高职高专系列教材

河南科学技术出版社

高职高专教育“十二五”规划教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

●马守富　主编

河南科学技术出版社

策划编辑　马国宝
责任编辑　宋海波　马国宝
责任校对　柯　姣
封面设计　张　伟
责任印制　张艳芳

ISBN 978-7-5349-4579-3
9 787534 945793 >
定价：39.80 元

高职高专教育“十二五”规划教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

马守富　主编

河南科学技术出版社
·郑州·

内 容 提 要

本书是根据教育部最新制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并结合编者多年的教学实践编写而成.内容包括：预备知识（函数）、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、线性代数初步和符号计算系统Mathematica及其应用，共十二章.全书每节都配有习题，每章都配有自测题.

本书可作为高职高专院校高等数学课程的教材，也可供成人教育学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学/马守富主编.—郑州：河南科学技术出版社，2010.7
（高职高专教育"十二五"规划教材）
ISBN 978-7-5349-4579-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①马… Ⅲ.①应用数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第111176号

出版发行：河南科学技术出版社

地址：郑州市经五路66号　邮编：450002

电话：（0371）65737028　65788613

网址：www.hnstp.cn

策划编辑：马国宝

责任编辑：宋海波　马国宝

责任校对：柯　姣

封面设计：张　伟

责任印制：张艳芳

印　　刷：河南省瑞光印务股份有限公司

经　　销：全国新华书店

幅面尺寸：185mm×260mm　**印张**：25.25　**字数**：580千字

版　　次：2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷

定　　价：39.80元

《高等应用数学》编委会

主　编　马守富

副主编　马立军　张赞献

编　委　（按姓氏笔画排序）

马立军　马守富　刘素丽

张赞献　陈　勇　翁育兵

郭计敏　葛培运　魏振方

前　言

本书是按照新形势下高职高专教育高等数学教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的. 本书具有以下特色：

1. 编写时依据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，本着实用和理论够用的原则，在保持数学学科特点的基础上，考虑到高职高专教育的特殊性，对教学内容进行了精选，淡化理论性和系统性，强化针对性和实用性，使学生能运用所学数学知识求解实际问题.

2. 吸取了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年我国出版的一批教材的成功经验，因此，具有更强的实用性. 书中概念的引入尽可能从实际背景入手，在讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，考虑到学生接受能力、教学学时等实际情况，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求掌握过分复杂的计算和证明.

3. 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，注重学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行了适当的归纳.

4. 节后习题的配备类型合理，深度和广度适中.

5. 既考虑到一般理工类专业对高等数学的需要，也兼顾到经济类专业的特点，因此，也可适用于经济类专业. 书中注有“*”号的内容可供不同专业、不同学时要求使用时选用.

6. 鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的能力，我们在第十二章介绍了符号计算系统 Mathematica 及其应用，使学生不但会手算，还会用计算机计算与绘图.

本书由马守富担任主编并负责统稿，马立军、张赞献担任副主编. 参编人员为马立军(第一章、第九章)，翁育兵(第二章)，魏振方(第三章的第一、二、三、四节，第十二章的第二节及自测题十二)，郭计敏(第三章的第五节及自测题三、第七章)，马守富(第四章、第十章)，张赞献(第五章、第八章)，陈勇(第六章)，葛培运(第十一章)，刘素丽(第十二章的第一节).

本书在编写的过程中，参考和借鉴了大量的文献资料和部分最新科研成果，得到了相关领导的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意.

限于时间和水平，书中难免有不足之处，敬请斧正.

编　者

2010 年 6 月

目　录

第一章　预备知识

§1.1　函数的概念

函数是人类从事自然和社会科学研究过程中普遍使用的数学概念之一，它是数学的基础概念. 在中小学阶段，我们对函数概念已经有所认识，因为贯穿于中学《代数》的一条主线就是函数. 近年来，在社会科学方面，由于有一些学科向着定量化的方向发展，函数概念也已广泛地应用到这些学科之中，因此函数在应用上已超过了数学的范围.

高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程，为此要求读者对函数要有正确、清晰的认识. 中学讲的函数知识还不能满足学习高等数学的需要，本章一方面要复习中学已学过的函数概念和某些函数的性质，另一方面对函数的有关知识也将作些必要的补充.

一、常量、变量与常用数集

现实世界中的事物往往表现为各种形式的量. 其中有的量，取定适当的单位后，在考察的过程中可用固定的数值来表示，这种量称为**常量**. 还有一些量，在考察的过程中可取不同的数值，这种量称为**变量**. 通常用 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z,t 等表示变量.

如一架飞机在飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度是一个变量.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，数集是表示变量取值范围的常用方法.

在本书中，变量总是在实数范围内讨论. 常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}_+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还有各种类型的区间. 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$.

开区间：$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\,|\,a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间：$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$；

右半开区间：$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间： $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$；$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$；

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$；

此外，为了讨论函数在一点邻近区域的某些性态，引入点的邻域概念.

定义 1.1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集$\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为**点 a 的 δ 邻域**，记做$U(a,\delta)$，如图 1－1(a)，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用$U(a)$表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记做$\overset{0}{U}(a,\delta)$，如图 1－1(b).

图 1－1

显然，$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\overset{0}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

定义 1.2 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系（如 f）有唯一确定的实数与之对应[记做 $f(x)$]，则称 $y=f(x)$是定义在 D 上的**函数**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数 $y=f(x)$的**定义域**，数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的**值域**.

由定义 1.2 可见，两个函数只有当它们的对应关系相同、定义域也相同时才是同一个函数. 由于函数 $y=|x|$与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=2\lg x$ 与 $y=\lg(x^2)$的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$ 则是同一个函数. 再如 $x>y$，按照这个对应关系，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应. 而函数定义中的对应关系要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应. 因此不符合函数的定义，所以它不是函数关系.

对于具有实际意义的函数来说，函数的定义域要按题意来确定；对于抽象地用公式表达的函数，函数的定义域是指使公式有意义的自变量的一切取值.

例 1 某城市一年内各月份毛线的零售量（$\times$100kg）如下表所示：

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量(s)	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

上表表示一年内某城市毛线零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系. 它的定义域

$$D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 2 某河道的深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系如图1-2中曲线所示. 它的定义域是

$$D=[0,b].$$

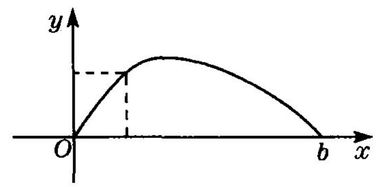

图 1-2

例 3 数学式

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

表明 y 是 x 的函数,如图 1-3 所示.

它的定义域是

$$D=(-\infty,+\infty).$$

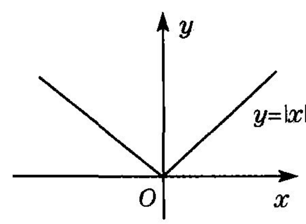

图 1-3

例 4 数学式

$$y=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

也表明 y 是 x 的函数,它的图像如图 1-4 所示.

它的定义域是

$$D=(-\infty,+\infty).$$

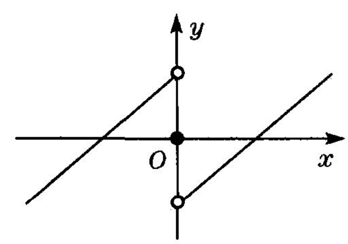

图 1-4

例 5 函数 $y=\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域 D 为满足不等式组 $\begin{cases}1+x>0,\\ x\neq 0\end{cases}$ 的 x 的解集,即

$$D=(-1,0)\cup(0,+\infty).$$

三、函数的表示法

表示函数，要把它的定义域和对应关系表述清楚. 一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有表格法、图示法和公式法(解析法).

(1)以表格形式表示函数的方法称为**函数的表格表示法**，如例 1 和数学用表中的函数都是用表格表示的.

(2)用图形表示函数的方法称为**函数的图示法**，如例 2 的函数就是用图示法表示的.

(3)用数学式表示函数的方法称为**函数的公式表示法**，也称为**解析法**. 如例 3、例 4、例 5 的函数都是用公式法表示的. 在高等数学中讨论的函数一般都用公式法表示.

例 3、例 4、例 5 的函数虽然都是用公式表示的，但它们又代表了不同的情形. 例 5 中的函数，定义域中任何一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示；而例 3、例 4 中的函数，定义域中某些不同部分的 x 相对应的 y 的表示式不同. 如果一个函数在定义域的不同区间上(个别的区间也可退缩为一点)对应关系分别用不同的解析式表示，则称这个函数为分段函数. 例 3、例 4 的函数都是分段函数，不过例 3 中的分段函数(又叫绝对值函数)可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$，即对应关系可化为一个式子.

必须注意：

1° 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在科技、工程等实际应用中经常用到分段函数；

2° 在求分段函数的函数值时，应先确定自变量的取值范围，再按相应的式子计算. 如例 4 中的函数，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-2)$. 因为 $2\in(0,+\infty)$，$0\in\{0\}$，$-2\in(-\infty,0)$，所以 $f(2)=1$，$f(0)=0$，$f(-2)=-1$.

四、常见的分段函数

1. 取整函数：$y=[x]$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，即若 $n\leqslant x<n+1$，则$[x]=n$(n 为整数). 因此其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

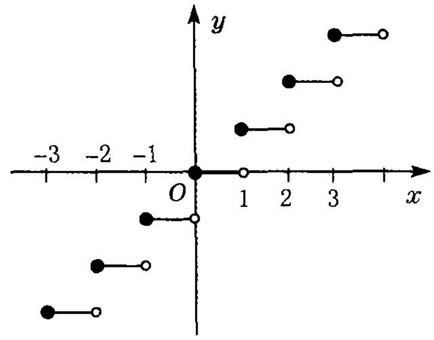

图 1-5

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数(图 1-5).

2. 符号函数：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$(图 1-6). 我们有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

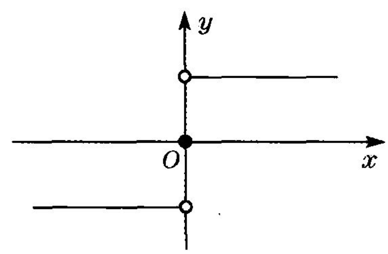

图 1-6

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0,\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ 可以记为

$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn} x$.

又如，$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

这里 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用，因此称为符号函数.

3. 狄利克莱函数：$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$

五、函数的几种特性

为叙述上的方便，我们先介绍几个常用的逻辑符号：

符号	$\forall$	$\exists$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
意义	任意	存在	推出	等价或充要条件

设函数 $f(x)$的定义域为 D，函数有以下性质.

1. 有界性

设区间 $I\subset D$，如果函数 $f(x)$在 I 上的值域 A 有上界(或有下界、有界)，则称函数 **$f(x)$在区间 I 上有上界(或有下界、有界)，否则称函数 $f(x)$在区间 I 上无上界(或无下界、无界).**

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界和无上界，有下界和无下界，有界和无界，我们用逻辑符号列表对比如下：

函数 $f(x)$ 在 I 上有上界	$\exists A\in\mathbf{R}, \forall x\in I \Rightarrow f(x)\leqslant A$（或 $<A$）
函数 $f(x)$ 在 I 上无上界	$\forall A\in\mathbf{R}, \exists x_0\in I \Rightarrow f(x_0)>A$
函数 $f(x)$ 在 I 上有下界	$\exists B\in\mathbf{R}, \forall x\in I \Rightarrow f(x)\geqslant B$（或 $>B$）
函数 $f(x)$ 在 I 上无下界	$\forall B\in\mathbf{R}, \exists x_0\in I \Rightarrow f(x_0)<B$
函数 $f(x)$ 在 I 上有界	$\exists M>0, \forall x\in I \Rightarrow \lvert f(x)\rvert\leqslant M$
函数 $f(x)$ 在 I 上无界	$\forall M>0, \exists x_0\in I \Rightarrow \lvert f(x_0)\rvert>M$

显然，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow$ 存在闭区间 $[-M,M]\ (M>0)$，使

$$\{f(x)\mid x\in I\}\subset[-M,M]$$

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是：存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$，函数 $y=f(x)$ 的图像位于以这两条直线为边界的带形区域之内. 如图 1－7 所示.

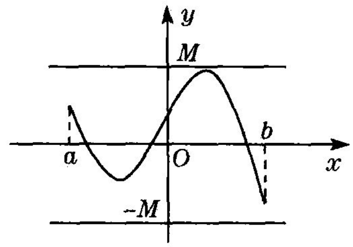

图 1－7

如果 $f(x)$ 在定义域 D 上有界，则称 $f(x)$ 为**有界函数**. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，但它在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

2. 单调性

设区间 $I\subset D$，如果对 $\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad [\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)],$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少），此时 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增（或减）区间[有时简称为增（或减）区间].

如果将上述不等式改为 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格增加（或严格减少）.

严格增加和严格减少统称为**严格单调**. 严格增加、严格减少、单调增加、单调减少统称为**单调**. 增区间和减区间统称为**单调区间**. 在区间 I 上单调（严格）增加或单调（严格）减少的函数统称为**区间 I 上的单调函数**. 从几何直观上看，区间 I 上单调增加（减少）的函数，其图像自左向右是上升（下降）的. 在定义区间上单调（严格）增加或单调（严格）减少的函数统称为**单调函数**.