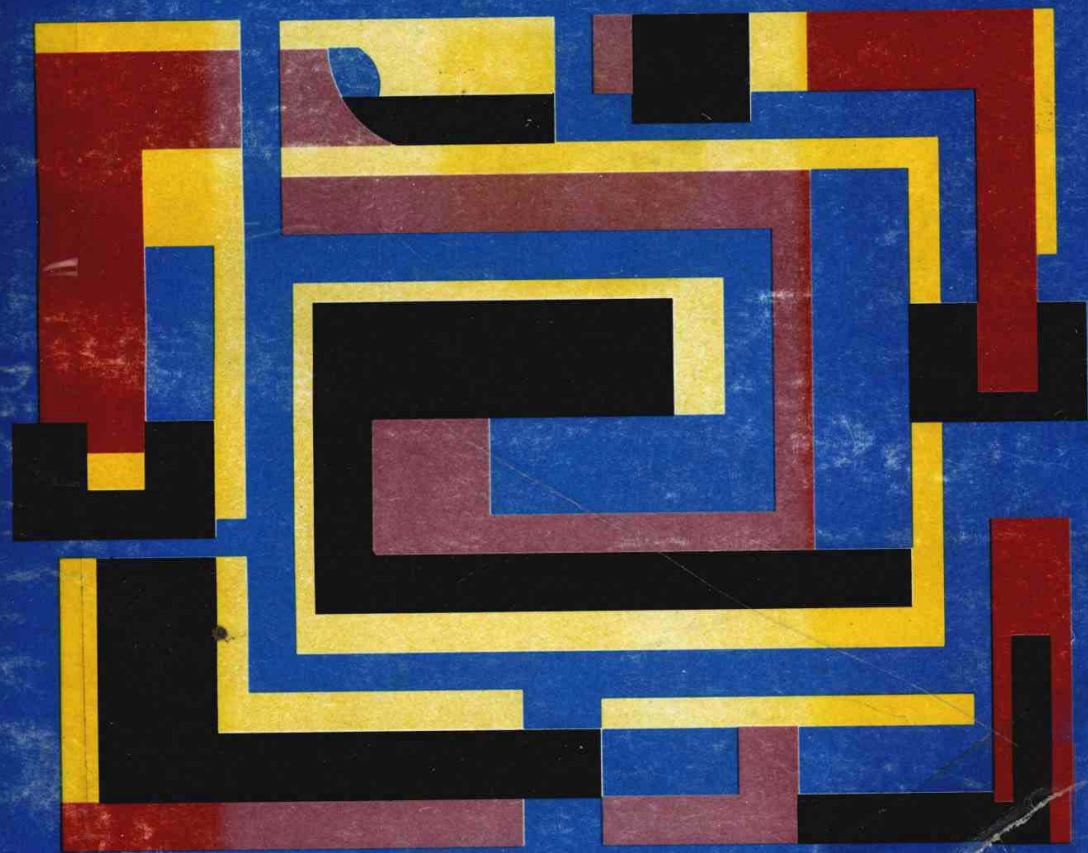




初中几何解题方法与技巧

刘乐魁 郭永宝 陈士环 编著



山东教育出版社

初中几何解题方法与技巧

刘乐魁 郭永宝 陈士环 编著

山东教育出版社

1992 • 济南

鲁新登字 2 号

初中几何解题方法与技巧

刘乐魁 郭永宝 陈士环 编著

*

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 12.875 印张 273 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—2,400

ISBN 7—5328—1360—6/G · 1161

定价 3.55 元

前 言

本书结合现行初中《几何》课本的内容，通过对典型例题的分析、解答和评注，对课本中各章基础知识的运用、解题的方法和技巧以及题目之间的内在联系作了详细的论述，同时尽量发掘一题多解，注重渗透现代数学的思维方法，启迪学生的创造性思维。

本书是在编者多年教学实践的基础上，从初中生的实际水平出发而编写的。在编写过程中，力求科学性、实用性、启发性与可读性的统一，使读者从中可以得到启发，提高运用几何知识解决数学问题的能力，进而起到开阔思路，举一反三的作用，收到事半功倍的效果。

本书主要供初中生学习平面几何时使用，也可供教师在教学中参考。

本书内容是按照初中《几何》课本的顺序编写的，其中郭永宝同志编写有关《几何》第一册的内容；刘乐魁、陈士环同志编写有关《几何》第二册的内容。对于书中的错误和缺点，欢迎广大读者给予批评指正。

编 者

1991. 10

目 录

巧用概念解题	1
如何求角的度数	6
推理的方法与技巧	9
怎样分析证明的思路	13
五种常见题型的基本证明方法	16
一题多解 开拓思路	20
三角形三边关系定理的巧用	25
三角形内角和定理的应用	27
观察图形 巧妙转化	36
全等三角形判定的方法与技巧	39
全等三角形性质的应用	47
等腰三角形性质与判定定理的应用	54
巧用等腰三角形“三线合一”性质证题	58
三角形中不等量问题的证明方法与技巧	61
证明线段和差的基本方法与技巧	68
借助基本作图巧解作图题	73
直角三角形中一个基本图形的应用	79
巧用直角三角形斜边中线性质证题	83
证明线段或角相等的一种简捷方法	87
三角形中常用的添加辅助线的方法	90
多边形内角和定理的应用	94

平行四边形性质与判定的应用	98
如何判定特殊的平行四边形	103
巧用矩形、菱形的性质解题	107
正方形性质的应用	112
梯形中常用的辅助线	119
三角形中位线定理的应用	125
三个与中点有关的定理的综合运用	130
如何证明线段的倍分问题	135
平移、旋转、翻折在证题中的应用	138
研究多边形面积的常用方法	143
证明等积变形问题的思路分析	147
有关等底或等高三角形面积问题的证明	150
勾股定理及其逆定理的应用	153
比例的基本性质及其应用	159
平行线分线段成比例定理的简明证法	167
关于平行线分线段成比例定理的逆定理的探讨	169
三角形内角平分线性质的多种证法	172
比例线段及其应用	178
比例线段在作图中的应用	185
平行线分线段成比例定理的活用	193
三角形角平分线的活用	199
相似三角形的判定方法与思路	205
利用相似三角形证明线段或角相等	209
利用三角形相似证明两直线平行或垂直	213
利用相似三角形证明线段比例式或等积式	218
利用三角形相似进行面积证明或计算	224

利用相似三角形的性质作图	228
圆的定义及其应用	230
垂径定理及其应用	235
圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的应用	239
四点共圆的判定及应用	243
多点共圆与多圆共点的证明方法	249
利用四点共圆妙解几何难题	253
圆内接四边形的性质	255
圆的切线的多种作图法	261
圆的切线的灵活应用	266
圆的切线的判定方法	270
圆幂定理及其应用	274
巧用割线定理证题	281
圆与正多边形	284
等分圆周的作图方法与证明	298
有关圆中的计算问题	301
点的轨迹的探求方法	321
“交轨法”在作图中的应用	324
几何中的直接证法与间接证法	327
证明圆中两线段相等的方法与技巧	334
证明圆中角相等的方法与技巧	341
证明线段或角的和、差、倍、分问题	348
证明圆中两直线平行的方法与技巧	351
证明圆中两直线垂直的方法与技巧	356
圆中比例线段或等积式的证明方法	361
形如 “ $ab = cd + ef$ ” 问题的证明方法	367

代数法解平面几何题的技巧应用372

三角法解平面几何题的技巧应用376

面积法解平面几何题的技巧应用378

几何法解代数、三角题383

证明圆中定值问题的方法与技巧385

一题多解与多题一解389

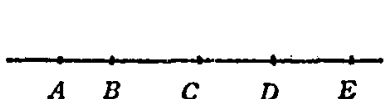
圆中常用的辅助线396

巧用概念解题

在平面几何中将要学习大量的概念。概念是解题的基础，是推理论证的依据。每一几何概念的符号语言往往有多种表达形式，而概念则起着判断和性质的双重作用。因此，要学会灵活地运用概念，巧妙地进行解题。下面针对几何第一章《基本概念》中几种常见类型的题目试举几例，说明如何巧用概念解题。

一、直接利用定义进行判断

例1 如图，在直线 l 上有A、B、C、D、E五个点，



试问：(1) 直线 l 上有多少条射线？

(2) 直线 l 上有多少条线段？并写出它们的名称。

解：(1) 首先应明确射线的定义，“直线上某一点一旁的部分叫做射线，这个点叫做射线的端点”。根据这一定义可知，每一点分直线为两条射线，直线 l 上有5个点，所以共有10条射线。

(2) 根据线段定义，直线上任意两点间的部分就是一条线段，因而直线 l 上共有10条线段，它们是线段AB、AC、AD、AE、BC、BD、BE、CD、CE、DE。

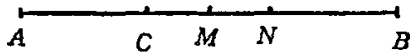
说明：识别图形中线段的条数，关键是要抓住端点，从

一端点字母开始，按照图中字母的顺序依次进行，只有这样才能保证既无遗漏，也不会重复。

二、计算线段的长

例2 已知：如图， C 是线段 AB 上一点， $AC < CB$ ， M 、 N 分别为 AB 、 CB 的中点， $AC = 6\text{cm}$ ， $NB = 4\text{cm}$ 。

求：线段 MN 的长。



解： $\because N$ 是 CB 的中点， $NB = 4\text{cm}$

$$\therefore CB = 2NB = 8\text{cm}$$

$$\because AC = 6\text{cm}$$

$$\therefore AB = AC + CB = 6 + 8 = 14 (\text{cm})$$

$\because M$ 是 AB 中点

$$\therefore MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 14 = 7 (\text{cm})$$

$$\therefore MN = MB - NB = 7 - 4 = 3 (\text{cm})$$

答：线段 MN 的长为 3cm 。

说明：(1) 本题应用了线段的和、差意义及线段中点的概念。

(2) M 是 AB 的中点，可表示为 $AM = MB$ ，或 $AM = MB = \frac{1}{2}AB$ ，或 $AB = 2AM = 2MB$ ，应用时选用哪一种表示方

法要根据具体情况而定。

三、求角的大小

例3 已知：如图， $\angle AOE$ 是直角， OB 平分 $\angle AOC$ ，

OD平分 $\angle COE$, $\angle 1 = 25^\circ$ 。

求: $\angle 3$ 的度数。

解: $\because OB$ 平分 $\angle AOC$,

$$\angle 1 = 25^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle 1 = 50^\circ$$

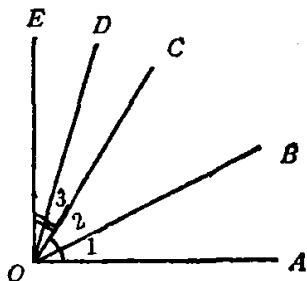
$\because \angle AOE$ 是直角

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle COE = \angle AOE - \angle AOC = 40^\circ$$

$\because OD$ 平分 $\angle COE$

$$\therefore \angle 3 = \frac{1}{2}\angle COE = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$$



答: $\angle 3$ 为 20° 。

说明: (1) 解本题的关键在于正确运用角平分线的概念和直角的概念。

(2) 根据已知, OB 是 $\angle AOC$ 的平分线, 可表示为 $\angle AOB = \angle BOC$, 或 $\angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOC$, 或 $\angle AOC = 2\angle AOB = 2\angle BOC$, 应用时选用哪一种表示方法仍要根据具体情况而定。

例4 已知: 如图, $\angle 1:\angle 2:\angle 3 = 1:2:4$, $\angle 4 = 80^\circ$ 。

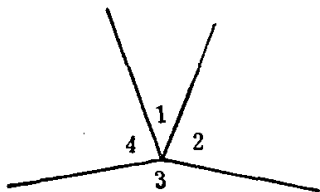
求: $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的度数。

解: 设 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的度数分别为 x 、 $2x$ 、 $4x$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ,$$

$$\angle 4 = 80^\circ$$

$$\therefore x + 2x + 4x + 80 = 360$$



解得 $x = 40$

$$\therefore 2x = 80, 4x = 160.$$

答: $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 分别为 40° 、 80° 、 160° 。

说明: (1) 解本题的关键在于正确运用周角的概念, 充分利用周角为 360° 为解题创造条件。

(2) 在明确了角的有关概念的前提下, 通过列方程或方程组求出未知角的度数, 是一种有效的方法。

例 5 已知: 如图, AOB 是一条直线, OC 、 OE 分别是 $\angle AOD$ 和 $\angle BOD$ 的平分线。

求: $\angle COE$ 的度数。

解: $\because OC$ 平分 $\angle AOD$

$$\therefore \angle COD = \frac{1}{2} \angle AOD$$

$\because OE$ 平分 $\angle BOD$

$$\therefore \angle DOE = \frac{1}{2} \angle BOD$$

$$\therefore \angle COE = \frac{1}{2} \angle AOD + \frac{1}{2} \angle BOD$$

$$= \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle BOD)$$

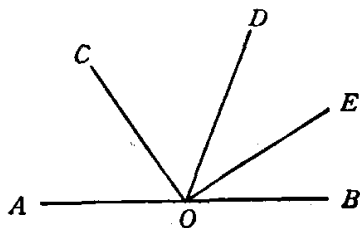
$$= \frac{1}{2} \angle AOB$$

$\because AOB$ 是一直线

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle COE = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

答: $\angle COE$ 的度数为 90° 。



说明：在直线上取一点，这时的图形可看作是由有公共端点的两条射线组成的，根据平角的定义，这是一个平角，平角的度数为 180° ，解题的时候应注意应用。

例6 已知： $\angle\alpha$ 的补角是 $\angle\beta$ 余角的3倍，且 $\angle\alpha = \frac{3}{2}\angle\beta$ 。

求： $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 的度数。

解： $\angle\alpha$ 的补角为 $180^\circ - \angle\alpha$ ， $\angle\beta$ 的余角为 $90^\circ - \angle\beta$ ，根据题意得：

$$\begin{cases} 180^\circ - \angle\alpha = 3(90^\circ - \angle\beta) & \text{①} \\ \angle\alpha = \frac{3}{2}\angle\beta & \text{②} \end{cases}$$

将②式代入①式，得

$$180^\circ - \frac{3}{2}\angle\beta = 270^\circ - 3\angle\beta \quad \text{③}$$

$$\therefore \frac{3}{2}\angle\beta = 90^\circ$$

$$\therefore \angle\beta = 60^\circ$$

$$\therefore \angle\alpha = \frac{3}{2}\angle\beta = \frac{3}{2} \times 60^\circ = 90^\circ$$

答： $\angle\alpha$ 、 $\angle\beta$ 的度数分别为 60° 、 90° 。

说明：(1) 解决本例的关键在于正确地运用余角、补角的概念，并能根据题意列出方程组。

(2) 在上面的推理过程中，由①式变到③式是将①式中的 $\angle\alpha$ 用它相等的量 $\frac{3}{2}\angle\beta$ 来代替的，这种变形叫做等量代换。它是下面六个等量公理之一：

- ① 等量加等量，和相等；
- ② 等量减等量，差相等；
- ③ 等量的同倍量相等；
- ④ 等量的同分量相等；
- ⑤ 一个量可以用它的等量来代替（等量代换）；
- ⑥ 全量等于各分量之和。

如何求角的度数

遇到计算角的度数的问题时，首先要对照图形，弄清题意，特别要明确已知的角与所求的角在位置、数量上的关系，然后再根据已学过的定义、性质进行推理、列式和计算。在初中几何《相交线、平行线》一章中常从以下三个方面进行考虑。

一、利用对顶角的性质

例1 已知：如图，直线 AB 、 CD 交于 O 点， $\angle 1:\angle 2 = 2:3$ ， $\angle AOC = 50^\circ$ 。

求： $\angle 2$ 的度数。

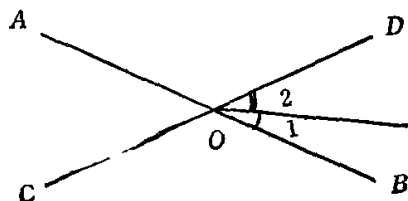
解： $\because$ 直线 AB 、 CD 相交于点 O ， $\angle AOC = 50^\circ$

$$\therefore \angle BOD = \angle AOC = 50^\circ$$

即 $\angle 1 + \angle 2 = 50^\circ$

又 $\because \angle 1:\angle 2 = 2:3$

$$\therefore \angle 1 = \frac{2}{3} \angle 2$$



$$\therefore \frac{2}{3} \angle 2 + \angle 2 = 50^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = 30^\circ$$

答： $\angle 2$ 的度数为 30° 。

说明：“对顶角相等”是证明两个角相等的重要定理之一，使用这一定理时，应注意根据对顶角的定义对有关角进行判定。

例2 已知：如图，直线 AB 、 CD 相交于 O 点， OE 平分 $\angle BOD$ ， $\angle AOE = 152^\circ$ 。

求： $\angle AOC$ 的度数。

解： $\because AOB$ 是直线

$$\therefore \angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AOE = 152^\circ$$

$$\therefore \angle BOE = 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$$

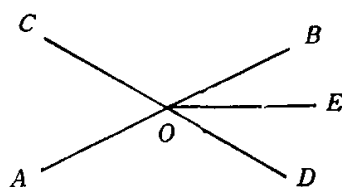
$\therefore OE$ 平分 $\angle BOD$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BOE = 2 \times 28^\circ = 56^\circ$$

$\therefore$ 直线 AB 、 CD 交于 O 点

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD = 56^\circ$$

答： $\angle AOC$ 的度数为 56° 。



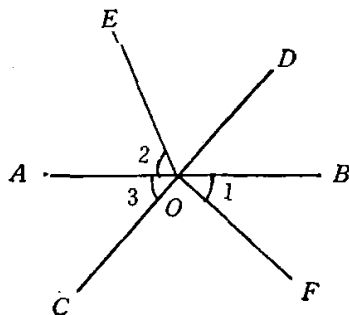
二、利用垂直的定义

例3 已知：如图，直线 AB 、 CD 相交于 O 点， OE 平分 $\angle AOD$ ， $FO \perp CD$ 于 O ， $\angle 1 = 40^\circ$ 。

求： $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的度数。

解： $\because FO \perp CD$ 于 O 点

$$\therefore \angle 1 + \angle BOD = 90^\circ$$



$$\because \angle 1 = 40^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = 50^\circ$$

又 $\because OE$ 平分 $\angle AOD$

$$\therefore 2\angle 2 = \angle AOD$$

$\because AOB$ 是直线

$$\therefore 2\angle 2 + \angle BOD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = 65^\circ$$

$\because$ 直线 AB 、 CD 相交于 O

$$\therefore \angle 3 = \angle BOD = 50^\circ$$

答： $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的度数分别为 65° 、 50° 。

说明：根据垂直的定义可知，若两直线的夹角为直角，则两直线互相垂直；反之，若两直线互相垂直，则这两直线的夹角为直角。

三、利用平行线的判定和性质

例 4 已知：如图， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = 120^\circ$ 。

求： $\angle 4$ 的度数。

解： $\because \angle 1 = \angle 2$ （已知）

又 $\because \angle 2 = \angle 5$ （对顶角相等）

$$\therefore \angle 1 = \angle 5$$
（等量代换）

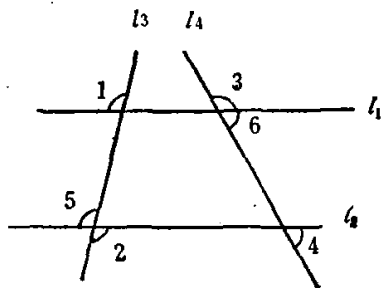
$\therefore l_1 \parallel l_2$ （同位角相等，两直线平行）

$\therefore \angle 4 = \angle 6$ （两直线平行，同位角相等）

$$\because \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$$
（平角定义）

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$
（等量代换）

又 $\because \angle 3 = 120^\circ$



$$\therefore \angle 4 = 60^\circ$$

答： $\angle 4$ 的度数为 60° 。

说明：应用平行线的判定和性质时应注意不要混淆，正确区别它们的关键是要弄清判定和性质的条件和结论，平行线的判定是由“角的相等或互补”推出“两直线平行”，平行线的性质是由“两直线平行”推出“角的相等或互补”。

例5 已知：如图， $\angle C + \angle DEC = 180^\circ$ ， $\angle 1 = 25^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ 。

求： $\angle 3$ 和 $\angle BDE$ 的度数。

解： $\because \angle C + \angle DEC = 180^\circ$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ 。

$\therefore \angle 3 = \angle 1$ ，

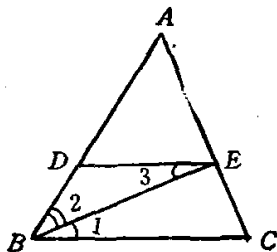
$\angle BDE + \angle ABC = 180^\circ$ 。

$\because \angle 1 = 25^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 25^\circ$ ， $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = 65^\circ$ 。

$\therefore \angle BDE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ 。

答： $\angle 3$ 和 $\angle BDE$ 的度数分别为 25° 、 115° 。



说明：在比较复杂的图形中，首先结合图形迅速、准确地判断出同位角、内错角或同旁内角，是正确、熟练运用平行线判定和性质的前提。

推理的方法与技巧

每一个几何命题的正确性，都是借助于推理进行论证