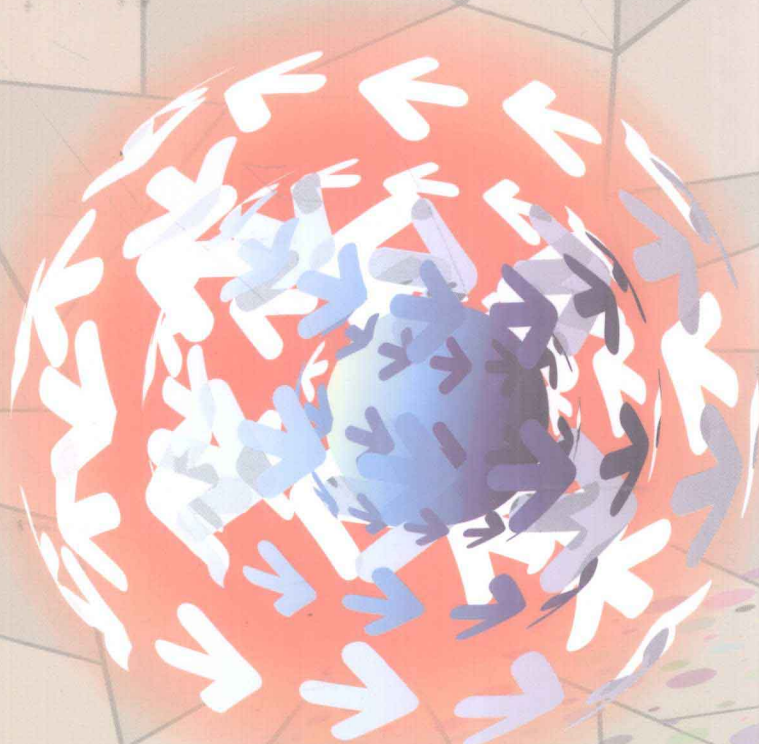


中国地震局地壳应力研究所基本科研业务费专项资助出版

地力学地震预测基础

安欧 著



地震出版社

地力学地震预测基础

安 欧 著

地 震 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

地力学地震预测基础/安欧著. —北京:地震出版社, 2011. 5

ISBN 978-7-5028-3837-9

I. ①地… II. ①安… III. ①地震预报 IV. ①P315.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 021175 号

地震版 XM2068

地力学地震预测基础

安欧 著

责任编辑:薛广盈

责任校对:孙铁磊

出版发行:地震出版社

北京民族学院南路9号

邮编:100081

发行部:68423031 68467993

传真:88421706

门市部:68467991

传真:68467991

总编室:68462709 68423029

传真:68455221

专业部:68467982

经销:全国各地新华书店

印刷:北京鑫丰华彩印有限公司

版(印)次:2011年5月第一版 2011年5月第一次印刷

开本:787×1092 1/16

字数:538千字

印张:21

书号:ISBN 978-7-5028-3837-9/P(4477)

定价:60.00元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题,本社负责调换)

序

地震预测研究，已成为固体力学、断裂力学、岩体力学、地质力学、地球物理、地球化学、构造地质学、大地测量学、天体动力学和构造物理学等互相交叉渗透的学科。显现了地学的本来面目，因为地学现象本身就是综合性的。分专科进行科学研究是人为的历史现象，但分专业来论述综合现象，就看不清多学科因素组合作用中相互间的来龙去脉了。

据此，本书遵循如下几个论述要点：

(1) 着重应力场和强度场的矛盾作用，用“多因果律”把应力场引起的各“后果场”和影响强度场的各“原因场”，在应力与强度这个力学矛盾作用中统一联系起来。因而，在地震预测中，要应力场观测与强度场观测密切配合，并观测作为应力场引起的各后果场和影响强度场的各原因场的各地球物理场的变化。本书以此为中心，向前向后展开。

(2) 地震不论是何种原因造成的都必须表现为震源岩体的脆性破裂，以辐射弹性波。归根结底是构造运动中伴生的一种特殊力学现象，是应力升或强度降的矛盾结果，引起地震的任何原因都必须通过震源的这种力学过程而起作用。

(3) 从震源应力升或强度降的直接成因到震源脆性破裂而形成弹性回跳，是震源基本力学过程。在此力学过程中，断裂活动直接或间接发出的各种前兆，是地震之所以能够预测的科学依据。

(4) 概率统计是科学发展常经之路，在“地学发展史”中将占有重要篇幅。现象是地学研究中要首先面对的客观存在，但每个地学现象所能表现的常有个体性和表面性。据此以往，致使大地构造学派之多异于基础学科，各有依据，各持己见，各派各系发挥各自特点，寻找各自工作途径。要通过现象学阶段深入到物理本质，就要运用实验和基础科学理论，解释客观现象，修正统计规律，打破封闭体系，拓展横向思维，研究现象发生机制，了解各场相互联系，探寻发震物理过程，逐步提出理论认识，运用理论指导监测。

(5) 科学研究中使用的预测方法有多种：如，根据观测量随时间的变化规律将其沿时间轴向后外推，此法的关键是掌握观测量随时间的变化规律；又如，根据状态成因的再现来预测状态的出现，此法的关键是准确了解状态的成因；再如，根据有物理本质联系二现象在过去的同步变化，由其一的再现来预测另一现象的出现，此法的关键是二现象有固定联系。所有这些预测方法的关键部

分，都是使用中需要重点关注的课题，它关系到预测结果的可靠程度。

地震监测，也为构造运动和断层活动研究、石油开发、岩体工程，提供了重要的观测依据。

愿本书能“剖析现象，深入本质”，为用地力学进行地震预测提供理论基础。

安 欧

2010 年 10 月于北京

目 录

第一章 地球力学	(1)
第一节 地球公转力学状态	(1)
一、经典力学的相对性	(1)
二、地球公转经典力学	(2)
第二节 地球自转力学状态	(7)
一、地球自转轴在地史中的稳定性	(7)
二、地球自转快慢交替变更的机制	(13)
三、地球自转中核幔壳的动能分布	(15)
四、地球自转引起的各主要质量力	(18)
五、地球自转的质量力转为面积力	(19)
六、地球自转控制地壳应力主方向	(22)
第三节 地球转生地壳运动	(25)
一、地球公转自转概述	(25)
二、地壳运动天体力源	(26)
第二章 地壳力学	(36)
第一节 岩体应力场	(36)
一、岩体应力场表示	(37)
二、岩体应力场组成	(43)
三、岩体应力场分布	(63)
四、岩体应力场作用	(95)
五、岩体应力场特征	(112)
第二节 岩体强度场	(116)
一、岩体应变场表示	(116)
二、岩体力学性质场	(125)
三、岩体变形的机制	(231)
四、区域岩性的测量	(234)
第三节 应力与强度	(244)
一、应力应变本构关系	(244)
二、应力强度对抗关系	(267)
第三章 地震力学	(268)
第一节 震源破裂	(268)
一、断裂活动方式	(268)
二、岩体断裂强度	(274)

三、地震发生机制	(278)
第二节 震源释能	(279)
一、体积震源	(279)
二、面积震源	(281)
第三节 控震因素	(281)
一、残余应力场	(282)
二、岩体断裂网	(297)
第四章 测震力学	(298)
第一节 观测项目力学关系	(298)
一、岩体应力升高的后果	(298)
二、岩体强度降低的原因	(301)
第二节 台网观测数据提取	(306)
一、测项要求	(306)
二、数据处理	(307)
三、异常统计	(308)
第三节 观测资料震情分析	(310)
一、多因果律	(310)
二、前兆标志	(310)
三、安全系数	(314)
第四节 预测震例方法讨论	(317)
一、汶川 8.0 级地震中期预测方法	(317)
二、汶川 8.0 级地震跟踪短期预测方法探讨	(324)

第一章 地球力学

本章，运用经典力学理论，把地球作为一个天体，论述其公转和自转的力学状态，讨论其在地壳运动动力形成中的作用和对作为部分天体的地壳总体运动方式的影响。

经典力学是有相对性的，但在地球公转自转力学和地壳力学的研究中有一定可用性。地球公转和自转是地壳应力的天体力源。

第一节 地球公转力学状态

一、经典力学的相对性

1. 经典力学运动的参考系

(1) 牛顿定律所指的物体严格地说是质点，其体积比运动空间小得多，不计形状和连通，不考虑平移和转动，是对实物的质量作集中处理的近似简化。因而天体也可简化为质点。

(2) 质点存在的形态是时间和空间，描述其存在时间和空间的坐标系是与不变形参考系连在一起的数学抽象，用之描述质点相对于它的时空状态。

(3) 质点的静止和运动是指相对于所选定坐标系而言。其位置相对于坐标系在改变，为质点相对此坐标系在运动；其位置相对于坐标系不变，为质点相对此坐标系在静止。对不同的坐标系，同一质点的静动态可以不同，因为坐标系也在作各种运动。

2. 牛顿运动定律是惯性系定律

牛顿运动定律：①物体的自由状态是静止或等速直线运动，以保持其惯性；②物体受力则得与力同向正比于力的加速度，而改变原有运动状态，比例系数是物体的惯性质量；③物体主动作用于他物体，他物体给其一等值反向的反作用——惯性力，以倾向保持原有状态的惯性。

(1) 牛顿第一运动定律所指的运动是“相对绝对空间的绝对运动”，此绝对空间被设定为“与外界无关，永远同一，固定不动”，即不受外界任何影响，永远是同一个而不变，保持绝对静止。这是牛顿第一运动定律成立的系统，为惯性系。此定律也因此而称惯性定律。第二运动定律在惯性系中也成立，因为第一运动定律是第二运动定律在受力为零因而加速度也为零时的特殊情况。第三运动定律主动作用与反作用中所指的反作用，是维持原运动状态的惯性作用。因而牛顿运动定律只对惯性系才正确；而且质点运动速度须比光速小得多；质点所代表的须是宏观物体。即不是对所有参考系都成立，对非惯性系、质点运动速度接近光速、微观物体的运动，牛顿运动定律则不正确。此定律的设定条件，限定了其应用范围，而不是在任何情况下都正确。

(2) 牛顿第一运动定律设定了静止与等速直线运动有相同性质，质点对作等速直线运动坐标系的运动与对静止坐标系的运动一样，因而对惯性系作等速直线运动的系统也是惯性

系。同一质点对不同惯性系，仅有速度差，加速度相同。质点在静止坐标系中的加速度，在各惯性系中同样发生，因而作等速直线运动惯性系的运动亦为惯性运动。

(3) 对惯性系作加速运动的系统为非惯性系，牛顿运动定律在其中不成立。视地球近似为惯性系，则在地球坐标系中牛顿运动定律近似适用，与地球连在一起随地球作转动的坐标系为非惯性系。

(4) 牛顿运动定律所设定的惯性系至今没有找到。为在小范围内应用此定律，取相对较大的范围为绝对空间，作近似惯性系。在这种近似惯性系中应用牛顿运动定律所得出的结果，只能是近似的，近似程度视所取“绝对空间”的合理性而定。

3. 太阳系是近似惯性系

(1) 太阳质量只是行星中最大的木星的质量的 1047 倍，是各行星总质量的 740 倍。

(2) 地球公转轨道半径为 $149.7 \times 10^6 \text{ km}$ ，只是太阳直径 $1.391 \times 10^6 \text{ km}$ 的 108 倍。

(3) 太阳系的质心以约 18 km/s 的速度向武仙座中的一点作等速直线运动。若视武仙座为惯性系，由于武仙座在宇宙中也非绝对空间，也在变化着和运动着，因而太阳系也只能是相对的近似惯性系。这样的惯性系在设定上就有了相对的近似性，而且这时行星绕日运动轨道便不是平面椭圆了，而是以太阳系质心向武仙座中一点移动的轨道为轴线的椭圆螺旋曲线。

4. 开普勒定律是近似定律

开普勒定律：①行星呈质点沿以太阳为焦点的平面椭圆轨道运动；②太阳到行星向径扫过的面积速度相等；③行星绕日运动周期平方与距日平均距离立方成正比。

(1) 行星运动是以太阳系为坐标系，太阳系本身是近似惯性系。

(2) 万有引力是行星绕日运动的动力，是通过太阳与行星质心的有心力。由于太阳质量比行星质量大得多，使太阳与行星间引力比各行星间引力大得多，因而视行星绕日运动近似为在太阳引力场中的运动，开普勒第一定律认定行星沿以太阳为焦点的平面椭圆轨道运动，其他几乎与其共面向公转自转各行星对其引力算作摄动（M. K. Вентцель, 1962）。

(3) 自然界物体的运动都有阻力和摩擦力而耗散能量，因而引力场只是近似保守场。当运动阻力和摩擦力足够大时，则为耗散场。行星是在太阳引力场中运动的，这种动力大背景也并非严格的保守场。

(4) 开普勒第三定律的“距日平均距离”，在计算中取的是行星椭圆轨道半径（周培源, 1952）。

经典力学与相对论的差别主要是在物体运动速度极大时才显现出来。经典力学不能解释的现象有很多，但在太阳系和地球上以及对巨型地块的应用条件下，由于运动速度比光速小很多，在不与经典力学设定的条件相距太远时结果还是有一定可用性的（周培源, 1952）。在处理具体问题时，随设定条件与实际情况差别的不同，结果的近似程度也随之而变，在这些设定条件中有的还可人为选择以提高结果的近似性。

二、地球公转经典力学

质量大小可成比例的二质点，都在以其共同质心为中心的万有引力场中，各自沿以其共同质心为焦点的平面椭圆轨道作有心力运动。行星绕日运动应属此类运动。由于太阳质量为地球质量的 3.3×10^5 倍，近日点向径为 $147 \times 10^6 \text{ km}$ ，远日点向径为 $152 \times 10^6 \text{ km}$ ，故描述地

球绕日运动，可近似取日心坐标系。在太阳系内，只有太阳及各行星相互间作用的内力，系外天体对太阳系的外力作用很小，可略而不计（周培源，1952）。于是由开普勒第一、第二定律知：地球公转是在太阳引力场中，作为一个质点沿以太阳为焦点的平面椭圆轨道运动；运动的动力只有日地万有引力和地球公转惯性力，以维持沿平面椭圆轨道的运动，这种力学状态是在地球作为天体于其形成时就造成了的，之后一直延续了下来。

按开普勒第二定律，地球呈质点绕日作平面椭圆轨道运动中，其向径单位时间扫过的面积相等，因而是变速平面曲线运动（图 1.1a）。质点沿平面曲线作变速运动的速度 v 是沿曲线切线方向，大小和方向随处改变。质点在 P 点的速度

$$v = \frac{dr}{dt}$$

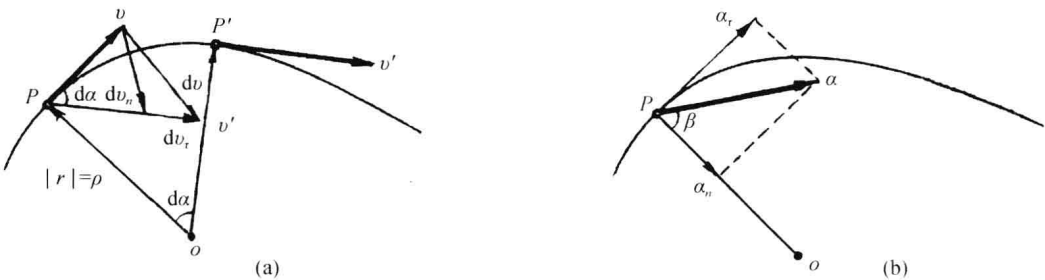


图 1.1 质点沿平面曲线运动的速度向量分解 (a) 和加速度向量分解 (b)

加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_n + dv_\tau}{dt} = \frac{dv_n}{dt} + \frac{dv_\tau}{dt} = a_n + a_\tau$$

式中， dv_n 表示质点速度在法向的变化； a_n 为法向加速度，方向指向曲线 P 点的曲率中心，又称向心加速度； ρ 为 P 点曲率半径，指向曲率中心 O ； dv_τ 表示质点速度在切向的变化； a_τ 为切向加速度，方向在 P 点切向指向质点运动方向。

当曲线 P 、 P' 点无限接近时，由于 $d\alpha$ 微小，视 $dv_n = v d\alpha$ ， $dr = \rho d\alpha$ ，则

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = v \frac{d\alpha}{dt} = v \frac{d\alpha}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{1}{\rho} v = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$$

因 a_n 与 a_τ 正交（图 1.1b），质点总加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

其方向与曲率半径成角 β ,

$$\tan\beta = \frac{a_\tau}{a_n}$$

在匀速曲线运动段, $a_\tau = 0$, 速度只改变方向, 则

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.1)$$

按牛顿第二运动定律, a 的方向即质点质量力 ma 的方向, 则有关系

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

两点内乘

$$\cdot \frac{dr}{dt} dt = \cdot dr$$

得

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \frac{dr}{dt} dt = F \cdot dr$$

即

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] dt = F \cdot dr$$

则有

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F \cdot dr \quad (1.2)$$

式 (1.2) 说明: 质量 m 质点动能的微分等于作用力的微分功。即质点动能的增量, 等于外力 F 使其位置改变 dr 所做的功 $F \cdot dr$; 据牛顿第三运动定律, 质点同时要给施力体以 $-F$, 并做功 $-F \cdot dr$, 则式 (1.2) 又说明, 质点动能的减量, 等于质点向外施力 $-F$ 使受力体位置改变 dr 所做的功 $-F \cdot dr$ 。即施力体做功与质点做功符号相反, 当施力体做功为正, 则质点做功为负; 当施力体做功为负, 则质点做功为正。功本身的正负则取决于 $F \cdot dr$ 的符

号, F 与 dr 同向或成锐角时功为正。两者反向或成钝角时功为负。

对质量为 M 、质心为 C 的质点组 (组合体、变形体、刚体), 式 (1.2) 表示为

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right) = F \cdot dr_c \quad (1.2')$$

式中, v_c 为质点组质心速度; r_c 为质点组质心向径。质点组从位置 1 运动到位置 2 的动能分别为 E_1 、 E_2 , 外力功为 A , 则式 (1.2') 有积分形式

$$E_2 - E_1 = A \quad (1.3)$$

式 (1.3) 说明: 质点组动能改变量等于外力功。此处只论及质点组的平移, 其转动留待地球自转部分讨论。于是其动能为移动动能, 则在点 1, 2 的动能改变量

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}M(v_{c2}^2 - v_{c1}^2)$$

功为移动功

$$A = \int_1^2 F \cdot dr_c = \int_1^2 F dr_c \cos(F, dr_c)$$

地球质量非均匀分布, 被力学参量突变界面分成地核、地幔、地壳三部分, 其质量依次为 $M_{\text{核}} = 188 \times 10^{22} \text{kg}$, $M_{\text{幔}} = 405 \times 10^{22} \text{kg}$, $M_{\text{壳}} = 5 \times 10^{22} \text{kg}$ 。三者在地球绕日公转中, 可有两种基本状态:

1. 界面牢固连结

地核、地幔、地壳在地球绕日运动中牢固连结为一个整体。由于三者的质心都是球心, 质心的几何位置重合, 而组成一个组合体。按质心定理, 质心的运动可视为一个质点的运动, 因而只有移动; 外力作用于质点组的质心, 并唯一地影响质心的运动; 三者在运动过程中形体并不分离, 三个质心在绕日运动中相互之间保持重合的固定关系而成为一个点; 三者都以共同质心的速度 v_c 运动; 由式 (1.3) 知它们共同做功。此时, 地球是作为一个质点在绕日运动。但组成地球的地核、地幔、地壳各有自己的动能 $E_{\text{核}} = \frac{1}{2}M_{\text{核}} v_c^2$, $E_{\text{幔}} = \frac{1}{2}M_{\text{幔}} v_c^2$, $E_{\text{壳}} = \frac{1}{2}M_{\text{壳}} v_c^2$ 。地球质心在近日点和远日点的速度 $v_{c\text{近}} = 30.27 \text{km/s}$, $v_{c\text{远}} = 29.72 \text{km/s}$, 则得地核、地幔、地壳在近日点和远日点的移动动能 E 及其在此二点值之差 ΔE , 列于表 1.1。其中

$$\Delta E_{\text{核}} = \frac{1}{2}M_{\text{核}}(v_{c\text{近}}^2 - v_{c\text{远}}^2)$$

$$\Delta E_{\text{幔}} = \frac{1}{2} M_{\text{幔}} (v_{c\text{近}}^2 - v_{c\text{远}}^2)$$

$$\Delta E_{\text{壳}} = \frac{1}{2} M_{\text{壳}} (v_{c\text{近}}^2 - v_{c\text{远}}^2)$$

表 1.1 地核、地幔、地壳在近日点和远日点的移动动能和质量力及其在此二点的差值

主体	位置	$E/(10^{28}\text{J})$	$\Delta E/(10^{28}\text{J})$	$Ma_c/(10^{22}\text{N})$	$\Delta(Ma_c)/(10^{19}\text{N})$
地核	近日点	86130	3102	1.194	43
	远日点	83028		1.151	
地幔	近日点	185547	6683	2.572	93
	远日点	178864		2.479	
地壳	近日点	2291	83	0.033	2
	远日点	2208		0.031	

由于在近日点和远日点地球质心处于匀速状态， $a_{\text{c}\tau}=0$ ，故 $a_c=a_{\text{c}n}=\frac{v_c^2}{\rho}$ ，则由式（1.1）得地核、地幔、地壳的质量力

$$M_j a_c = M_j \frac{v_c^2}{\rho} \Big|_{j=\text{核、幔、壳}} \tag{1.4}$$

式中，曲率半径 ρ 取地球在近日点的向径 $147.1\times10^6\text{km}$ 。求得地核、地幔、地壳在近日点和远日点的 Ma_c 及其差 $\Delta(Ma_c)$ 值列于表 1.1。从表 1.1 可知：地核、地幔、地壳的移动动能和质量力，都相差巨大；其中以地幔的移动动能和质量力为最大，其值从近日点到远日点的改变也最大，这是地球在公转中活动的能动性最强的部分。

2. 界面相互滑动

地核、地幔、地壳在地球绕日运动中三者沿其间低强度层或滑动层相互滑动。由于三者动能和质量力的差异，在共同绕日运动中相互间沿界面发生剪切变形或剪切滑动。这种滑动一旦发生，三者的质心将出现分离而调整地球的质量分布，三者质心的运动速度也因之而出现差异。此时它们从轨道上的点 1 到点 2 动能的改变量变为

$$\frac{1}{2} M_j (v_{jc2}^2 - v_{jc1}^2) = \int_1^2 F_j \cdot dr_{jc} \Big|_{j=\text{核、幔、壳}} \tag{1.4'}$$

此时地核、地幔、地壳组成了一个地球组合体在绕日运动，这个组合体可相互滑动，所受的力还是太阳引力和地球公转惯性力。式（1.4'）说明：当外力对此组合体做功，则三者动能增加；当此三者动能降低，则各自做功；动能改变量大者，做功量也大，造成较大的位移。由于地核、地幔、地壳的质量和质心速度 v_c 出现差异，由式（1.4）知，也造成它们向心和切向加速度因之总加速度 a 的不同，使质量力 Ma 出现差异。较大的位移和较大的质量力之差，可造成它们相互间的左右错位前后压张作用。

上述两种基本状态区别的关键，在于质量有巨大差别的地核、地幔、地壳在绕日运动中，是连结为一个整体，还是沿相互间界面滑动而在绕日的共同运动中出现相互间的歧动，使得高动能体和高质量力者的高能动性或超前运动，对其上下层沿低强度界面发生剪切错动，造成地球整体的变形和高能动部分的偏心。可见，此种现象发生的条件是：①地球内存在低强度层；②被低强度层分开的部分有质量差异。据此，在地球公转中地壳内被裂缝分开的高动能、高质量力地块的超前运动，也会对左右两侧的低质量地块发生水平剪切错动，对前面的低质量地块作水平挤压，与后面的地块之间发生水平拉张作用。地幔的偏心还会引起地壳的升降运动。这种作用都会造成地壳中在地球形成时被吸引到一起的各小天体之间的原始缝隙的再活动，并在后来沉积覆盖层中继续向上发展，形成地壳乃至上地幔中继承性大断裂带的不断活动。

第二节 地球自转力学状态

地球自转的主要力学问题，是自转轴的长期稳定性、转速快慢的变更机制、自转动能在地体的分布、自转在地壳中引起的质量力、自转中地壳水平和铅直力的比较以及自转对地壳应力大格局的主要影响。

这些方面的综合作用，是促成地壳运动的主要原因和条件，也是构成“地壳天体力学”的主要内容。

一、地球自转轴在地史中的稳定性

根据如下：

1. 地球总体形态基本稳定

地球的球面极坐中， r 为径矢， θ 为极纬度， ψ 为方位角（图 1.2）。在地壳上取一微方弧体素，径向边长为 dr ，纬向边长为 $rd\theta$ ，经向边长为 $r\sin\theta d\psi$ ，平行三边方向的岩体移动速度为 v_r 、 v_θ 、 v_ψ 。于是，在 r 方向单位时间通过的岩体为

$$v_r r^2 \sin\theta d\theta d\psi$$

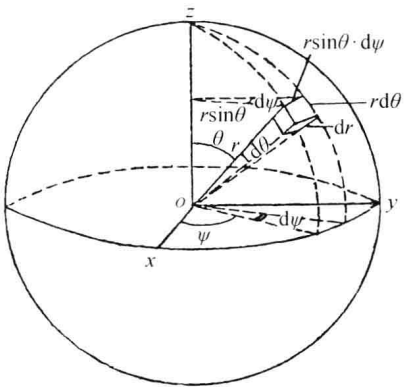


图 1.2 球面极坐标中地壳微方弧体素

则在 dr 距离上单位时间通过的岩体变化量为

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_r r^2 \sin\theta) d\theta d\psi dr$$

同样，在 $r d\theta$ 距离上 θ 方向单位时间通过的岩体变化量为

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta r^2 \sin\theta) d\psi dr d\theta$$

在 $r \sin\theta d\psi$ 距离上 ψ 方向单位时间通过的岩体变化量为

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(v_\psi r) dr d\theta d\psi$$

为讨论方便，视岩体不可压缩，则单位时间进出此体素的岩体体积相等。因之，在上三个方向单位时间通过体素的岩体变化量的总和为零，得

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta (r v_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \psi} (r v_\psi \sin\theta) = 0 \quad (1.5)$$

取岩体运动的势能函数为 ϕ ，其决定于

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ r v_\theta &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ r v_\psi \sin\theta &= \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \quad (1.5')$$

代入式 (1.5)，得球极坐标中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = 0$$

此式的解为

$$\phi_{nk} = tr^n H_n^k(\theta, \psi)$$

各 ϕ_{nk} 的和，也是此方程的解。式中

$$H_n^k(\theta, \psi) = \sin^k \theta \frac{d^k H_n^0(\theta)}{(d \cos \theta)^k} \cos k \psi \quad (1.6)$$

为圆谐函数； n 、 k 为函数的项数和次数，故均为正整数； t 为时间函数。有关的各项形式，为

$$\begin{aligned} H_0^0 &= 1 \\ H_1^1 &= \sin \theta \cos \psi \\ H_1^0 &= \cos \theta \\ H_2^0 &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \\ H_4^4 &= \sin^4 \theta \cos 4 \psi \\ H_5^0 &= \frac{9.7}{4.2} \cos^5 \theta - \frac{15}{4.2} \cos^3 \theta + \frac{5.3}{4.2} \cos \theta \end{aligned}$$

将式 (1.6) 代入式 (1.5)，得

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = t n r^{n-1} H_n^k(\theta, \psi) \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = t r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} H_n^k(\theta, \psi) \\ v_\psi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = t r^{n-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} H_n^k(\theta, \psi) \end{aligned}$$

为解岩体在径矢方向的运动，将 $v_r = \frac{dr}{dt}$ 代入上方程组的第一式，得

$$\frac{dr}{dt} = t n r^{n-1} H_n^k(\theta, \psi)$$

地球各同心层的平均半径为 r_0 ，则各层实际半径 $r = r_0 + \Delta r$ ， Δr 为以等体积圆球面为基准面的径向形变，代入上式并略去 $\frac{\Delta r}{r_0}$ 各项，得某层径向移动速度

$$\frac{dr}{dt} = t n r_0^{n-1} H_n^k(\theta, \psi)$$

积分之，得

$$r = T n r_0^{n-1} H_n^k(\theta, \psi) + r_0$$

式中

$$T = \int_0^t t dt$$

此层无径向形变时， $r = r_0$ 。从此式可得任一层的径向移动量

$$\Delta r = r - r_0 = Tnr_0^{n-1}H_n^k(\theta,\psi)$$

可见，径向移动量正比于 r_0^{n-1} ，于是一般情况从地表向下径向移动量逐渐减小， n 越大减小得越快，只有 $n = 1$ 时内外各层径向移动量相等。地表总径向移动量，则为

$$\sum \Delta r = a + bH_1^1 + cH_1^0 + dH_2^0 + eH_4^4 + fH_5^0$$

第一项为

$$\Delta r = a$$

表示固体地球全球性缩胀。据地球放射性元素蜕变趋势及多次大范围岩浆体喷出后冷却，表明地球在形成过程中物质逐渐收缩固结并使内部压密而逐渐减小体积；地壳多次大规模褶曲倒伏和广泛的以冲断层形式大距离水平冲压，也证明地球在收缩。阿尔卑斯大逆掩断层水平逆冲40km，整个阿尔卑斯褶断带由于水平挤压缩短了4~8倍，现宽150km的阿尔卑斯带过去为600~1200km宽。阿巴拉阡山南冲断带逆冲了几百千米。喜马拉雅山原地壳水平缩短了300km以上。这些都必然导致两侧地壳巨大的水平缩短，使地球收缩。仅从阿尔卑斯运动一项，就可算得相当地球半径缩短了2km。这个运动，开始于2亿年前。由此可见，地球收缩了相当数量级。放射性元素蜕变，在某阶段引起地温上升，但温度升高越多散失的热量也越大，而不易散失的热量则有助于地壳胀裂使得岩浆沿之喷出冷却，又有助于收缩。因之，地球在整个发展过程中的总趋势是在收缩，阶段性伴有微小的膨胀脉动，这就是上式中第一项所反映的运动形式。

第二项为

$$\Delta r = bH_1^1 = b\sin\theta\cos\psi$$

表示固体地球向一个经度方向的偏心运动（图 1.3a）——东西偏心。太平洋平均深4282m，背面的欧非大陆平均高度在海拔750m以上，于是造成对水圈表面——重力场等势面，因而也是对质量中心 O 的太平洋凹下而欧非大陆凸起的偏心运动。