初中几何解题方法与技巧

刘乐魁　郭永宝　陈士环　编著

山　东　教　育　出　版　社

初中几何解题方法与技巧

刘乐魁　郭永宝　陈士环　编著

山东教育出版社

1992・济南

鲁新登字2号

初中几何解题方法与技巧

刘乐魁　郭永宝　陈士环　编著

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　12.875印张　273千字

1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷

印数 1—2,400

ISBN 7—5328—1360—6/G·1161

定价 3.55元

前　　言

本书结合现行初中《几何》课本的内容，通过对典型例题的分析、解答和评注，对课本中各章基础知识的运用、解题的方法和技巧以及题目之间的内在联系作了详细的论述，同时尽量发掘一题多解，注重渗透现代数学的思维方法，启迪学生的创造性思维。

本书是在编者多年教学实践的基础上，从初中生的实际水平出发而编写的。在编写过程中，力求科学性、实用性、启发性与可读性的统一，使读者从中可以得到启发，提高运用几何知识解决数学问题的能力，进而起到开阔思路，举一反三的作用，收到事半功倍的效果。

本书主要供初中生学习平面几何时使用，也可供教师在教学中参考。

本书内容是按照初中《几何》课本的顺序编写的，其中郭永宝同志编写有关《几何》第一册的内容；刘乐魁、陈士环同志编写有关《几何》第二册的内容。对于书中的错误和缺点，欢迎广大读者给予批评指正。

编　者

1991. 10

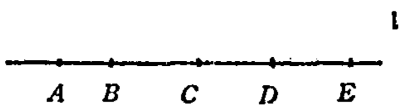
目　　录

巧用概念解题

在平面几何中将要学习大量的概念。概念是解题的基础，是推理论证的依据。每一几何概念的符号语言往往有多种表达形式，而概念则起着判断和性质的双重作用。因此，要学会灵活地运用概念，巧妙地进行解题。下面针对几何第一章《基本概念》中几种常见类型的题目试举几例，说明如何巧用概念解题。

一、直接利用定义进行判断

例1　如图，在直线l上有A、B、C、D、E五个点，



试问：(1) 直线 l 上有多少条射线？

(2) 直线 l 上有多少条线段？并写出它们的名称。

解：(1) 首先应明确射线的定义，“直线上某一点一旁的部分叫做射线，这个点叫做射线的端点”。根据这一定义可知，每一点分直线为两条射线，直线l上有 5 个点，所以共有10条射线。

(2) 根据线段定义，直线上任意两点间的部分就是一条线段，因而直线l上共有10条线段，它们是线段 AB、AC、AD、AE、BC、BD、BE、CD、CE、DE。

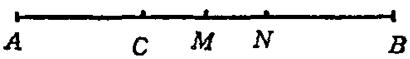
说明：识别图形中线段的条数，关键是要抓住端点，从

一端点字母开始，按照图中字母的顺序依次进行，只有这样才能保证既无遗漏，也不会重复。

二、计算线段的长

例 2　已知：如图，C是线段AB上一点，$AC<CB$，M、N分别为AB、CB的中点，$AC=6\text{cm}$，$NB=4\text{cm}$。

求：线段MN的长。



解：$\because$　N是CB的中点，$NB=4\text{cm}$

$\therefore$　$CB=2NB=8\text{cm}$

$\because$　$AC=6\text{cm}$

$\therefore$　$AB=AC+CB=6+8=14$（cm）

$\because$　M是AB中点

$\therefore$　$MB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 14=7$（cm）

$\therefore$　$MN=MB-NB=7-4=3$（cm）

答：线段MN的长为 3 cm。

说明：(1) 本题应用了线段的和、差意义及线段中点的概念。

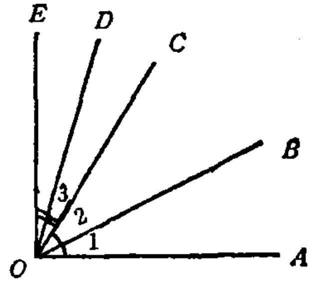
(2) M是AB的中点，可表示为$AM=MB$，或$AM=MB=\frac{1}{2}AB$，或$AB=2AM=2MB$，应用时选用哪一种表示方法要根据具体情况而定。

三、求角的大小

例 3　已知：如图，$\angle AOE$是直角，OB平分$\angle AOC$，

OD平分$\angle COE$，$\angle 1=25°$。

求：$\angle 3$的度数。



解：∵ OB平分$\angle AOC$，

$\angle 1=25°$

∴ $\angle AOC=2\angle 1=50°$

∵ $\angle AOE$是直角

∴ $\angle AOE=90°$

∴ $\angle COE=\angle AOE-\angle AOC=40°$

∵ OD平分$\angle COE$

∴ $\angle 3=\frac{1}{2}\angle COE=\frac{1}{2}\times 40°=20°$

答：$\angle 3$为$20°$。

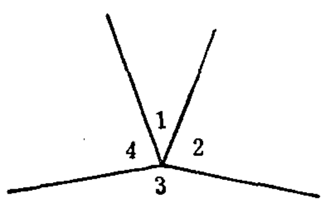
说明：(1) 解本题的关键在于正确运用角平分线的概念和直角的概念。

(2) 根据已知，OB是$\angle AOC$的平分线，可表示为$\angle AOB=\angle BOC$，或$\angle AOB=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，或$\angle AOC=2\angle AOB=2\angle BOC$，应用时选用哪一种表示方法仍要根据具体情况而定。

例 4　已知：如图，$\angle 1:\angle 2:\angle 3=1:2:4$，$\angle 4=80°$。

求：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$的度数。

解：设$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$的度数分别为x、$2x$、$4x$，



∵ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$，

$\angle 4=80°$

∴ $x+2x+4x+80=360$

解得　$x=40$

$\therefore\quad 2x=80$，$4x=160$。

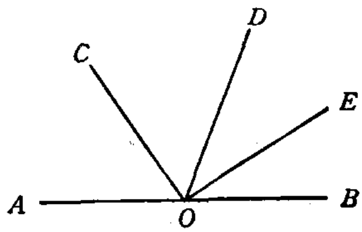
答：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$分别为$40°$、$80°$、$160°$。

说明：（1）解本题的关键在于正确运用周角的概念，充分利用周角为$360°$为解题创造条件。

（2）在明确了角的有关概念的前提下，通过列方程或方程组求出未知角的度数，是一种有效的方法。

例 5　已知：如图，AOB是一条直线，OC、OE分别是$\angle AOD$和$\angle BOD$的平分线。

求：$\angle COE$的度数。



解：$\because\quad OC$平分$\angle AOD$

$\therefore\quad \angle COD=\frac{1}{2}\angle AOD$

$\because\quad OE$平分$\angle BOD$

$\therefore\quad \angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOD$

$$\therefore\quad \angle COE=\frac{1}{2}\angle AOD+\frac{1}{2}\angle BOD$$

$$=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle BOD)$$

$$=\frac{1}{2}\angle AOB$$

$\because\quad AOB$是一直线

$\therefore\quad \angle AOB=180°$

$\therefore\quad \angle COE=\frac{1}{2}\times 180°=90°$

答：$\angle COE$的度数为$90°$。

说明：在直线上取一点，这时的图形可看作是由有公共端点的两条射线组成的，根据平角的定义，这是一个平角，平角的度数为180°，解题的时候应注意应用。

例 6　已知：$\angle\alpha$ 的补角是 $\angle\beta$ 余角的 3 倍，且 $\angle\alpha=\frac{3}{2}\angle\beta$。

求：$\angle\alpha$和$\angle\beta$的度数。

解：$\angle\alpha$的补角为$180^\circ-\angle\alpha$，$\angle\beta$的余角为$90^\circ-\angle\beta$，根据题意得：

$$\begin{cases}180^\circ-\angle\alpha=3(90^\circ-\angle\beta) & ①\\ \angle\alpha=\frac{3}{2}\angle\beta & ②\end{cases}$$

将②式代入①式，得

$$180^\circ-\frac{3}{2}\angle\beta=270^\circ-3\angle\beta \qquad ③$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}\angle\beta=90^\circ$$

$$\therefore\quad \angle\beta=60^\circ$$

$$\therefore\quad \angle\alpha=\frac{3}{2}\angle\beta=\frac{3}{2}\times60^\circ=90^\circ$$

答：$\angle\alpha$、$\angle\beta$的度数分别为60°、90°。

说明：(1) 解决本例的关键在于正确地运用余角、补角的概念，并能根据题意列出方程组。

(2) 在上面的推理过程中，由①式变到③式是将①式中的$\angle\alpha$用它相等的量$\frac{3}{2}\angle\beta$来代替的，这种变形叫做等量代换。它是下面六个等量公理之一：

① 等量加等量，和相等；
② 等量减等量，差相等；
③ 等量的同倍量相等；
④ 等量的同分量相等；
⑤ 一个量可以用它的等量来代替（等量代换）；
⑥ 全量等于各分量之和。

如何求角的度数

遇到计算角的度数的问题时，首先要对照图形，弄清题意，特别要明确已知的角与所求的角在位置、数量上的关系，然后再根据已学过的定义、性质进行推理、列式和计算。在初中几何《相交线、平行线》一章中常从以下三个方面进行考虑。

一、利用对顶角的性质

例1 已知：如图，直线 AB、CD 交于 O 点，$\angle 1:\angle 2=2:3$，$\angle AOC=50^\circ$。

求：$\angle 2$的度数。

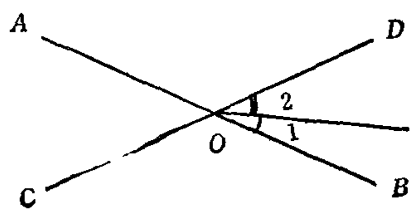
解：$\because$ 直线AB、CD相交于点O，$\angle AOC=50^\circ$

$\therefore$ $\angle BOD=\angle AOC=50^\circ$

即 $\angle 1+\angle 2=50^\circ$

又 $\because$ $\angle 1:\angle 2=2:3$

$\therefore$ $\angle 1=\frac{2}{3}\angle 2$



$\therefore\quad \frac{2}{3}\angle 2+\angle 2=50^\circ$

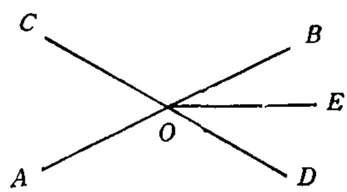
$\therefore\quad \angle 2=30^\circ$

答：$\angle 2$的度数为30°。

说明："对顶角相等"是证明两个角相等的重要定理之一，使用这一定理时，应注意根据对顶角的定义对有关角进行判定。

例 2　已知：如图，直线AB、CD相交于O点，OE平分$\angle BOD$，$\angle AOE=152^\circ$。

求：$\angle AOC$的度数。



解：$\because\quad AOB$是直线

$\therefore\quad \angle AOE+\angle BOE=180^\circ$

$\because\quad \angle AOE=152^\circ$

$\therefore\quad \angle BOE=180^\circ-152^\circ=28^\circ$

$\because\quad OE$平分$\angle BOD$

$\therefore\quad \angle BOD=2\angle BOE=2\times 28^\circ=56^\circ$

$\because$　直线AB、CD交于O点

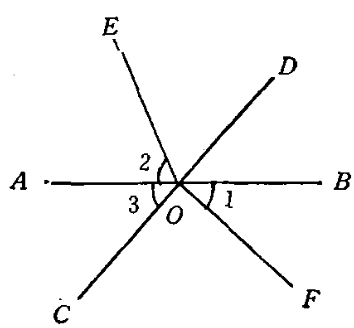
$\therefore\quad \angle AOC=\angle BOD=56^\circ$

答：$\angle AOC$的度数为56°。

二、利用垂直的定义

例 3　已知：如图，直线AB、CD相交于O点，OE平分$\angle AOD$，$FO\perp CD$于O，$\angle 1=40^\circ$。

求：$\angle 2$和$\angle 3$的度数。



解：$\because\quad FO\perp CD$于O点

$\therefore\quad \angle 1+\angle BOD=90^\circ$

$\because$ $\angle 1 = 40°$

$\therefore$ $\angle BOD = 50°$

又 $\because$ OE平分$\angle AOD$

$\therefore$ $2\angle 2 = \angle AOD$

$\because$ AOB是直线

$\therefore$ $2\angle 2 + \angle BOD = 180°$

$\therefore$ $\angle 2 = 65°$

$\because$ 直线AB、CD相交于O

$\therefore$ $\angle 3 = \angle BOD = 50°$

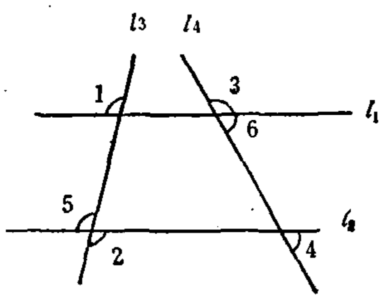
答：$\angle 2$和$\angle 3$的度数分别为65°、50°。

说明：根据垂直的定义可知，若两直线的夹角为直角，则两直线互相垂直；反之，若两直线互相垂直，则这两直线的夹角为直角。

三、利用平行线的判定和性质

例 4　已知：如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = 120°$。

求：$\angle 4$的度数。



解：$\because$ $\angle 1 = \angle 2$（已知）

又 $\because$ $\angle 2 = \angle 5$（对顶角相等）

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 5$（等量代换）

$\therefore$ $l_1 \parallel l_2$（同位角相等，两直线平行）

$\therefore$ $\angle 4 = \angle 6$（两直线平行，同位角相等）

$\because$ $\angle 3 + \angle 6 = 180°$（平角定义）

$\therefore$ $\angle 3 + \angle 4 = 180°$（等量代换）

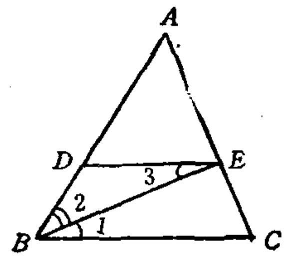
又 $\because$ $\angle 3 = 120°$

∴　$\angle 4=60^\circ$

答：$\angle 4$的度数为60°。

说明：应用平行线的判定和性质时应注意不要混淆，正确区别它们的关键是要弄清判定和性质的条件和结论，平行线的判定是由“角的相等或互补”推出“两直线平行”；平行线的性质是由“两直线平行”推出“角的相等或互补”。

例 5　已知：如图，$\angle C+\angle DEC=180^\circ$，$\angle 1=25^\circ$，$\angle 2=40^\circ$。



求：$\angle 3$和$\angle BDE$的度数。

解：∵　$\angle C+\angle DEC=180^\circ$，

∴　$DE \parallel BC$。

∴　$\angle 3=\angle 1$，

$\angle BDE+\angle ABC=180^\circ$。

∵　$\angle 1=25^\circ$，$\angle 2=40^\circ$，

∴　$\angle 3=25^\circ$，$\angle ABC=\angle 1+\angle 2=65^\circ$。

∴　$\angle BDE=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-65^\circ=115^\circ$。

答：$\angle 3$和$\angle BDE$的度数分别为25°、115°。

说明：在比较复杂的图形中，首先结合图形迅速、准确地判断出同位角、内错角或同旁内角，是正确、熟练运用平行线判定和性质的前提。

推理的方法与技巧

每一个几何命题的正确性，都是借助于推理进行论证