普通高等教育"十一五"规划教材

21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

高等数学
多元微积分学

李书刚 刘汉平 方华强 编

科学出版社

普通高等教育“十一五”规划教材
21 世纪大学数学创新教材
丛书主编　陈　化

高等数学
多元微积分学

李书刚　刘汉平　方华强　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据"高等数学教学基本要求"，由作者们多年来讲授高等数学课程的讲义整理编写而成的. 全书共分 7 章，分别为向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程、数学实验.

本书可作为高等学校教材，也可供考研复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 多元微积分学/李书刚，刘汉平，方华强编. 一北京：科学出版社，2011.3

普通高等教育"十一五"规划教材. 21 世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-030256-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②刘… ③方… Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教材 ②微积分一高等学校一教材 Ⅳ. ①O13 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 021769 号

责任编辑：杨瑰玉 冯桂层/责任校对：王望容

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011 年 2 月第一次印刷 印张：12 3/4

印数：1—5 000 字数：243 000

定价：22.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学创新教材》
丛书编委会

《21世纪大学数学创新教材》丛书序

《21世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21世纪大学数学创新教材》丛书由多所985和211大学联合组编：

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进. 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新. 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

教学实践创新. 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新. 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新须转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

（1）恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学软件的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇,章末列出中文小结,布置若干道(少量)英文习题,并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题,并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性,注重强化学生的实验训练和实际动手能力,加强内容的实用性,注重案例分析,提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态,学科发展前沿,先进理念、知识和方法,如何引入教材;知识和内容创新闪光点及其编写方法;教学实践创新的具体操作;创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命,保持和发扬科学出版社"三高"、"三严"的传统特色,创出品牌;适用性是教材的生命力所在,应明确读者对象,篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21 世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009 年 6 月

前　　言

本教材是为大学一年级学生继续学习微积分的多元函数部分而编写的。内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程、数学实验等七章。

教材的编写充分考虑了高等数学教学的需要，与《高等数学——一元微积分学》配合使用效果很好．增加了数学实验，对培养学生的动手能力十分有益．本书内容安排十分合理，便于自学，也可作为考研复习用书．

本教材的编写与出版得到了华中师范大学数学与统计学学院领导的亲切指导与大力支持，公共数学教研室的教师们积极参与了本教材的内容讨论与编写工作．具体执笔的是刘汉平（负责第 1～3 章）、方华强（负责第 4～6 章）、李书刚（负责第 7 章），全书由李书刚统稿．

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大师生批评指正．

编者

2010 年 12 月

目　　录

第1章

向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数方法来研究空间几何问题的. 我们通过在空间建立直角坐标系,使得空间的点和三个有序数之间建立一一对应关系,这样就可以把空间的图形和方程对应起来. 空间解析几何的知识对于我们将要学习的多元函数的微积分来说是不可缺少的.

本章先介绍向量代数,然后用向量代数作工具研究平面与空间直线,最后讨论二次曲面.

1.1　向量及其线性运算

1. 向量概念

在物理学中我们所遇到的量,可以分为两类. 其中一类可以用数值来决定,如质量、温度、密度、时间等都属于这一类,叫做**数量**. 另一类的量,只知道它们的数值大小是不够的,还需要说明它们的方向,例如力、速度、加速度等就属于这一类量,叫做**向量**.

我们通常用一条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量,点 A 称为向量的起点,点 B 称为向量的终点,线段 AB 的长度表示向量的大小,称为**向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模**,记作 $|\overrightarrow{AB}|$,从起点 A 到终点 B 的方向表示**向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向**(图 1-1).

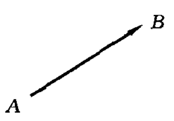

图 1-1

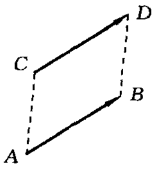

图 1-2

为简便起见,常用一个黑体字母表示向量,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等等.

模等于零的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点是重合的,它的方向可以看做是任意的. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**.

在数学中,我们把长度相等且方向相同的向量叫做是**相等**的. 因此,向量 $\overrightarrow{AB}$ 等于由它经过平行移动而得到的一切向量. 即向量由它的长度和方向完全确定,而起点的位置可以任意选择. 如图 1-2 所示,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 这样的向量称为**自由向量**.

2. 向量的线性运算

1）向量的加减法

如图 1-3 所示，设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A 作为向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$. 再以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 加向量 $\boldsymbol{b}$ 构成向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的这种作图法，叫做向量相加的**三角形法则**.

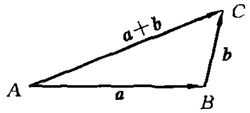

图 1-3

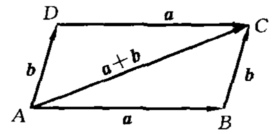

图 1-4

以 A 为起点作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$（图 1-4），以 AB，AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$，容易看出，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，像这样作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方法，叫做向量相加的**平行四边形法则**.

向量的加法满足下列运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

事实上，由图 1-4 可以看出

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

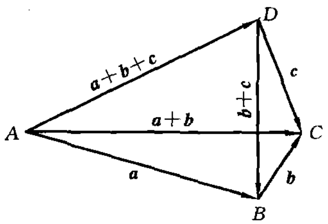

图 1-5

所以满足交换律. 又如图 1-5 所示，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

这就表明：向量的加法满足结合律.

由于向量的加法满足交换律和结合律，因此 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的法则是：总是以前一个向量的终点作为后一个向量的起点，于是它们作成一条折线，以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作成的向量就是向量 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

对于向量 $\boldsymbol{a}$，称与它的模相同而方向相反的向量为它的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由三角形法则，可得

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

在这里，我们规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

2）向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的**乘积**是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$：

（1）当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{a}|$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

（2）当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

（3）当 $\lambda = 0$ 时，$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，即 $0\boldsymbol{a}$ 为零向量.

由这个定义得到

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \quad (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积满足下列运算规律：

（1）分配律　$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$；

（3）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

向量相加及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

如果两个非零向量方向相同或者相反，就称这两个向量**平行**. 互相平行的向量叫**共线向量**，共线向量经过平行移动，它们就会落在同一直线上，因此可以用落在一条直线上的向量来表示. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量，那么每一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量 $\boldsymbol{b}$ 都可以表示成数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积：$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，其中 $\lambda = \pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取正号，反向时取负号.

空间里平行于同一平面的向量叫**共面向量**. 它们可以用落在一个平面上的向量来表示. 设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面，而向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 来表示. 事实上，将它们的起点移到同一点 A，过向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点分别作平行于向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的直线，并设分别交向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 所在直线于 B, C 两点（图 1-6），则一定存在实数 λ, μ，使得

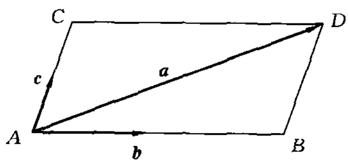

图 1-6

$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}.$$

3. 空间直角坐标系

在空间里取交于原点 O 且两两互相垂直的坐标轴 Ox，Oy，Oz，分别叫做 **x 轴（横轴）**、**y 轴（纵轴）**、**z 轴（竖轴）**，它们组成空间直角坐标系，它们的交点 O 叫**坐标原点**. 通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，而 z 轴则是铅垂线. 三个坐标轴的正向通常符合右手法则，如图 1-7 所示，将右手拇指、食指和中指两两互相垂直地伸开，并用拇指和食指分别指向 x 轴和 y 轴的方向，则中指指向 z 轴的方向.

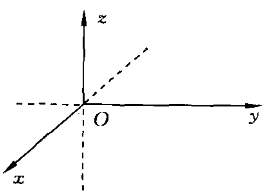

图 1-7

由 x 轴和 y 轴、y 轴和 z 轴、z 轴和 x 轴组成的平面叫做**坐标平面**，分别叫做 $\boldsymbol{xOy}$ **面**、$\boldsymbol{yOz}$ **面**、$\boldsymbol{zOx}$ 面. 三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限叫做**第一卦限**，其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向旋转而确定. 第五至第八卦限在 xOy 面的下方，第一卦限之下为第五卦限，第二卦限之下为第六卦限，依此类推. 这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示(图 1-8).

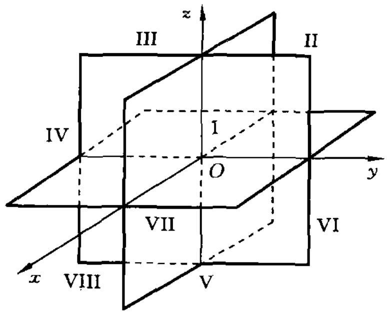

图 1-8

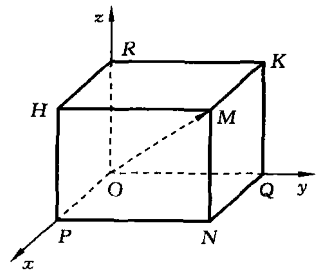

图 1-9

设向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是与 x 轴、y 轴、z 轴正向同向的三个单位向量. 任意给定向量 $\boldsymbol{r}$，由于向量可以平行移动，我们可以把向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点移到坐标原点 O，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 如图 1-9 所示，以 OM 为对角线，三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK\text{-}OPNQ$，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，代入上式得

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标表示式**. $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

由上面的分析可以看出，给定一个向量 $\boldsymbol{r}$ 就能唯一确定点 M，同时也能唯一确定三个有序实数 x,y,z. 反之，给定三个有序数，按上面的方法，也能唯一确定一个点 M 和向量 $\boldsymbol{r}$. 因此我们可以定义这三个有序数 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x,y,z 也称为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$.

由此，我们得到

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 一个点与该点的向径有着相同的坐标.

下面我们给出一些特殊点的坐标. 坐标原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$；y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$；xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$；yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$；zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

4. 利用坐标作向量的线性运算

定理 1-1　设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\lambda$ 为常数，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).$$

证　由向量的运算法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\boldsymbol{i}\pm x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}\pm y_2\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k}\pm z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

推论　两向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 平行的充要条件是它们的对应坐标成比例，即

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

证　向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，这样就有

$$x_2=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda y_1,\quad z_2=\lambda z_1.$$

所以

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

例 1-1　设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3,2)$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解　
$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=2(1,-1,2)+(-2,3,2)\\&=(2,-2,4)+(-2,3,2)\\&=(0,1,6).\end{aligned}$$

例 1-2　在点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 的连线上求一点 M，使

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB},$$

其中实数 $\lambda\neq-1$.

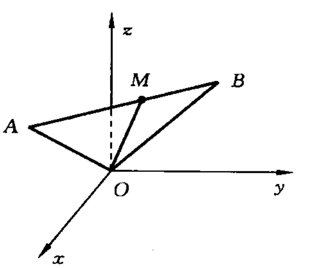

图 1-10

解　如图 1-10 所示，设点 M 的坐标为 (x,y,z)，由于

$$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1),\quad\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2),$$
$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

所以

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

由已知,得

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

比较式子两边,得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地,当 $\lambda=1$ 时,得线段 AB 的中点为

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

5. 向量的模、方向角、投影

1) 向量的模与两点间的距离公式

如图 1-9 所示,有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$
$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}.$$

因为

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

所以

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,\quad |\overrightarrow{OQ}|=|y|,\quad |\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这就是向量模的坐标表示式.

设有两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$,由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\end{aligned}$$

所以

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是两点间的距离公式.

例 1-3 求 $A(3,2,-4)$ 和 $B(0,-2,-1)$ 间的距离.

解 $|AB|=\sqrt{(0-3)^2+(-2-2)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{34}.$

2）方向角与方向余弦

我们先来定义两个向量的夹角. 设有两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=\varphi$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**（图 1-11），这里规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，$\varphi=0$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时，$\varphi=\pi$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

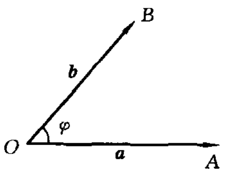

图 1-11

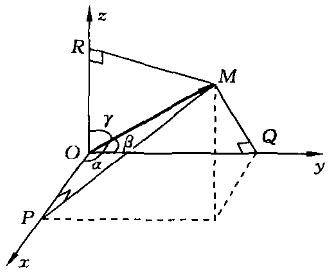

图 1-12

设非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个坐标轴正向的夹角为 α,β,γ，且规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$（图 1-12），则称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**，它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向可用它的方向角或方向余弦来表示.

设向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，则有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

这就是说，任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

由于

$$\begin{aligned}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)&=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\\&=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\boldsymbol{e}_r,\end{aligned}$$

所以非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦就是向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$ 的坐标.

例 1-4　已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 和 $M_2(4,2,-1)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模与方向余弦.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(4-1,2-(-2),-1-3)=(3,4,-4)$，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{41},$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{41}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},\quad \cos\gamma=-\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

3）向量在有向直线上的投影

设 A 为空间一点，l 为有向直线，过 A 点作有向直线 l 的垂直平面交 l 于点 A'，称点 A' 为**点 A 在有向直线 l 上的投影**（图 1-13）. 设 $\overrightarrow{AB}$ 为已知向量，向量的起点 A 和终点 B 在有向直线 l 上的投影分别为点 A' 与点 B'（图 1-14），称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在有向直线 l 上的分向量. 设与向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，且 $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为**向量 $\overrightarrow{AB}$ 在有向直线 l 上的投影**. 记作

$$\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB}.$$

按照定义，向量在有向直线上的投影是一个数量，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 x,y,z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影.

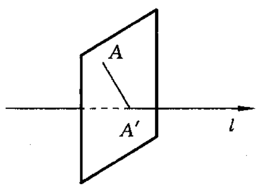

图 1-13

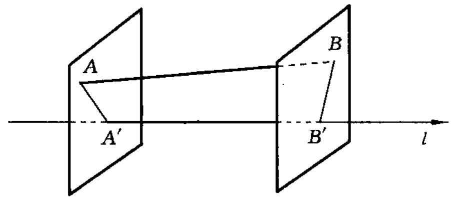

图 1-14

定理 1-2（投影定理）　设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与有向直线 l 的夹角为 φ，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在有向直线 l 上的投影等于向量的模乘以夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

定理证明略去.

习　题　1.1

1. 三个坐标平面将空间分成八个卦限，试确定每个卦限内点的坐标的符号.
2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
3. 求点 (a,b,c) 分别关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.
4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,7,5)$，它的终点是 $(0,4,2)$，求它的起点.
6. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 同向的单位向量.
7. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.
8. 用向量方法证明三角形两边中点连线平行于第三边，且其长等于第三边的一半.
9. 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.