高中数学 新课程

学习指导

2—1

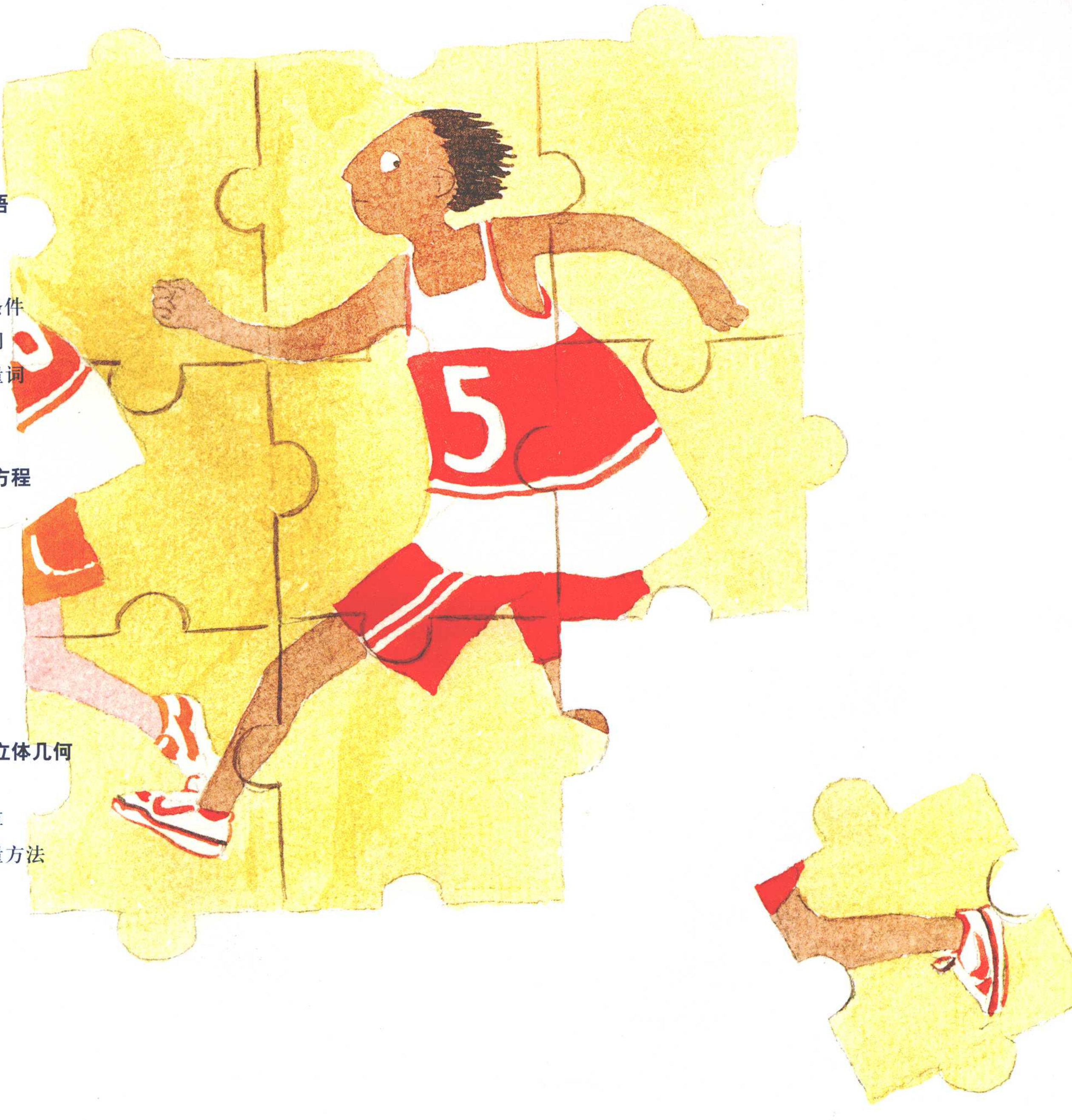
（选修）

人教A版

与人教A版普通高中课程标准
实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室 编

大象出版社



高中数学 新课程

学习指导

2-1
（选修）

人教A版

与人教A版普通高中课程标准
实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室　编

大象出版社

欢迎登录大象教育资源网

大象出版社是我省唯一一家专业教育出版机构，也是我省唯一一家全国优秀出版社。大象教育资源网是大象出版社为全省师生提供的数字化时代产品服务平台。旨在为教师、学生、家长提供便捷、互动、多层次的立体服务。

登录“大象教育资源网”，您可获得：

1.海量的试题资源

海量的优质试卷、专业的试题搜索引擎，使教师的课堂教学和学业评价更方便。

2.便捷的电子化服务

为节省学生的学习成本，大象版教学辅导类图书的参考答案将逐步上网公布。同时，为实现教学辅导的多层次、全方位，网站还会加大网络产品开发力度，满足读者的不同需求。

3.强大的驻站专家阵容

网站将陆续邀请一批省内外特高级教师进站，加强网站内容建设，为教师、学生提供高质量、高品位的服务。

4.丰富的网上网下活动

专家视频讲座，使学生的学习变得更轻松；驻站专家深入教学一线作有针对性的专题报告，名师与学生零距离接触，面对面解决疑难问题。

5.权威的中高考指导

利用网络快捷、便利的优势，对学生的中考和高考复习作动态指导。

6.周到的个性化服务

驻站专家会及时为学生和教师答疑解惑。学习的困惑，教学的困扰，都会在这里得到专家的点拨。

7.及时的考试信息

网站会为教师、学生、家长搜集整理最新的中高考信息，并提供详细的政策解读。

8.家庭教育服务

专家解读家庭教育细节，为孩子量身定做成长方案，和家长共同关注孩子的健康成长。

编写说明

从2008年秋季开始，河南省全面进入普通高中新课程改革。为了新课程实验在我省的顺利实施，为了更好地服务于高中教学，河南省基础教育教学研究室和大象出版社在深入调研、充分论证的基础上，对传统品牌教辅“高中学习指导”进行重新定位，重新组织开发了“高中新课程学习指导”丛书。这套丛书已于2008年秋季开始在全省推广使用。2009年，我们根据河南省选修教材选用情况，组织编写了“高中新课程学习指导”（选修版）。

遵循推进课改、利于教学的原则，树立以学生发展为本的教育理念，由省内外教研专家和高中一线名师倾力打造的“高中新课程学习指导”（选修版）具有以下特色：**基础性**——体现基础教育教学改革的精神，为学生的终身发展奠定基础；**选择性**——提供个性化、多样化的学习资源，为促进学生全面而有个性的发展创造广阔的自主学习空间；**适用性**——为河南省高中学生量身定做；**创新性**——站在课改前沿，依据新课程理念，培养学生创新精神。

“高中新课程学习指导”（选修版）按课时编写，设置的主要栏目有：

名师要点解析 名师解析学习中的重点、难点、盲点和易错点。

基础同步自测 习题设计重点在对本课时基础知识和基本技能的巩固和掌握，同时也兼顾综合能力的拓展。

每单元（章）设置的主要栏目有：

课标同步导航 对课标目标进行分解细化，列出要求达到的目标，主干知识，重要概念或公式，并提出学习建议。

高考同步链接 为学生打开高考的一面窗，让他们走进高考、感悟高考。

单元（本章）综合测试 通过综合性的训练，促进对本单元（章）知识的全面掌握。

（上述各栏目的设置，个别学科因为教材特点略有不同）

为方便同学们对所学知识进行自我检验，在各单元（章）讲解和训练之后还设置了两套“**模块（阶段）评价测试**”；在全书最后附有“**习题详解点拨**”，对所有习题提供详尽的答案和解题思路。

本套丛书包括思想政治、语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理、生物九个学科。

参加本册编写的作者是王新峰、江振晓、姬翠萍、孙士放、雷玉印、宋润锋、曹四清、姚爱民、赵小强同志，参加2010年版修订工作的作者是盛明强、李昆军同志，最后由骆传枢、张海营、刘志凤同志统稿。

对使用中发现的错谬缺漏之处，恳请广大师生批评指正。

河南省基础教育教学研究室

目　录

第一章　常用逻辑用语

课标同步导航

1. 命题

(1)了解命题、真命题、假命题的概念;会判断哪些语句不是命题;能熟练判断命题的真假.

(2)了解原命题的逆命题、否命题与逆否命题的定义;会分析四种命题的相互关系,并会判断四种命题的真假.

2. 充分条件与必要条件

理解充分条件、必要条件与充要条件的意义,对于"若 p,则 q"形式的命题,会判断 p 成立与 q 成立的关系,并能用充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件来表达 p 与 q 的关系. 证明 p 成立是 q 成立的充要条件时,要明确充分性、必要性的证明中,谁是条件,谁是应推证的结论;会求某些简单问题成立的充要条件.

3. 逻辑联结词"且""或""非"

通过数学实例,了解逻辑联结词"且""或""非"的含义,并会判断"且""或""非"构成的复合命题的真假.

4. 全称量词与存在量词

(1)通过生活和数学中的丰富实例,理解全称量词与存在量词的意义.

(2)能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

(3)会判断一个命题是全称命题还是特称命题,并会判断全称命题与特称命题的真假.

1.1　命题及其关系

1.1.1　命题

名师要点解析

【例1】判断下列语句中哪些是命题,哪些不是命题;是命题的判断它是真命题还是假命题.

(1)奇偶性相同的两个整数之和是一个偶数;

(2)三角形的三个内角之和等于180°;

(3)如果 a,b 是任意两个正实数,那么 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$;

(4)$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(5)如果实数 a 满足 $a^2=9$,那么 $a=3$;

(6)非典型肺炎是怎样传染的?

【分析】判断一个语句是否是命题,是否是真命题或假命题的依据是定义.

【解】(6)不是命题,(1)(2)(3)(4)(5)是命题.

其中(1)(2)(3)是真命题,(4)(5)是假命题.

【点拨】注意命题定义中两个关键的条件:①可以判断真假,②陈述句.

【例2】已知 a、b 为两条不同的直线,α、β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,则下列命题中的假命题是　　　　【　　】

A. 若 $a/\!/b$,则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $a\perp b$,则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 a、b 相交,则 α、β 相交

D. 若 α、β 相交,则 a、b 相交

【分析】根据线面关系用排除法找出答案,或用图形法、特例法逐一判断.

【解】如图 1.1-1,α、β 为两个不同的平面,$\alpha\cap\beta=c$,但平面 α、β 不重合. 虽然 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,但是

a、b 不一定相交. 故"若 α、β 相交,则 a、b 相交"是假命题. 即答案为 D.

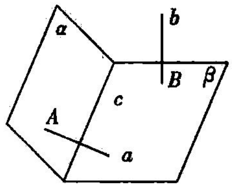


图 1.1－1

【点拨】举特例法最简捷.

【例 3】指出下列命题中的条件 p 和结论 q,并判断其真假.

(1)若两条直线 a 和 b 都与直线 c 平行,则直线 a 和直线 b 平行;

(2)同弧所对的圆周角不相等.

【分析】"若 p,则 q"(或"如果 p,那么 q")是命题的常见形式,p 称为命题的条件,q 称为命题的结论. 分清条件和结论按定义求解.

【解】(1)条件 p:两条直线 a 和 b 都与直线 c 平行;结论 q:直线 a 和直线 b 平行. 它是真命题.

(2)条件 p:两个角为同弧所对的圆周角;结论 q:这两个角不相等. 它是假命题.

【点拨】分清命题的条件和结论,是解答此类题目的关键.

基础同步自测

1. 下列语句中,不能成为命题的是　　　【　　】

A. $5>12$

B. $x>0$

C. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D. 三角形的三条中线交于一点

2. 有下列语句:①地球上的四大洋;② $-5\in\mathbf{Z}$;③ $\pi\notin\mathbf{R}$;④"我国的小河流"可以组成一个集合. 其中,命题的个数是　　　【　　】

A. 1　　　B. 2

C. 3　　　D. 4

3. 有下列命题:①面积相等的三角形是全等三角形;②若 $xy=0$,则 $|x|+|y|=0$;③若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;④矩形的对角线互相垂直. 其中真命题的个数为　　　【　　】

A. 1　　　B. 2

C. 3　　　D. 4

4. 有下列命题:①在平面直角坐标系中,任意有序实数对 (x,y),都对应一点 P;②存在一个函数,既是偶函数又是奇函数;③每一条线段的长度都能用有理数表示;④两个无理数的乘积可能是有理数. 其中,属于假命题的是　　　【　　】

A. ①　　　B. ②

C. ③　　　D. ④

5. 有下列四个命题:①22340 能被 3 或 5 整除;②不存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$;③对任意的实数 x,均有 $x+1>x$;④方程 $x^2-2x+3=0$ 有两个不等的实根. 其中,属于假命题的是________(只填序号).

6. 下列命题:①若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数;②四条边相等的四边形是正方形;③平行四边形是梯形;④若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$. 其中,属于真命题的是________(只填序号).

7. 命题"若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $0<\cos\alpha<1$"中,条件 p 为:________________,结论 q 为:________________. 它是________(填"真"或"假")命题.

8. 判断下列语句中哪些是命题:

(1) $9>2$;

(2) 0 是最小的自然数;

(3) $\sqrt{5}$ 是无理数吗?

(4) 任意 $x\in\mathbf{R}$,$(x-1)^2\geqslant0$;

(5) 每个向量都有方向;

(6) 2 是方程 $x+3=0$ 的根.

9. 判断下列命题的真假：

(1)形如 $a+\sqrt{6}b$ 的数是无理数，其中 a,b 是有理数；

(2)正项等差数列的公差大于零；

(3)奇函数的图象关于原点对称；

(4)能被 2 整除的数一定能被 4 整除.

10. 指出下列命题的条件 p 和结论 q，并判断真假：

(1)负数的立方根是正数；

(2)15 是合数.

11. 将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并判断真假：

(1)正 $n(n\geqslant 3)$ 边形的 n 个内角全相等；

(2)平行于同一平面的两直线平行.

1.1.2 四种命题

1.1.3 四种命题间的相互关系

名师要点解析

【例 1】在空间中，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中，逆命题为真命题的是________________.

【分析】对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么称这样的两个命题叫做互逆命题，其中一个命题叫做原命题，另一个命题叫做原命题的逆命题. 此题应先写出命题的逆命题，然后判断其真假.

【解】①的逆命题是：若四点中任何三点都不共线，则这四点不共面. 它是一个假命题. ②的逆命题是：若两条直线是异面直线，则这两条直线没有公共点. 它是一个真命题. 因此，答案是②.

【点拨】本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识及命题的有关概念.

【例 2】分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆

否命题,并判断它们的真假.

(1)若 $q<1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根;

(2)若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$.

【分析】先利用定义写出原命题的逆命题、否命题和逆否命题,再利用四种命题之间的关系,判断它们的真假.

【解】(1)逆命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根,则 $q<1$. 它是假命题.

否命题:若 $q\geq1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根. 它是假命题.

逆否命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根,则 $q\geq1$. 它是真命题.

(2)逆命题:若 $a=0$ 或 $b=0$,则 $ab=0$. 它是真命题.

否命题:若 $ab\neq0$,则 $a\neq0$ 且 $b\neq0$. 它是真命题.

逆否命题:若 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,则 $ab\neq0$. 它是真命题.

【点拨】在判断命题的真假性时,要特别注意:原命题为真,它的逆命题可以为真,也可以为假;原命题为真,它的否命题可以为真,也可以为假;原命题为真,它的逆否命题一定为真.

基础同步自测

1. 在命题"对顶角相等"与它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题是 【　　】

A. 原命题、逆命题、否命题、逆否命题

B. 原命题与逆命题

C. 原命题与逆否命题

D. 逆命题与否命题

2. 命题"若 $A\cup B=A$,则 $A\cap B=B$"的否命题是 【　　】

A. 若 $A\cup B\neq A$,则 $A\cap B\neq B$

B. 若 $A\cap B=B$,则 $A\cup B=A$

C. 若 $A\cap B\neq B$,则 $A\cup B\neq A$

D. 若 $A\cup B\neq A$,则 $A\cap B=B$

3. 下列命题中,不是真命题的为 【　　】

A. "若 $b^2-4ac\geq0$,则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根"的逆否命题

B. "四边相等的四边形是正方形"的逆命题

C. "$x^2=9$,则 $x=\pm3$"的否命题

D. "点(1,1)在第一象限"的逆命题

4. 若命题 p 的否命题为 r,r 的逆命题为 s,p 的逆命题是 t,则 s 是 t 的 【　　】

A. 逆否命题　　B. 逆命题

C. 否命题　　D. 原命题

5. 当命题"若 p,则 q"为真时,下列命题中一定为真命题的是 【　　】

A. 若 q,则 p　　B. 若$\neg p$,则$\neg q$

C. 若$\neg q$,则$\neg p$　　D. q 且 p

6. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中 【　　】

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数也可能是偶数

D. 以上判断均不正确

7. 有下列四个命题:①"若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数"的逆命题;②"相似三角形的周长相等"的否命题;③"若 $b\leq1$,则关于 x 的一元二次方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根"的逆否命题;④"若 $A\cup B=B$,则 $A\supseteq B$"的逆否命题. 其中是真命题的有 【　　】

A. ①②　　B. ②③

C. ①　　D. ②④

8. 在下列命题中,属于真命题的是 【　　】

A. 若 $ac>bc$,则 $a>b$

B. 命题"若 $b=3$,则 $b^2=9$"的逆命题

C. 命题"当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$"的否命题

D. 命题"相似三角形的对应角相等"的逆否命题

9. 若原命题为"若 p,则 q",则它的逆命题为________. 对于两个命题,其中一个命题的条件和结论恰好为另一个命题的________和________,这样的两个命题叫做互否命题. 若原命题为"若 p,则 q",则它的否命题为________;若原命题为"若 p,则 q",则它的逆否命题为________. 两个命题互为________或________时,它们的真假性没有关系.

10. (1)若 $A\cap B=\Phi$,则 $A=\Phi$ 的逆命题是________命题(填"真"或"假").

(2)若 $x\leq-3$,则 $x^2+x-6>0$ 的否命题是________命题(填"真"或"假").

(3)若 $a>b$,则 $a^2>b^2$ 的逆否命题是________命题(填"真"或"假").

11. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若 $x^2+y^2=0$,则 x,y 全为0;

(2)若 $a+b$ 是偶数,则 a,b 都是偶数.

1.2 充分条件与必要条件

名师要点解析

【例1】在下列各题中,判断 p 是 q 的什么条件:

(1)p:两个三角形全等;q:两个三角形的对应边相等.

(2)p:圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切;q:$c^2=(a^2+b^2)r^2$.

【分析】若 $p\Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,即由 p 成立可得出 q 成立,则 p 是 q 成立的充分条件;若 $q\Rightarrow p$,则称 p 是 q 的必要条件.若 $p\Leftrightarrow q$,则称 p 是 q 的充要条件.

【解】(1)因为"若两个三角形全等,则这两个三角形的对应边相等"是真命题,且"若两个三角形的对应边相等,则这两个三角形全等"也是真命题,即 p 是 q 的充要条件.

(2)若圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切,圆心到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 r,即 $r=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,所以,$c^2=(a^2+b^2)r^2$;若 $c^2=(a^2+b^2)r^2$,则 $r=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$成立,说明 $x^2+y^2=r^2$ 的圆心(0,0)到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 r,即圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切,故 p 是 q 的充要条件.

【点拨】对于涉及充分必要条件判断的问题,必须以准确、完整地理解充分、必要、充要条件的概念为基础,有些问题需转化为等价命题后才容易判断.

【例2】已知 $ab\neq 0$,求证:$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

【分析】根据充要条件的定义,证明 p 是 q 的充要条件,既要证明命题"$p\Rightarrow q$"为真,又要证明命题"$q\Rightarrow p$"为真,前者证明的是充分性,后者证明的必要性.

【证明】充分性:即由 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$ 推出 $a+b=1$.

$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=(a+b-1)\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]=0.$

因为 $ab\neq 0$,所以 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,所以$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$,

所以 $a+b-1=0$,即 $a+b=1$.故充分性成立.

必要性:即由 $a+b=1$ 推出 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

因为 $a+b=1$,所以

$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$.故必要性成立.

综上,$ab\neq 0$,$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

【点拨】充要条件的证明关键是根据定义确定什么是已知条件,什么是结论,然后搞清楚充分性是证明哪一个命题,必要性是证明哪一个命题.

基础同步自测

1.设原命题"若 p,则 q"是真命题,而其逆命题是假命题,则 p 是 q 的 【 】

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

2.设 $x\in\mathbf{R}$,则 $x<2$ 的一个必要不充分条件是 【 】

A.$x>1$ B.$x<1$

C. $x>3$　　D. $x<3$

3. 在$\triangle ABC$中，$A>30^\circ$是$\sin A>\frac{1}{2}$的　【　】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 如果p是q的必要不充分条件，q是r的充要条件，s是r的充分不必要条件，那么p是s的　【　】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. $x^2+(y-2)^2=0$是$x(y-2)=0$的　【　】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 若a,b为实数，则$a>b>0$是$a^2>b^2$的　【　】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 一元二次方程$ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　【　】

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $a<-1$　　D. $a>1$

8. 直线l_1与l_2互相平行的一个充分条件是　【　】

A. l_1、l_2都平行于同一个平面

B. l_1、l_2与同一平面所成的角相等

C. l_1平行于l_2所在的平面

D. l_1、l_2都垂直于同一平面

9. 若甲："四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$"，乙："四边形$ABCD$是平行四边形"，则甲是乙的　【　】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 若$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，则$y=f(x)$为奇函数的一个充要条件为　【　】

A. $f(x)=0$

B. 对一切$x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$都成立

C. 对于某$x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)+f(-x_0)=0$

D. 对一切$x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=0$都成立

11. $a=3$是直线$ax+2y+3a=0$和直线$3x+(a-1)y=a-7$平行且不重合的________条件.

12. 关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，有下列结论：

①$\Delta=b^2-4ac>0$是这个方程有实根的充分条件；②$\Delta=b^2-4ac>0$是这个方程有实根的必要条件；③$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$是这个方程有实根的充要条件；④$\Delta=b^2-4ac=0$是这个方程有实根的充分不必要条件. 其中正确结论的序号为________.

13. 设A、B、C为三个集合，则条件$A\subsetneqq B$是$A\subsetneqq(B\cup C)$的________条件.

14. 已知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数，证明：$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$的充要条件是$a+b\geqslant 0$.

15. 已知 p 是 q 的充分条件，q 是 r 的必要条件，也是 s 的充分条件，r 是 s 的必要条件. 问：

(1) p 是 r 的什么条件？

(2) s 是 q 的什么条件？

(3) p、q、r、s 中哪几对互为充要条件？

16. 求不等式 $kx^2+x+k>0$ 恒成立的充要条件.

1.3　简单的逻辑联结词

名师要点解析

【例1】将下面的命题分别用“且”“或”“非”联结成新命题“$p\vee q$”“$p\wedge q$”“$\neg p$”的形式，并判断它们的真假.

p：100 是 15 的倍数，q：100 是 5 的倍数.

【分析】在使用逻辑联结词构造新命题时，关键要搞清“且”“或”“非”的意义.

【解】$p\wedge q$：100 是 15 的倍数且 100 是 5 的倍数.

也可简写成：100 是 15 的倍数且是 5 的倍数.

$p\vee q$：100 是 15 的倍数或 100 是 5 的倍数.

也可简写成：100 是 15 的倍数或是 5 的倍数.

$\neg p$：100 不是 15 的倍数.

由于 p 是假命题，q 是真命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题，$\neg p$ 是真命题.

【点拨】在用“且”“或”联结新命题时，如果简写，应注意保持命题的意思不变.

【例2】命题“方程 $x^2-4=0$ 的解是 $x=\pm2$”中，使用逻辑联结词的情况是　　【　　】

A. 没有使用逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词“且”

C. 使用了逻辑联结词“或”

D. 使用了逻辑联结词“非”

【解】“方程 $x^2-4=0$ 的解是 $x=\pm2$”就是“方程 $x^2-4=0$ 的解是 $x=2$ 或 $x=-2$”，所以，该命题是用逻辑联结词“或”联结的，答案为 C.

【点拨】本题是用“或”联结的. 一般地，一元二次方程的两个实根是用“或”联结的. 类似地，还有“$xy=0$”可写作“$x=0$ 或 $y=0$”. 而对于实数 x,y 满足“$x^2+y^2=0$”，则是用“且”联结的，即“$x=0$ 且 $y=0$”.

基础同步自测

1. 若命题 p：0 是偶数，命题 q：2 是 3 的约数，则下列命题中为真的是　　【　　】

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$

C. $\neg p$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

2. 如果命题“p 或 q”与命题“$\neg p$”都是真命题，那么　　【　　】

A. 命题 p 不一定是假命题

B. 命题 q 一定为真命题

C. 命题 q 不一定是真命题

D. 命题 p 与命题 q 的真假性相同

3. 命题 $p:a^2+b^2<0(a,b\in\mathbf{R})$，命题 $q:a^2+b^2\geqslant 0(a,b\in\mathbf{R})$，则下列结论正确的是 【　　】

A. "p 或 q"为真

B. "p 且 q"为真

C. "$\neg p$"为假

D. "$\neg q$"为真

4. 已知全集 $S=\mathbf{R}, A\subseteq S, B\subseteq S, \sqrt{2}\in A$，若命题 $p:\sqrt{2}\in(A\cup B)$，则与命题$\neg p$ 等价的是 【　　】

A. $\sqrt{2}\notin A$　　B. $\sqrt{2}\in \complement_S B$

C. $\sqrt{2}\notin(A\cap B)$　　D. $\sqrt{2}\in(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$

5. 以下判断中正确的是 【　　】

A. 命题 p 是真命题时，命题 $p\wedge q$ 一定是真命题

B. 命题 $p\wedge q$ 为真命题时，命题 p 一定是真命题

C. 命题 $p\wedge q$ 为假命题时，命题 p 一定是假命题

D. 命题 p 是假命题时，命题 $p\wedge q$ 不一定是假命题

6. 已知命题 $p:3\geqslant 3, q:3>4$，则下列判断正确的是 【　　】

A. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为真，$\neg p$ 为假

B. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，$\neg p$ 为真

C. $p\vee q$ 为假，$p\wedge q$ 为假，$\neg p$ 为假

D. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，$\neg p$ 为假

7. 若命题 $p:x^2+1>\frac{1}{2}$，命题 $q:x^2+2x+2=0$ 有实数根，则下列命题属于真命题的是 【　　】

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p$　　C. $p\vee q$　　D. q

8. 设命题 $p:\log_2 3>0$，命题 $q:2^{-2}=-\frac{1}{4}$，则下列说法错误的是 【　　】

A. 命题 $p\vee q$ 是真命题

B. 命题 $p\wedge q$ 是假命题

C. 命题$\neg q$ 是真命题

D. 命题 $p\wedge q$ 是真命题

9. 命题 p:6 是 12 的约数，命题 q:6 是 24 的约数，由上述命题构成的"p 或 q"形式的命题是________________；"p 且 q"形式的命题是________________；"$\neg p$"形式的命题是________________.

10. 命题 p:0 不是自然数，命题 q:π 是无理数，在命题"p 且 q"、"p 或 q"、"$\neg p$"、"$\neg q$"中，假命题是________________，真命题是________________.

11. 分别写出由下列各组命题构成的"$p\vee q$"、"$p\wedge q$"、"$\neg p$"形式的新命题.

(1) p:$\sqrt{2}$是无理数，q:$\sqrt{2}$大于 1；

(2) $p:\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}, q:\{0\}\subsetneqq\mathbf{N}$；

(3) $p:x^2+1>x-4, q:x^2+1<x-4$.

12. 分别指出由下列各组命题构成的"$p\vee q$"、"$p\wedge q$"、"$\neg p$"形式的新命题的真假.

(1) $p:4+3=7, q:5<4$；

(2) p:9 是质数，q:8 是 12 的约数；

(3) $p:\varnothing=\{0\}, q:\varnothing\subseteq\varnothing$.

1.4 全称量词与存在量词

1.4.1 全称量词

1.4.2 存在量词

名师要点解析

【例1】试判断以下命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{N},x^4\geqslant 1$；

(3) $\exists x_0\in\mathbf{Z},x_0^3<1$；

(4) $\exists x_0\in\mathbf{Q},x_0^2=2$.

【分析】要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每个元素验证 $p(x)$ 成立；但要判定全称命题是假命题，却只需举出集合 M 中的一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可（即举出一个反例）.

要判定一个特称命题是真命题，只要在限定集合 M 中至少找到一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 成立即可. 否则，这个特称命题就是假命题.

【解】(1) 由于 $\forall x\in\mathbf{R},x^2\geqslant 0$，因而有 $x^2+2\geqslant 2>0$，所以，命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2>0$”是真命题.

(2) 由于 $0\in\mathbf{N}$，当 $x=0$ 时，$x^4\geqslant 1$ 不成立，所以，命题“$\forall x\in\mathbf{N},x^4\geqslant 1$”是假命题.

(3) 由于 $-1\in\mathbf{Z}$，当 $x=-1$ 时，$x^3<1$ 成立，所以，命题“$\exists x_0\in\mathbf{Z},x_0^3<1$”是真命题.

(4) 由于使 $x^2=2$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{2}$，而它们都不是有理数. 因此，没有任何一个有理数的平方等于 2，所以，命题“$\exists x_0\in\mathbf{Q},x_0^2=2$”是假命题.

【点拨】在数学中，常有“若 $p(x)$，则 $q(x)$”形式的命题，此时应理解为“它是关于某集合 M 的一切元素 x 的全称命题”. 如：“若 $\frac{x}{4}>3$，则 $x>12$”，即是“$\forall x\in\mathbf{R}$，若 $\frac{x}{4}>3$，则 $x>12$”.

【例2】(1) 设集合 $S=\{$四边形$\}$，$p(x)$：内角和为 360°. 试用不同的表述写出全称命题“$\forall x\in\mathbf{R},p(x)$”.

(2) 设 $q(x)$：$x^2=x$. 试用不同的表述写出特称命题“$\exists x_0\in\mathbf{R},q(x_0)$”.

【解】(1) 对所有的四边形 x，x 的内角和为 360°；

对一切四边形 x，其内角和为 360°；

每一个四边形 x 的内角和均为 360°；

任一个四边形 x 的内角和均为 360°；

凡是四边形 x，它的内角和均为 360°.

(2) 存在实数 x_0，使 $x_0^2=x_0$ 成立；

至少存在一个 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0^2=x_0$ 成立；

对于某个实数 x_0，$x_0^2=x_0$ 成立；

有一个 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0^2=x_0$ 成立；

对某一个 $x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2=x_0$ 成立.

【点拨】同一个全称命题或特称命题可以有多种表达形式（不唯一性），总结如下：

命题	全称命题“$\forall x\in M,p(x)$”	特称命题“$\exists x_0\in M,q(x_0)$”
表述方法	(1) 所有的 $x\in M$，$p(x)$ 成立. (2) 对一切 $x\in M$，$p(x)$ 成立. (3) 对每一个 $x\in M$，$p(x)$ 成立. (4) 任意一个 $x\in M$，使 $p(x)$ 成立. (5) 凡 $x\in M$，都有 $p(x)$ 成立.	(1) 存在 $x_0\in M$，使 $q(x_0)$ 成立. (2) 至少有一个 $x_0\in M$，使 $q(x_0)$ 成立. (3) 对有些 $x_0\in M$，$q(x_0)$ 成立. (4) 对某个 $x_0\in M$，$q(x_0)$ 成立. (5) 有一个 $x_0\in M$，使 $q(x_0)$ 成立.

基础同步自测

1. 有下列全称命题：①个位数字是 0 的整数，可以被 2 整除；②角平分线上的点到这个角的两边的距离相等；③四面体的四个面中，每两个面之间的夹角均相等. 其中真命题的个数为 【　】

A. 1　B. 2　C. 3　D. 0

2. 有下列特称命题：①有的实数是无限不循环小数；②有些三角形不是等腰三角形；③有的菱形是正方形. 其中假命题的个数为 【　】

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

3. 有下列特称命题：①$\exists x_0\in\mathbf{R},x_0\leqslant 0$；②至少有一个整数，它既不是合数也不是素数；③$\exists x_0\in\{x\mid x$ 是无理数$\}$，x_0^2 是有理数. 其中真命题的个数为 【　】

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

4. 有下列全称命题：①$2x+1$ 是整数（$x\in\mathbf{R}$）；②对所有的 $x\in\mathbf{R},x>3$；③对任意一个 $x\in\mathbf{Z},2x^2+1$ 为奇数. 其中假命题的个数为 【　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 下列命题为特称命题的是　　【　　】

A. 偶函数的图象关于 y 轴对称

B. 四棱柱都是平行六面体

C. 不相交的两条直线是平行直线

D. 存在一个实数大于等于 3

6. 判断下列语句是不是全称命题或特称命题. 如果是,用量词符号表示出来.

(1) 中国的所有江河都流入太平洋;

(2) 某些实数是负数;

(3) 任何一个实数除以 1,仍等于这个实数;

(4) 每一个向量都有方向吗?

7. 判断下列命题的真假:

(1) 在平面直角坐标系中,任意有序实数对 (x,y) 都对应一点 P;

(2) 存在一个函数,既是偶函数又是奇函数;

(3) 每一条线段的长度都能用正有理数表示;

(4) 存在一个实数 x_0,使等式 $x_0^2+x_0+8=0$ 成立.

8. 判断下列命题的真假:

(1) $\forall x\in\mathbf{R}, x^2-3x+2=0$;

(2) $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+1=0$.

9. 用符号“$\forall$”、“$\exists$”表示下列含有量词的命题:

(1)实数的平方大于等于0;

(2)存在一对实数对(x_0,y_0),使$2x_0+3y_0+3<0$成立.

10. 试用不同的表述形式写出全称命题“$\forall a,b\in\mathbf{R},(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$”.

1.4.3 含有一个量词的命题的否定

名师要点解析

【例1】写出下列命题的否定,并判断其真假.

(1)$p:\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$;

(2)q:所有的正方形都是矩形;

(3)$r:\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+2x_0+2\leqslant 0$;

(4)s:至少有一个实数x_0,使$x_0^3+1=0$.

【分析】全称命题$p:\forall x\in M,p(x)$的否定$\neg p:\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$,即全称命题的否定是特称命题.

特称命题$p:\exists x_0\in M,p(x_0)$的否定$\neg p:\forall x\in M,\neg p(x)$,即特称命题的否定是全称命题.

【解】(1)$\neg p:\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2-x_0+\frac{1}{4}<0$.

它是假命题,因为$p:\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$恒成立.

(2)$\neg q$:至少有一个正方形不是矩形;它是假命题.

(3)$\neg r:\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+2>0$;它是真命题.

(4)$\neg s:\forall x\in\mathbf{R},x^3+1\neq 0$;它是假命题,因为当$x=-1$时,$x^3+1=0$.

【点拨】命题的否定与否命题要区别开来.在全称命题和特称命题的否定中,注意全称量词与存在量词是如何对应转换的,命题条件是如何对应变化的.

【例2】判断下列全称命题的真假,并写出其否定.

(1)$\forall x\in\mathbf{R}_+,\sqrt{x}<x$;

(2)$\forall x\in\mathbf{R},x^2+5x=24$.

【解】(1)假命题;如$x=0.01$等.其否定为:$\exists x_0\in\mathbf{R}_+,\sqrt{x_0}\geqslant x_0$.

(2)假命题;如$x=1$等.其否定为:$\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+5x_0\neq 24$.

【点拨】重点理解全称命题与特称命题的否定规律.