矢量和张量分析
及其在流体力学中的应用

张中钦　鲁守华

北京航空学院四〇三教研室

一九八三年一月

定价：1.21元

前　　言

这是一門入門性質的課程，是为已初步具备液体和气体力学方面的知识而又想进一步深入钻研的同学們准备的。由于矢量和張量运算具有概念清楚，形式簡洁，书写簡略，运算簡明，坐标灵活，适应性强等优点，它在許多有关液体和气体力学的专門著作和文献中得到了广泛应用。这种情况对于不甚熟悉矢量和張量运算的同学来说，数学问题常常成为学习中的一个障碍，致使相当多的同学在攀登科学高峰的过程中半途而廢，实在令人婉惜。

为了帮助同学克服上述障碍，本課程比較系統地介紹了矢量和張量的概念、矢量和張量的运算规則，以及在流体力学中的某些应用。一般说来矢量的概念很容易建立，而張量的概念相对不很容易建立。为了比較顺利地建立起張量的概念，本講义一方面充分利用矢量作为基础，从矢量的解析定义出发引伸到張量的定义；另一方面，力图把物理概念与数学表达方法結合起来，从同学們在材料力学中已经熟悉的应力概念出发，引伸出应力張量的概念，然后利用应力張量作为二阶張量的物理模型建立二阶張量的一般概念。上述这些想法是第１—３章的中心內容。在第１—２章中还討論了矢量代数的有关运算規則，对于大家已熟知的公式未作推导。第三章关于張量代数，为簡单起见限于笛卡尔坐标系的表达形式。第四章是本講义的主要部分，包括了流体力学中常见的定理和运算方法。在第五章与第六章討論了矢量和張量在流体力学中的应用，在討論流体力学的基本方程时采用了矢量和張量的二种表达形式。鉴于本課程的目的，关于張量的普遍理論没有包括在內，仅在第二章中提到了倒易矢问题，可作为进一步钻研張量理論的起点。为了便于自学，某些公式的推导稍詳細一些。在有些情况下，完整的分量表达形式与缩写形式并存，也是为了便于自学的目的。

由于編者知识淺薄，錯誤和不当之处难免，誠恳希望大家批評指正，对此表示真摯的謝意。

編者　　一九八三年一月修改

目　　录

第一章　矢量的加法和数乘

§1.1　数量、矢量和張量

1．物理学中有一类物理量，只要用它的大小就能完全被确定，例如質量、长度、温度和能量等。这类物理量称为数量（或标量，純量）。

数量是代数量，可为正量或負量，它們只是实数。对于它們可以施行任何代数运算，例如加、減、乘、除等。

数量代数运算的基本规則是：

加法的交换律　$a+b=b+a$

結合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

分配律　$(a+b)c=ac+bc$

或　$c(a+b)=ca+cb$

数量的減法是加法的逆运算；除法是乘法的逆运算。数量的代数运算就是在以上五种基本运算规則的基础上发展起来的。

2．物理学中还有另一些物理量，它需要用大小和方向来表征，例如位移、力、加速度和速度等。为了描述这种量，我們引进矢量的概念。

除了数值，还具有方向的量称为矢量。为了使矢量具有形象化的概念，在几何上用具有箭头的綫段表示矢量（图1.1），箭头的方向代表矢量的方向，綫段的长短代表矢量的大小。

矢量必須具有上述二个特征（即大小和方向），但具有这些特征的量尙不足以列入矢量类。矢量还具有其它特性，例如矢量加法的平

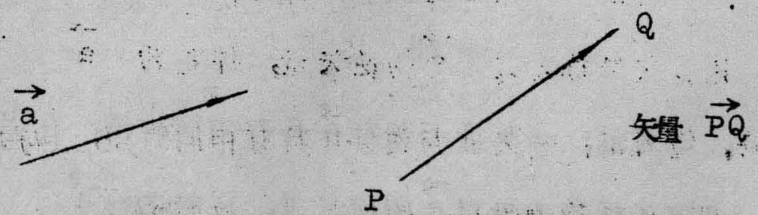

图　1.1

行四边形规則，以及坐标变换中所具有的特性（见§1·5）.

矢量可以分为三种：自由矢量、滑移矢量及固定矢量。固結于空間某一点（作用点）的矢量称为固定矢量，例如质点的速度矢量、作用于一点的力等。沿着某一直綫作用但不具有一定作用点的矢量称为滑移矢量，例如作用于剛体上的力、剛体的瞬时角速度等。无一定作用点的矢量称为自由矢量，例如力偶矩矢量就是自由矢量。为了叙述方便，下面所討論的矢量代数运算都是关于自由矢量的。但是自由矢量的代数运算規則可以很方便地推广到共点的固定矢量和滑移矢量。

矢量的代数运算与数量的代数运算之間有許多相同之处，但是更应注意的是矢量代数运算的特点。这个問題在本章及第二章中加以討論。

3．在物理学中还需要討論一种有方向的，且結构上更为复杂的量。这一类量称为張量。張量的定义在第三章中討論。这里举出一些例子如：流体的应力、应变率（变形率）都属于張量（二阶張量），它們的性质仅仅用数量或矢量的概念不能完整地描述出来。

§1·2　矢量的加法和数乘

1．零矢量：如果矢量的大小（模）等于零，那末这个矢量就等于零。零矢量的大小是零但方向不定。

2．矢量相等：如果二个矢量，其模相等互相平行且同向（不管起点），那么这二个矢量称为彼此相等，写为

$$\vec{a}=\vec{b}$$

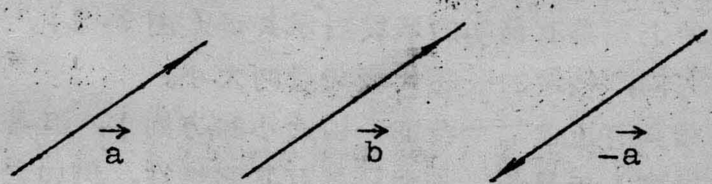

图　1·2

3．逆矢量：一矢量与矢量$\vec{a}$具有相同的模，且与$\vec{a}$平行但方向相反，則該矢量称为矢量$\vec{a}$的逆矢量，并記为$-\vec{a}$

4．矢量"和"（加法）：图1·3中矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和（或合成）是矢量$\vec{c}$，它是把矢量$\vec{b}$的起点放置在矢量$\vec{a}$的終点处，再联接矢量$\vec{a}$的起点到矢量$\vec{b}$的終点而得到。这个定义等价于矢量加法的平行四边形规则。矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$之和記为：$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

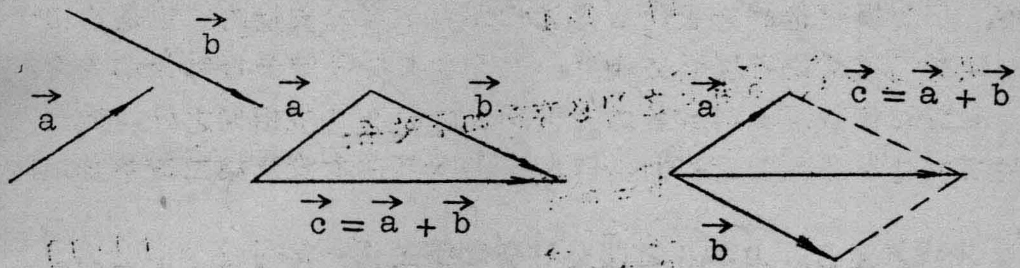

图　1·3

5．矢量"差"（减法）：把逆矢量定义与加法定义結合起来，就能得到矢量$\vec{a}$与矢量$\vec{b}$的差，并記为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

6．数乘矢量：矢量$\vec{a}$乘以数量m得到新的矢量$m\vec{a}$，其大小（模）是矢量$\vec{a}$的大小的$|m|$倍，方向按m是正数或負数而取成与$\vec{a}$相同或相反。若$m=0$，則$m\vec{a}=0$，为零矢量。

7．矢量加法及数乘的规則

矢量加法符合交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

数乘矢量符合交换律　$m\vec{a}=\vec{a}m$

結合律　$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}=n(m\vec{a})$

分配律　$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

§1·3　共綫矢量、单位矢量、共面矢量、基矢量

1. 共綫矢量：位于平行綫上的矢量称为共綫矢量。如图1·4中所示，矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$就是共綫矢量。

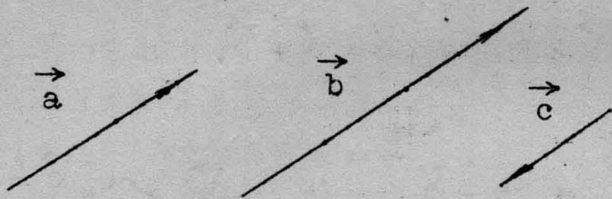

图 1·4

共綫矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$之間必存在如下关系：

$$\vec{b}=m\vec{a} \qquad (1\cdot1)$$

$$\vec{c}=n\vec{a}$$

式中　m、n为数量，可以是正数或負数。

2. 单位矢量：給定矢量$\vec{a}$，那末与$\vec{a}$同方向且其模等于1的矢量，称为矢量$\vec{a}$的单位矢量，符号用$\vec{a}^{\circ}$表示，因此

$$|\vec{a}^{\circ}|=1$$

$$\vec{a}=a\vec{a}^{\circ}$$

而
$$a=|\vec{a}|$$

称为矢量$\vec{a}$的模。所謂矢量的模就是矢量的长度、矢量的大小。

单位矢量用来明确空間的方向。

3. 共面矢量：位于同一平面上的矢量称为共面矢量。

若二个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$不共綫，它們有共同的起点（对于自由矢量总是可以做到的），則此二个矢量就决定一个平面，或称矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$在一个平面內。若矢量c = m a + n b，，則c必位于a和b所决定的

平面内，即$\vec{c}$与$\vec{a}$、$\vec{b}$三个矢量共面。反之，若有三个矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$共面，则必能找到二个数量m、n，使下列关系式成立：

$$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

或
$$m\vec{a}+n\vec{b}-\vec{c}=0 \tag{1.2}$$

或写成更一般的形式

$$m\vec{a}+n\vec{b}+\ell\vec{c}=0 \tag{1.3}$$

因此（1.3）式是矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面的条件。

4．空間矢量的合成和分解：对于任意空間矢量$\vec{d}$，都可以用預先给定的三个不共面的矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示，即

$$\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+\ell\vec{c} \tag{1.4}$$

一般说来，并不要求a、b、c相互垂直，只要求它們不共面。（1.4）式是一个很重要的关系式，它为矢量的分解作了理論准备。

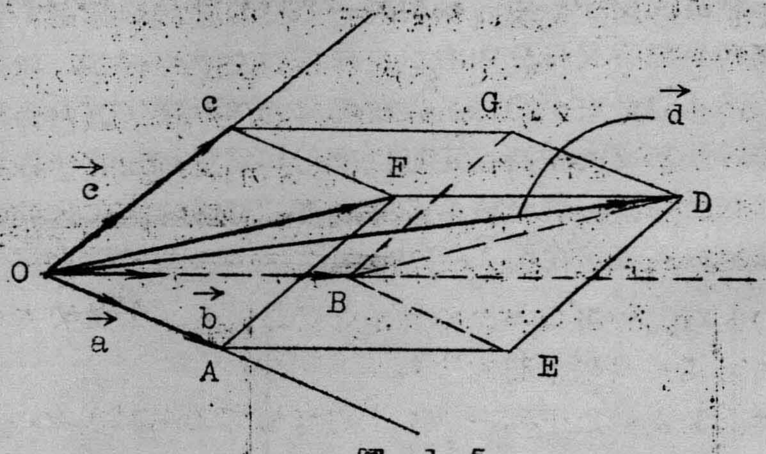

图 1.5

图1.5中，沿矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$为稜边（取为軸的方向），$\vec{d}$为对角綫，O点为共同的起点，形成一个平行六面体和斜角坐标系。

由平行四边形法則．

$$\vec{d} = O\vec{B} + O\vec{F} = O\vec{B} + O\vec{A} + O\vec{C}$$
$$= m\vec{a} + n\vec{b} + \ell\vec{c}$$

（1·4）式也就得到了証明。（1·4）式既可以理解为三个矢量 $m\vec{a}$、$n\vec{b}$ 及 $\ell\vec{c}$ 合成为一个矢量 d；也可以理解为一个矢量 d 可以分解为三个分矢量 $m\vec{a}$、$n\vec{b}$ 和 $\ell\vec{c}$。

5．基矢量：这里，我們引入“基”的概念。所謂“基”就是“基本的东西”、“基础的原料”，可以用它去組成别的东西。从（1·4）可知，任意三个不共面的矢量可以作为“基本的东西”去組成任意一个空間矢量，因此任意三个不共面的矢量都可以形成一組“基”。但是最常用的还是由三个互相垂直的单位矢量所組成的“基”。在笛卡尔直角坐标系中（Cartesian Coordinate System），这三个互相垂直的单位矢量的方向是固定的。上面所说的組成“基”的三个矢量，称为基矢量。

§1·4 軸、坐标系、分矢量和矢量的投影

1．軸：可以区别正、負方向的无限直綫称为軸。

三根互相垂直且交于一点的軸构成一个空間直角坐标系（笛卡尔坐标系）。直角坐标系又可分为右手坐标系和左手坐标系，如图 1·6 所示。本講义采用的是右手坐标系。在流体力学中除了直角坐标系以外，按照具体的物形或流动特点还可以采用其它更适用的坐标系，例如柱坐标系和球坐标系。若坐标系选擇恰当，可使解題工作非常方便。柱坐标系和球坐标系表示在图 1·7 中。

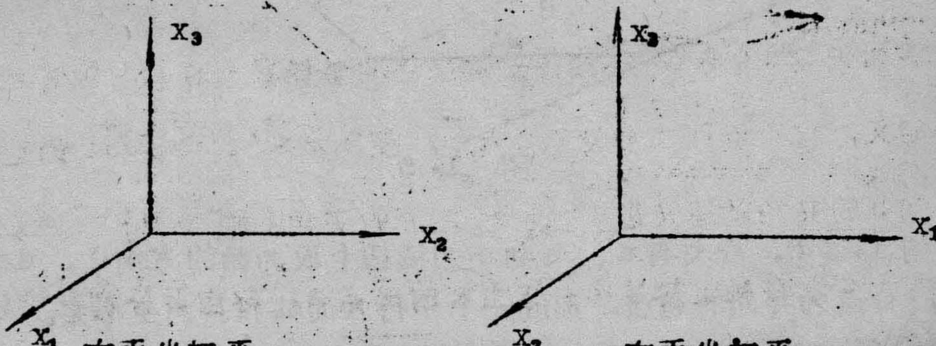

图 1·6

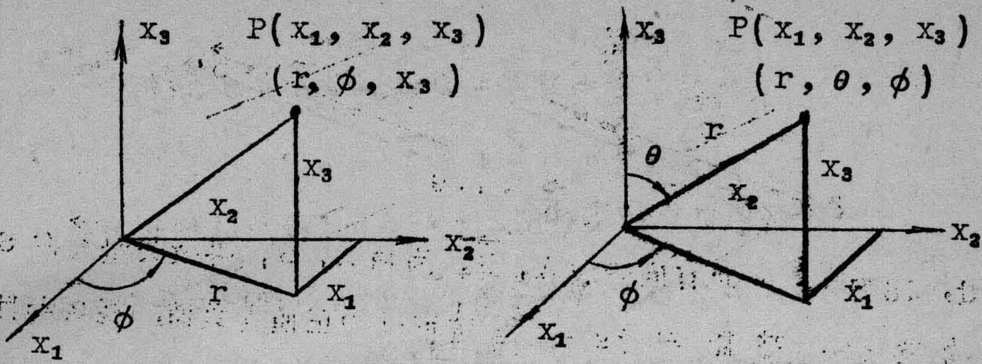

图 1.7

2. 点在軸上的投影

从A点出发至軸S作垂綫AA_1（图1.8）. A_1点是垂綫AA_1的垂足，称为A点在S軸上的投影。軸S称为投影軸。

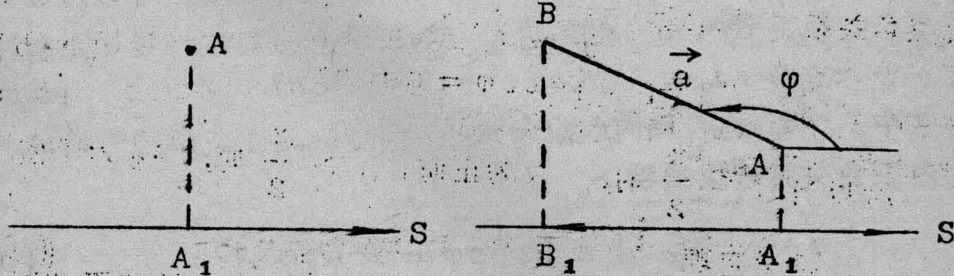

图 1.8

3. 二个矢量之間的夹角

若二个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$相交于P点，把其中一矢量绕P点在二矢量所决定的平面上轉动，使它們重合且方向一致，該矢量所需轉动的角度称为二矢量間的夹角，并記为$(\vec{a}, \vec{b})$或$(\vec{b}, \vec{a})$。除了特别声明外，规定二矢量間的夹角限在0与π之間。

假如矢量$\vec{a}'$与$\vec{b}'$不相交，則在空間中任取一点P，根据矢量相等的定义，自P点作二个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，使$\vec{a}/\!/\vec{a}'$，$\vec{b}/\!/\vec{b}'$，則定义矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角就是矢量$\vec{a}'$与$\vec{b}'$之間的夹角（图1.9）

4. 矢量在軸上的投影：矢量$\vec{a}$的起点A，終点B分别在S軸上投影（图1.8）得A_1和B_1，矢量$\overrightarrow{A_1B_1}$称为矢量a在S軸上的分

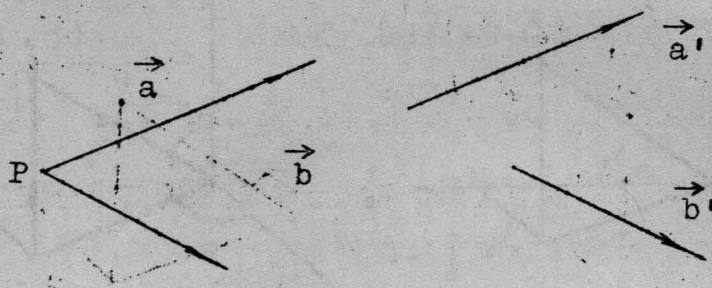

图 1.9

矢量，記为$\vec{a}_s$，而有向綫段$\overrightarrow{A_1B_1}$的值A_1B_1叫做矢量$\vec{a}$在S軸上的投影，并記为a_s，a_s值可以为正值或負值，视$\vec{a}$与軸S的夹角大小而定。

令
$$\vec{a}_s = a_s\vec{S}^\circ \tag{1.5}$$

式中 $\vec{S}^\circ$是S軸的单位矢量

由三角关系可以得到

$$a_s = |\vec{a}|\cos\varphi = a\cos\varphi \tag{1.6}$$

所以当 $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ 时，a_s为正值；$\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ 时，a_s为負值。

5. 投影定理

定理一：任意矢量的投影等于其模乘矢量与軸所成夹角的余弦。

定理二：矢量的几何和在任意軸上的投影等于各个矢量在同軸上的投影的代数和

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})_s = a_s+b_s+c_s+d_s \tag{1.7}$$

定理三：矢量被数乘后，它的投影和分矢量也被同一数量相乘。

由于定理非常明显，所以不加証明。

§1.5 矢量的坐标、方向余弦和方向数；矢量与数組；矢徑

1. 在直角坐标系$x_1x_2x_3$中，用$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$顺序代表x_1，x_2，x_3軸的单位矢量。取任意矢量$\vec{a}$，它在x_1，x_2，x_3軸上的分矢量为

$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$，投影为a_1，a_2，a_3，因此

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3 \tag{1.8}$$

利用矢量在坐标轴上投影，将矢量$\vec{a}$表示为三个分矢量之和的方法，称为矢量在三个坐标轴上的分解。

矢量$\vec{a}$在坐标轴上的投影a_1，a_2，a_3叫做矢量$\vec{a}$的坐标，或者称为矢量$\vec{a}$的分量。

显然矢量的模与矢量的分量之間存在如下关系：

$$|\vec{a}|=a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1&=a\cos(\vec{a},x_1)\\ a_2&=a\cos(\vec{a},x_2)\\ a_3&=a\cos(\vec{a},x_3)\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

因此

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{a},x_1)&=\frac{a_1}{a}\\ \cos(\vec{a},x_2)&=\frac{a_2}{a}\\ \cos(\vec{a},x_3)&=\frac{a_3}{a}\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\cos^2(\vec{a},x_1)+\cos^2(\vec{a},x_2)+\cos^2(\vec{a},x_3)=1 \tag{1.12}$$

$$\vec{a}=a\cos(\vec{a},x_1)\vec{e}_1+a\cos(\vec{a},x_2)\vec{e}_2+a\cos(\vec{a},x_3)e_3 \tag{1.13}$$

式中$\cos(\vec{a},x_1)$，$\cos(\vec{a},x_2)$，$\cos(\vec{a},x_3)$称为矢量$\vec{a}$的方向余弦。

与方向余弦成比例的一组实数ℓ、m、n称为方向数。

$$\frac{\ell}{\cos(\vec{a},\ x_1)}=\frac{m}{\cos(\vec{a},\ x_2)}=\frac{n}{\cos(\vec{a},\ x_3)} \quad (1.1$$

为了方便起见，以后夹角$(\vec{a},\ x_1)$，$(\vec{a},\ x_2)$，$(\vec{a},\ x_3)$用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$表示。

若（1.14）式的比值等于K，则

$$\ell=K\cos\alpha_1,\quad m=K\cos\alpha_2,\quad n=K\cos\alpha_3$$

$$K=\pm\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}$$

$$\cos\alpha_1=\frac{\ell}{\pm\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\alpha_2=\frac{m}{\pm\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} \quad (1.15$$

$$\cos\alpha_3=\frac{n}{\pm\sqrt{\ell^3+m^2+n^2}}$$

上式应同时取正号或負号。由此可见，可以利用矢量的方向数来确定矢量的方位。

例1. 已知两定点为A(1, 1.1)和B(2, 2.1)，求矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标。

解：$\overrightarrow{AB}=(2-1)\vec{i}+(2-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\{1,\ 1,\ 0\}$$

2. 二个空間矢量的夹角——正交条件

空間任意二个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，其終点分别为A和B（图1.10）。A和B点的坐标分别为(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3)其起点为原点O。

由ΔOBA，利用余弦定律

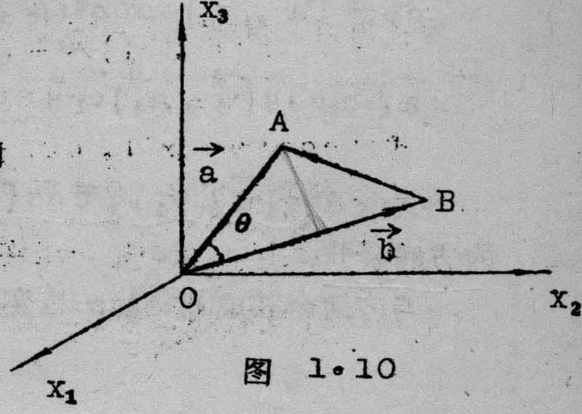

图 1.10

$$BA^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \qquad (1.16)$$

由矢量关系

$$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$

利用投影定理，矢量 $\vec{BA}$ 在三个轴上的投影为 $(a_1 - b_1)$，$(a_2 - b_2)$，$(a_3 - b_3)$。因此矢量 $\vec{BA}$ 的模的平方必等于

$$\begin{aligned} BA^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= a^2 + b^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \qquad (1.17) \end{aligned}$$

比较 (1.16) 和 (1.17) 式

$$2ab\cos\theta = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$\cos\theta = \frac{a_1}{a}\frac{b_1}{b} + \frac{a_2}{a}\frac{b_2}{b} + \frac{a_3}{a}\frac{b_3}{b}$$

这就是用矢量的坐标表示的两矢量夹角余弦的公式

或 $$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 \qquad \boxed{(1.18)}$$

式中 α_1、α_2、α_3 —— 矢量 $\vec{a}$ 与 x_1，x_2，x_3 軸的夹角

β_1、β_2、β_3 —— 矢量 $\vec{b}$ 与 x_1、x_2、x_3 軸的夹角

例2. 已知三点 A(1, 1, 1)、B(2, 2, 1) 和 C(2, 1, 2)，求 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 的夹角 φ

解：由例1得到 $\vec{AB} = \{1, 1, 0\}$，$\vec{AC} = \{1, 0, 1\}$，$|\vec{AB}| = \sqrt{2}$，$|\vec{AC}| = \sqrt{2}$，$\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$，$\therefore \varphi = \pi/3$

当二个矢量正交时，$\theta = \pi/2$，则

$$\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0 \qquad (1.19)$$

(1.19) 式就是二矢量正交的条件。