择了一些需要运用数学软件(本书中我们运用 Mathematica 软件)求解的数学模型问题,并且在总习题中安排了运用数学软件求解的习题(打 * 号)。希望通过这些内容的学习,使学生在这一方面得到一定的训练。

6. 通过丰富的例题、习题,拓展学生的学习空间

本书选编了较多的例题,给使用本教材的教师提供了较大的选择余地,也为学生拓展了学习空间。本书每节末配备有习题,每章末配备了总习题。为了满足不同层次的教学要求,我们把习题进行了分层安排:习题(A)适合一般要求的学生使用,习题(B)适合有较高要求的学生使用,而每章末的总习题适合考研要求的学生使用。

7. 穿插了高等数学发展历史的介绍

高等数学的发展经历了几百年的历史。在本书中穿插了许多介绍有关内容的发展过程以及高等数学发展史等人文知识的内容,我们希望这些历史资料能够进一步丰富教材的可读性和人文氛围。

这里还需要说明,本书中打 * 号的内容不属于高等数学课程的教学内容,只供对数学有兴趣的学生课外学习和教师组织课外活动使用。其中“小课题研讨”中的练习没有给出答案,因为它们的答案不唯一。

本书由华东理工大学组织编写。全书共分 14 章,分上、下两册出版,其中下册的第 9,12,13 章由殷锡鸣编写;第 10 章由李红英编写;第 11 章由许树声编写;第 14 章由江志松编写;全书的“数学模型与拓展”由李红英和江志松编写。殷锡鸣、许树声对全书进行了统稿,最后由殷锡鸣定稿。

本书是华东理工大学公共数学教研室全体高等数学任课教师长期教改实践和教学研究的共同成果。在这里我们要衷心感谢龚成通副教授,他和我们共同策划了本教材,同时还参与了教材的编写。我们还要特别感谢谢国瑞教授,由于他积极的工作和对本书的大力支持为教材的编写提供了良好的基础。另外,还要感谢王刚副教授,他也参加了教材的编写。

参加过教材编写研讨活动的教师有曹宵临、王薇、邵方明、宋洁、方民、苏纯洁、陆履亨、孟亚琴、李继根、李义龙、胡海燕、吕雪芹、贺秀霞、卢俊杰等老师,他们为本书的编写工作提供了许多宝贵的意见和有用的素材,在此向他们表示衷

心的感谢。

另外，还要感谢华东理工大学教务处领导乐清华教授、理学院院长鲁习文教授，数学系主任李建奎教授，由于他们的大力支持和关心，本书得以顺利编写与出版。

最后特别感谢原全国工科数学课程教学指导委员会主任马知恩教授，感谢他对本书编写提出了许多修改意见及对本书的热情支持。

由于编写者水平有限，书中难免留存错、漏和不妥之处，敬祈专家、读者予以指正。

编　者

2009.9

目　　录

第9章 微分方程

从前几章的讨论可以看到,微积分是研究函数的有力工具.然而,在应用微积分解决应用问题时,首先需要确定研究的对象——函数.在科学研究和工程实践中,人们常常通过以下途径建立函数关系.

(1) 通过实验的方法获得实验数据,对实验数据进行数学处理(例如寻求对数据具有较好逼近的简单函数等方法)获得量与量之间的近似对应关系.

(2) 建立函数满足的数学模型,这些数学模型通常是各种各样的函数方程,而微分方程就是其中最重要的函数方程之一,通过求解数学模型(方程)获得函数关系.

建立数学模型,求解微分方程是人类认识客观世界的一个重要手段.在解微分方程过程中出现的问题已经成为微积分和其他一些数学分支发展的重要源泉.尤其是近50年来,微分方程越来越多地出现在工程,生物学,经济学以及社会科学的许多领域之中.

本章主要介绍微分方程的基本概念,几种常见的微分方程的解法以及微分方程的应用.

9.1 微分方程的基本概念

9.1.1 定义

为了引入微分方程的一些基本概念,我们先看两个实例.

例1 已知一条曲线通过点(1,2),且该曲线上任意一点$M(x,y)$处的切线斜率为$3x^2$,求此曲线的方程.

解 设所求曲线方程为$y=y(x)$,则由导数的几何意义可知,未知函数$y=y(x)$应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=3x^2. \tag{9-1}$$

又因曲线经过点(1,2),于是 $y(x)$ 还满足 $y(1)=2$. 所以未知函数 $y=y(x)$ 是以下数学问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=3x^2,\\ y(1)=2.\end{cases}$$

将微分式(9-1)两边进行积分,得

$$y=\int 3x^2 dx=x^3+C, \tag{9-2}$$

其中 C 是任意常数. 在上式中令 $x=1$,根据条件 $y(1)=2$ 有 $2=1+C$,可知 $C=1$. 因此所求曲线方程为

$$y=x^3+1. \tag{9-3}$$

例 2 一辆列车在直线轨道上以 20 m/s 的速度行驶,当制动时,列车获得的加速度是 $-0.4\ m/s^2$. 试问制动后,列车行驶了多少时间才停住? 又问列车在这段时间内行驶了多远?

解 设列车在制动后的 t s 时间内行驶了 $s=s(t)$ m. 则根据导数的物理意义,路程函数 $s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4. \tag{9-4}$$

由于 $s(0)=0, v(0)=s'(0)=20$. 所以路程函数 $s(t)$ 是下面问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{d^2s}{dt^2}=-0.4,\\ s(0)=0, s'(0)=20.\end{cases}$$

将方程式(9-4)两边进行积分,得

$$s'(t)=-0.4t+C_1.$$

再将上式积分一次,有

$$s(t)=\int(-0.4t+C_1)dt=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{9-5}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 注意到 $s(t)$ 满足条件 $s(0)=0, s'(0)=20$,即有

$$20=0+C_1, 0=C_2,$$

可知 $C_1=20, C_2=0$. 因此所求路程函数 $s=s(t)$ 为

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{9-6}$$

设列车从制动到停止所花费的时间为 T,则有 $s'(T)=0$,即 $-0.4T+20=0$,可知

$$T=\frac{20}{0.4}=50(s).$$

将 $T=50$ 代入路程函数式(9-6)，就得列车在制动后行驶的路程为

$$s=s(50)=500(\mathrm{m}).$$

从以上两例的求解过程可知，曲线 $y=y(x)$ 和路程函数 $s=s(t)$ 分别是满足方程(9-1)和(9-4)的函数，而方程(9-1)和(9-4)中都含有未知函数的导数，称这种方程为微分方程.

定义　含有未知函数及其导数的等式称为微分方程.

如果微分方程中的未知函数是一元函数，就称此方程为**常微分方程**；如果微分方程中的未知函数是多元函数，就称此方程为**偏微分方程**.

在本书中，我们仅讨论常微分方程，为方便起见，我们把常微分方程简称为微分方程.

根据定义可知，方程(9-1)和(9-4)都是微分方程，它们中出现的未知函数导数的阶数不同. 为了区分，我们给出微分方程阶的概念.

定义　在一个微分方程中，出现的未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的阶.

于是可知，方程(9-1)是一阶微分方程，方程(9-4)是二阶微分方程，而方程

$$y^{(4)}-10y'''+25y''=0 \tag{9-7}$$

则是四阶微分方程.

定义　若将一个函数及其导数代入微分方程中的未知函数及其导数之后，能使方程成为恒等式，则称此函数为微分方程的解(或积分).

按此定义，(9-3)式表示的函数是方程(9-1)的解，而(9-5)式和(9-6)式所表示的函数是方程(9-4)的解. 容易验证，函数

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\mathrm{e}^{5x}, \tag{9-8}$$

$$y=(1+2x)\mathrm{e}^{5x} \tag{9-9}$$

都是方程(9-7)的解. 很明显，方程(9-4)的解(9-5)和(9-6)是有区别的，解(9-6)只表示方程(9-4)的一个解，而解(9-5)表示了方程(9-4)的一族解(解中含两个独立的任意常数 C_1 和 C_2)，而解(9-8)和(9-9)的情况也是如此. 为了区分，我们引入微分方程的特解和通解的概念.

定义　若微分方程的解中含有一些独立的任意常数，当这种常数的个数与方程的阶数相同时，就称此解为微分方程的通解(或通积分)，而称微分方程的不含任意常数的解为微分方程的特解.

于是可知，由(9-3)、(9-6)、(9-9)式表示的函数分别是微分方程(9-1)、(9-4)、(9-7)的特解，而由(9-2)、(9-5)、(9-8)式表示的函数分别是上述对应微分方程的通解.

同时还可进一步看到，方程 $y'=3x^2$ 的特解 $y=x^3+1$ 是通过让其通解 $y=x^3+$

C(含有一个任意常数)满足一个附加条件 $y(1)=2$ 求得的,而方程 $s''(t)=-0.4$ 的特解 $s=-0.2t^2+20t$ 是根据它的通解 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$(含有两个独立的任意常数)满足两个附加条件 $s(0)=0, s'(0)=20$ 确定的. 我们把用来确定通解中任意常数的取值,从而得到特解的条件称为**定解条件**. 当自变量取某个值时,给出未知函数及其导数的相应值的条件称为**初始条件**. 例如,在例 1 中 $y(1)=2$ 是方程 $y'=3x^2$ 的初始条件;在例 2 中 $s(0)=0, s'(0)=20$ 是二阶方程 $s''(t)=-0.4$ 的初始条件. 可见初始条件是描述所讨论现象或过程的历史(初始)状况的. 一般地,因为 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{9-10}$$

的通解中含有 n 个独立的任意常数,故需要有 n 个(一组)定解条件. 于是 n 阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \tag{9-11}$$

其中 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 为 n 个给定的常数. 而将方程(9-10)与初始条件(9-11)一起构成的定解问题

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y',\cdots,y^{(n-1)}), \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases}$$

称为**初值问题[或柯西(Canchy)问题]**.

由此可知,例 1 中的所求曲线 $y=y(x)$ 和例 2 中的路程函数 $s=s(t)$ 都是初值问题的解.

除了初值问题外,还有其他类型的定解问题. 用以说明方程中未知函数在边界上约束情况的条件(通常是等式)称为微分方程的**边界条件**. 相应地由微分方程和边界条件一起构成的问题称为**边值问题**,而由微分方程与初始条件、边界条件一起构成的问题称为**混合问题**. 在本书中,一般仅讨论初值问题.

微分方程解的图形称为它的**积分曲线**,通解的几何图形是由一族曲线构成的积分曲线族,而特解的几何图形是积分曲线族中一条特定的积分曲线.

例3 验证函数 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$(C_1, C_2 为任意常数)为微分方程

$$y''+2y'-3y=0 \tag{9-12}$$

的通解,并求初值问题

$$\begin{cases} y''+2y'-3y=0, \\ y(0)=4, y'(0)=0 \end{cases} \tag{9-13}$$

的解.

解 因为 $y'=-3C_1e^{-3x}+C_2e^x$, $y''=9C_1e^{-3x}+C_2e^x$,将 y, y', y'' 代入微分方程(9-12)得

$$\begin{aligned} y''+2y'-3y &=9C_1e^{-3x}+C_2e^x+2(-3C_1e^{-3x}+C_2e^x)-3(C_1e^{-3x}+C_2e^x) \\ &=(9C_1-6C_1-3C_1)e^{-3x}+(C_2+2C_2-3C_2)e^x=0, \end{aligned}$$