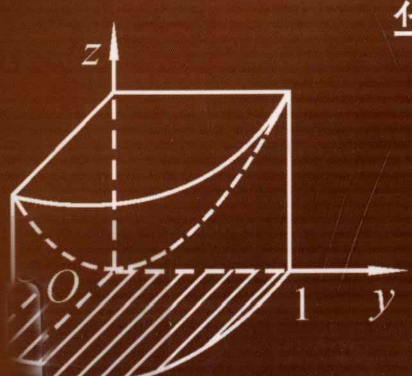
普通高等教育“十一五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

微积分辅导（第二版）

华中科技大学高等数学课题组



华中科技大学出版社

普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微积分辅导

(第二版)

华中科技大学高等数学课题组

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导(第二版)/华中科技大学高等数学课题组 主编.一武汉:华中科技大学出版社,2009 年 9 月
ISBN 978-7-5609-3853-0

Ⅰ.微… Ⅱ.华… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 166574 号

微积分辅导(第二版) 华中科技大学高等数学课题组 主编

策划编辑:李 德
责任编辑:李 德 封面设计:潘 群
责任校对:朱 霞 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉众心图文激光照排中心
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:16.25 字数:320 000
版次:2009 年 9 月第 2 版 印次:2009 年 9 月第 3 次印刷 定价:24.80 元
ISBN 978-7-5609-3853-0/O·398

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是普通高等院校数学精品系列教材《微积分》(第二版,华中科技大学高等数学课题组编,华中科技大学出版社 2009 年 8 月出版)配套的教学辅导书.本书内容紧扣教学大纲要求,编排顺序与教材同步.内容包括函数、极限与连续、一元微积分、常微分方程、多元微积分、无穷级数、矢量代数与空间解析几何等.为了便于学生学习,每章分为主要公式和结论、解题指导、练习题、答案与提示四个部分,指出重要知识点,所选题型典型而全面,例题分析浅显易懂,解答多样,注重解题方法和技巧的运用,针对性强.本书可作为习题课教材及本、专科学生自学读本使用.

前　言

微积分是高等工科院校的一门主要基础课程.对于刚刚迈进大学殿堂的莘莘学子来说,微积分课程的概念比较抽象、难以理解,运算方法比较复杂、不易掌握.突出的问题反映在"解题"这个环节上.为了帮助大学生学好微积分,解决学习中的问题,指导学习方法,循序渐进地掌握解题思维方式和技巧,提高学习效率,我们编写了这本辅导书.

针对学习过程中学生遇到的概念理解、计算技巧、论证思路、应用方式等疑难问题,本书进行了较为详尽的讨论、分析、举例和归纳,在解析疑难、掌握方法的基础上,用大量的例题为学生诠释概念、举证方法、演绎技巧,使学生更好地融会知识、理解概念、掌握解题方法,达到举一反三的效果.

作为普通高等院校数学精品系列教材《微积分》(第二版,华中科技大学高等数学课题组编,华中科技大学出版社 2009 年 8 月出版)配套的教学辅导教材,本书提供了更多的例题和习题,加大了信息量,扩大了知识面,尤其是知识要点归纳精炼、题型选择典型、例题分析和解答具有启发性和多样性,练习题的选择更有针对性.

本书将微积分课程内容分为十二章,每章分为四个部分.第一部分提炼出主要公式和结论,便于学生领悟和牢记.第二部分是解题指导,是本书的主要部分,我们由浅入深地编排了大量基本而典型的例题,解题分析详细易懂,解题过程细致规范,解题方法灵活多样,注重解题前的切题分析,阐明解题过程的来龙去脉,目的在于培养学生分析问题和解决问题的能力.第三部分与第四部分分别是练习题和答案与提示,这两部分学生应该作为必学内容,为了真正提高自己的解题能力,建议在独立解答练习题之后再看答案.

本书由华中科技大学高等数学教研室高等数学课程组编写,参加人员(以所编章节为序)有毕志伟、王汉蓉、魏宏、周军、李改杨、俞小清、何涛、罗德斌、熊新斌等.本书第一章至第六章由俞小清统稿,第七章至第十二章由熊新斌统稿.

编　者

2009.7.11

目　　录

第一章　函　数

1.1　主要公式和结论

1.1.1　函数的概念

定义　设 x,y 是两个变量，其变化范围分别是非空的实数集合 D 与 Y，若有一个对应规则 f，使得对于每个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，$f(x)$ 为函数 f 在 x 的值. 当 x 取 D 中所有数时，对应的函数值 $f(x)$ 构成的集合

$$W=\{f(x)\mid x\in D\}$$

称为函数 f 的值域，而称 D 为函数 f 的定义域.

注 1　函数的两个要素是定义域 D 及对应规则 f. 两个函数相等的充分必要条件是这两个要素完全相同，明确这两个要素是理解函数概念的关键.

注 2　对应规则 f 的表现形式. 图形，表格，语言，数学公式都可以用来表示函数. 在本课程中，主要是用读者在中学数学中已经熟悉的数学公式来表示对应规则 f.

注 3　函数值 $f(x)$ 的存在性与唯一性. 若 f 是 D 上的函数，则对于每个 $x\in D$，$f(x)$ 应当是能由 f 确定的唯一的一个实数；否则便不能称 f 为一个“有意义的”对应规则. 例如，“$f(x)$ 是方程 $x^2+1=0$ 的实根”，“$f(x)$ 是方程 $x^2-1=0$ 的实根”都不符合函数定义中对应规则的要求：前一个不保证 $f(x)$ 的存在性，后一个不保证 $f(x)$ 的唯一性.

注 4　定义域的确定. 在应用问题中出现的函数，往往由问题中变量 x 的实际意义来确定其定义域，而在其他问题中，则需要指明定义域. 当 f 是初等函数时，如果没有指明定义域，则默认以使得 $f(x)$ 有意义（符合初等函数及其运算要求）的 x 的集合为其定义域.

注 5　函数的记法. 依据定义，阐明一个函数应当包括两个要素：定义域 D 及对应规则 f，由于对应规则形式多样，故重点在 f 的表述上. 表示 f 的构造需要借助自变量与因变量，但与这些变量采用的字母无关，例如，当定义域 D 相同时，

$$y=f(x),x=f(y),u=f(v)$$

都表示同一个对应规则，从而是同一个函数.

注 6 计算函数值 $f(x)$. 对于 D 中的变量来说,f 是一个通用的规则:如果 $f(x)=x+\sin x$,则意味着 $f(1)=1+\sin 1$ 或者 $f(e^x)=e^x+\sin e^x$,$f(f(x))=f(x)+\sin f(x)$.

1.1.2 函数的几何性质

1. 奇函数与偶函数

若曲线 $y=f(x)$ 关于原点对称,则称 f 为奇函数,其代数描写为 $f(-x)=-f(x)(x\in D)$;若曲线 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称,则称 f 为偶函数,其代数描写为 $f(-x)=f(x)(x\in D)$.

2. 单调函数 如果曲线 $y=f(x)$ 沿 x 轴方向逐渐上升,则称 f 为单调增函数;若曲线 $y=f(x)$ 沿 x 轴方向逐渐下降,则称 f 为单调减函数.

3. 周期函数 若每间隔一段范围,曲线 $y=f(x)$ 的形状便重复出现,即 $f(x+T)=f(x)$,则称 f 为周期函数,其中,正数 T 称为周期.

4. 有界函数 若在定义区间 D 上,曲线 $y=f(x)$ 位于某两条水平直线 $y=A$ 及 $y=B$ 之间,则称 f 为 D 上的有界函数.

1.1.3 函数的复合

设 $y=f(x)$,且 $z=g(y)$,则只要函数 f 的值域与函数 g 的定义域的交集非空集,便可定义它们的有顺序的复合函数:$z=g(f(x))$.

1.1.4 初等函数与分段函数

1. 基本初等函数

幂函数,指数函数与对数函数,三角函数与反三角函数,将这些函数以及常数经过有限次四则运算及复合运算构成的用一个式子表示的函数叫**初等函数**.

2. 分段函数

分段函数是指在定义域的某一部分使用一个公式,而在定义域的另一部分使用另一个公式定义的函数.

1.2 解题指导

例 1 求以下函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3-x}$; (2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(3) $y=\arcsin(2x+1)$; (4) $y=\ln(1+3x)$.

分析 此题要求根据数学公式的含义,求出使公式有意义的 x 的全体. 凡是遇到

偶次方根函数，如 $y=\sqrt{u},\sqrt[4]{u}$ 等，应当要求 $u\geqslant 0$；遇到分式函数，如 $y=\frac{v}{u}$，则要求 $u\neq 0$；遇到反三角函数 $\arcsin u$ 或 $\arccos u$，则要求 $|u|\leqslant 1$；遇到对数函数 $y=\ln u$，则要求 $u>0$ 等.

解 (1) 由 $3-x\geqslant 0$ 得 $x\leqslant 3$；

(2) 由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$ 得 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$；

(3) 由 $|2x+1|\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 1$，亦即 $-1\leqslant x\leqslant 0$；

(4) 由 $1+3x>0$ 得 $x>-\frac{1}{3}$.

例 2 判定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^4+1$； (2) $f(x)=x^3-x$；

(3) $f(x)=x\cos x$； (4) $f(x)=e^x$.

分析 有两种方法判定函数的奇偶性. 一是直接应用奇偶函数的定义判定，即当 $f(-x)=f(x)$ 时，f 为偶函数；当 $f(-x)=-f(x)$ 时，f 为奇函数. 二是利用奇偶函数的运算性质判定，如两个偶函数之乘积、和、复合都是偶函数等.

解 (1) $f(-x)=(-x)^4+1=x^4+1=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

(4) $f(-x)=e^{-x}$ 与 $\pm f(x)=\pm e^x$ 都不可能相同，故 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

例 3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，证明 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$G(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

分析 依据定义验证即可.

证 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，$G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$，证之.

例 4 求以下函数的反函数.

(1) $y=x^{-1}\ (x\neq 0)$； (2) $y=e^x(|x|<+\infty)$；

(3) $y=\frac{x-1}{x+1}\ (x\neq -1)$； (4) $y=\sin x\ \left(|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

分析 通过初等变形让 x 与 y 的地位交换，便得到反函数 $x=\varphi(y)$ 的公式，并可以写成(函数与字母选用无关) $y=\varphi(x)$ 的形式.

解 (1) 由 $y=\frac{1}{x}$ 得 $x=\frac{1}{y}$，故反函数为 $x=\frac{1}{y}$，或记作 $y=\frac{1}{x}$.

(2) 由 $y=e^x$ 得 $x=\ln y$，故反函数为 $x=\ln y$，或记作 $y=\ln x$.

(3) 由 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 得 $yx+y=x-1$，即 $x=\frac{1+y}{1-y}$，故反函数为 $y=\frac{1+x}{1-x}(x\neq 1)$.

(4) 由 $y=\sin x$ 得 $x=\arcsin y$,即 $y=\arcsin x(|x|\leqslant 1)$ 为所求反函数.

注 一般来说,在同一个直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 的曲线与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的曲线重合,与调换字母的另一形式的反函数 $y=\varphi(x)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称.有趣的是,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 与其两种形式的反函数 $x=\dfrac{1}{y}$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲线都重合.

例 5 设 $f(x)$ 以 T 为周期,证明复合函数 $h(x)=f(x+a)$ 以 T 为周期,$g(x)=f(ax)\quad(a\neq 0)$ 以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期.

分析 验证一个函数 $h(x)$ 是否以 T 为周期,只要看 $h(x+T)=h(x)$ 是否成立.

解 因为 $f(x)$ 以 T 为周期,故 $f(x+T)=f(x)$,于是

$$h(x+T)=f((x+T)+a)=f(x+a+T)=f(x+a)=h(x),$$

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)=g(x),$$

故所证结果成立.

例 6 设 $f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由于 $f(x)=e^{x^2}$,故 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$.对比 $f(\varphi(x))=1-x$,得

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x\quad(x\leqslant 0),$$

其中,由 $\varphi^2(x)\geqslant 0$ 推出 $1-x\geqslant 1$,故 $x\leqslant 0$.于是

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\quad x\leqslant 0.$$

1.3 练 习 题

1. 求以下函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\ln(x-1)}}$.

2. 判定以下函数的奇偶性.

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2) $y=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

3. 求以下函数的反函数.

(1) $y=1-e^x$;　　(2) $y=1+\cos x, 0\leqslant x\leqslant \pi$.

4. 设函数 $f(x)=xe^{\sin x}\tan x$,则 $f(x)$ 是其定义区间上的(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数

C. 周期函数　　D. 单调函数

5. 函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

6. 下列函数中不是奇函数的是(   ).

A. $y=-x\mid x\mid$　　　　B. $y=\sin(\mid x\mid+x)$

C. $y=e^{x}-e^{-x}$　　　　D. $y=x^{3}$

7. 若 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1+x}{2+x}$,求 $f(x)$.

8. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f(f(x))$.

9. 判定以下各对函数是否相等?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$;

(2) $f(x)=3\ln x, g(x)=\ln x^3$;

(3) $f(x)=\tan x, g(x)=\dfrac{1}{\cot x}$.

10. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}, f(x)+f(y)=f(z)$,求 z.

1.4 答案与提示

1. (1) 由$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x-\sqrt{x}\geqslant 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2\geqslant x,\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x(x-1)\geqslant 0,\end{cases}$从而定义域为 $x\geqslant 1$.

(2) 由$\begin{cases}x-1>0,\\ 1+\ln(x-1)\neq 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\neq e^{-1},\end{cases}$或$\begin{cases}x>1,\\ x\neq 1+e^{-1},\end{cases}$从而定义域为 $(1,1+e^{-1})$ 及 $(1+e^{-1},+\infty)$.

2. (1)
$$\begin{aligned}y(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-y(x),\end{aligned}$$
故 $y(x)$ 为奇函数.

(2) $y(-x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-y(x)$,故 $y(x)$ 为奇函数.

3. (1) $y=1-e^x, 1-y=e^x, x=\ln(1-y)$,故 $y=\ln(1-x)(x<1)$ 是所求的反函数.

(2) 函数 $y=1+\cos x$ 在$[0,\pi]$上严格单调减,值域为 $W=[0,2]$,故存在 W 上的反函数 $x=\arccos(y-1)\quad(0\leqslant y\leqslant 2)$,即 $y=\arccos(x-1)\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$.

4. B. 因为当 $x \to \frac{\pi}{2}^{+}$ 时，$\tan x \to -\infty$，而 $xe^{\sin x} \to \frac{\pi}{2} \cdot e$，故 $f(x) \to -\infty$.

5. D. 此函数在$(1,+\infty)$上单调增加，故在$(2,3)$上有 $y(2) < y(x) < y(3)$，即 $0 = \lg(2-1) < \lg(x-1) < \lg(3-1) = \lg 2$.

6. B.

7. 方法 1　记 $t = \frac{1}{x+1}$ 得 $x = \frac{1}{t} - 1$，于是

$$f(t) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+\frac{1}{t}-1}{2+\frac{1}{t}-1} = \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} = \frac{1}{1+t}.$$

方法 2　因为 $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1+x}+1}$，故以 x 代 $\frac{1}{1+x}$ 得

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

8. 因为 $f(x) = \frac{1}{1+x}$，以 $f(x)$ 代 x 得

$$f(f(x)) = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}.$$

9. (1) 不相同. 因为两个函数的对应规则不同：例如 $f(-2) = 2$，而 $g(-2) = -2$.

(2) 相同. 因为两个函数的定义域都是 $x > 0$，并且对应规则也一样：$\ln x^3 = 3\ln x$.

(3) 不一样. $\tan x$ 的定义域要求是 $\cos x \neq 0$，而 $\frac{1}{\cot x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ 的定义域要求是 $\sin x \neq 0$，两个定义域不相同.

10. 由条件知，$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$，于是可解出 $z = \frac{xy}{x+y}$.

第二章 极限与连续

2.1 主要公式和结论

2.1.1 数列极限的四则运算法则

若 $\lim x_n = a, \lim y_n = b$,则

(1) $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b$.

(2) $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b$.

(3) $\lim(x_n / y_n) = \lim x_n / \lim y_n = a/b\ (b \neq 0)$.

2.1.2 数列极限存在性准则

数列可以分为两大类:收敛数列和发散数列.只有收敛数列才有极限,判定数列收敛的方法如下.

1. 单调有界准则

单调增加有上界或单调减少有下界的数列必定是收敛数列.

2. 夹挤准则

若 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n (n = 1, 2, \cdots)$,且 $\lim a_n = \lim b_n = c$,则 x_n 是收敛数列,其极限亦是 c.

2.1.3 函数极限的运算法则(仅以 $x \to a$ 来叙述)

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$,则有与数列极限情形相似的结果:

(1) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x) = A/B\ (B \neq 0)$.

2.1.4 函数极限的夹挤准则

若 $a(x) \leqslant f(x) \leqslant b(x) \quad (x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a)$,且 $x \to a$ 时,$a(x), b(x)$ 均收敛于 A,则有 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

2.1.5 无穷小量的比较

如果变量以 0 为极限,则称其为无穷小量.

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是同一极限过程中的两个无穷小量，

(1) 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价的无穷小量，记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

(2) 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小量，记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$；

(3) 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

由定义知道，等价是同阶的特殊情况；$\alpha = o(\beta)$ 意味着 α 会较 β 更快地趋于 0.

并非任意两个无穷小量都可以比较快慢. 例如 $\alpha = x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta = x(x \to 0)$ 因为 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在.

2.1.6 常用的无穷小量等价关系

若在某一极限过程中，$\alpha(x) \to 0$，则有以下公式：

$$\sin\alpha \sim \alpha, 1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2, \ln(1+\alpha) \sim \alpha, e^\alpha - 1 \sim \alpha;$$

$$a^\alpha - 1 \sim (\ln a)\alpha, (1+\alpha)^r - 1 \sim r\alpha, \tan\alpha \sim \alpha, \arcsin\alpha \sim \alpha.$$

2.1.7 等价替换与四则运算

设在同一极限过程中，$\alpha(x) \sim u(x)$，$\beta(x) \sim v(x)$，则有以下等价代换运算法则.

1. 和取大原则

若 $\alpha(x) = o(\beta(x))$，则 $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

2. 因式替换原则

$\alpha(x)\beta(x) \sim u(x)v(x)$，$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \sim \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

3. 非零因式替换原则

若 $\gamma(x) \to A \neq 0$，则 $\gamma(x)\alpha(x) \sim A\alpha(x)$，$\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} \sim \dfrac{\alpha(x)}{A}$.

2.1.8 连续与间断

1. 在一点连续 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

2. 在一点左(右)连续 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左(右)邻域有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$)，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左(右)连续.

3. 在开区间连续　函数 $f(x)$ 在开区间内的每个点都连续.

4. 在闭区间连续　函数 $f(x)$ 在开区间内的每个点都连续,且在左端点右连续,右端点左连续.

5. 间断点　函数 $f(x)$ 不连续的点称为间断点.

6. 第一类间断点　设 x_0 是 $f(x)$ 定义区间的内点,若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在,则当 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$ 时,称点 x_0 为**跳跃间断点**;而当 $f(x_0^+)=f(x_0^-)$,但是不与 $f(x_0)$ 相等或 $f(x)$ 在点 x_0 无定义时,称点 x_0 为**可去间断点**.可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.当 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间的左端点时,若 $f(x_0^+)$ 存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.类似地理解为 x_0 右端点时.

7. 第二类间断点　若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 有一个不存在(指极限为无穷大或无限振荡),则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

2.2　解题指导

2.2.1　数列极限的计算

例 1　计算下列数列极限.

(1) $l=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$;

(3) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$;

(4) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$.

分析　利用等式变形的方法将数列通项进行化简,然后计算化简后的数列的极限,常见的变形方法有因式分解,根式有理化等.

解　(1) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$;

(2) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1+(-1)^n}{n+1}\right)=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n+1}=1$;

(3) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{2}$.