Б.П. 吉米多维奇

Б.П.ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题集题解

(二)

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（二）

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П吉米多维奇数学分析习题集题解 (2)/费定晖编. -2版. -济南:山东科学技术出版社,1999.9(2003.2重印)

ISBN 7-5331-0100-6

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43961号

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(二)
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路 16 号　邮编 250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路 16 号　电话 2064651)
日照市黄海印刷厂印刷
*
787mm×1092mm　32 开本　17.75 印张　384 千字
2003 年 2 月第 2 版第 15 次印刷
印数:247601－257600
ISBN 7－5331－0100－6
O.6　定价:15.10 元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。

如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　录

第二章 单变量函数的微分学

§1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义　若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量．

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数．

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率〔$\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$〕(图 2.1).

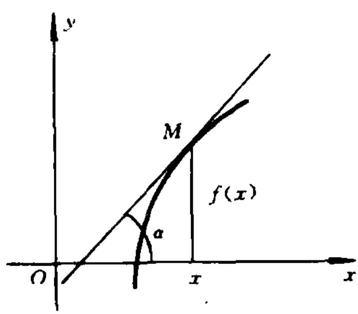

图 2.1

2° 求导函数的基本法则　若 c 为常数且函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ 都有导函数，则

(1) $c' = 0$; (2) $(cu)' = cu'$;

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

(4) $(uv)' = u'v + v'u$;

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n 为常数);

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数，则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式　若 x 为自变数*)，则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$（n 为常数）；

Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$；　　Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$；

Ⅳ. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$；　　Ⅴ. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

Ⅵ. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\mathrm{arc\,tg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\mathrm{arc\,ctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0)$；$(e^x)' = e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0$ 且 $a \neq 1$）；

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$；　　ⅩⅢ. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$；

ⅩⅣ. $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$；　　ⅩⅤ. $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

4° 单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

---

*) 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如本节公式 Ⅴ 中要求 $x \neq k\pi$（k 整数），Ⅵ 中要求 $|x|<1$ 等等. 以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下，函数 $y = f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x = 1000 - 1 = 999$;

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$;

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设：

(a) $y = ax + b$; (б) $y = ax^2 + bx + c$; (в) $y = a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx，求增量 Δy.

解　(a) $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x$;

(б) $$\Delta y = [a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c] - [ax^2 + bx + c] = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

(в) $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

824. 证明：

(a) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(б) $\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (a) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)+\Delta g(x)$,

于是,

$$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

(б) $\Delta[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x]$

$\quad+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$

$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x)$,

于是,

$\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样,我们还可将(σ)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引割线 AA',求此割线的斜率,设:

(а)$\Delta x = 1$；　(б)$\Delta x = 0.1$；　(в)$\Delta x = 0.01$；

(г)Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解　割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \dfrac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$,

(а)$k_{AA'} = 5$；　(б)$k_{AA'} = 4.1$；

(в)$k_{AA'} = 4.01$；　(г)$k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是,在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \to A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 设:

(а)$h = 0.1$;(б)$h = 0.01$;(в)$h = 0.001$,计算此系数的值.

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解　平均伸长系数 $\bar{l} = \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$,

(а)$\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$；

(б)$\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$；

(в)$\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是,

$$l|_{x=1} = \lim_{h \to 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间，x 为以米计的距离. 求在 $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设：(a)$\Delta t = 1$；(б)$\Delta t = 0.1$；(в)$\Delta t = 0.01$，计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么？

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2]$

$$- [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t$$

$$= 210 + 5\Delta t(\text{米} / \text{秒}),$$

(a)$\bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215(\text{米} / \text{秒})$；

(б)$\bar{v} = 210.5(\text{米} / \text{秒})$；

(в)$\bar{v} = 210.05(\text{米} / \text{秒})$.

于是，

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \to 0}(210 + 5\Delta t) = 210(\text{米} / \text{秒}).$$

828. 根据导函数的定义，直接求下列函数的导函数：

(a)x^2；(б)x^3；(в) $\frac{1}{x}$；(г) $\sqrt{x}$；(д) $\sqrt[3]{x}$；

(e)$\operatorname{tg} x$；(ж)$\operatorname{ctg} x$；(з)$\arcsin x$；(и)$\arccos x$；

(к)$\operatorname{arc\,tg} x$.

解 (a)$y = x^2$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

(б) $y = x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$
$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

(в) $y = \dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^2}.$$

(г) $y = \sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

(д) $y = \sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

(e) $y = \operatorname{tg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(ж) $y = \operatorname{ctg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(з) $y = \arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\text{arc sin}t}{t}$$

$$\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0.$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\text{arc sin}t}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{arc sin}t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$;

(и) $y=\text{arc cos}x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{arc cos}(x+\Delta x)-\text{arc cos}x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\text{arc sin}[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\text{arc sin}t}{t}$$

$$\cdot\frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,