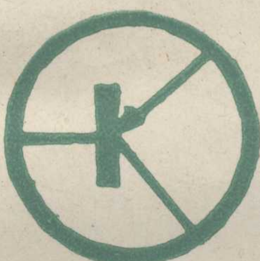
精选精编初中物理模拟题库

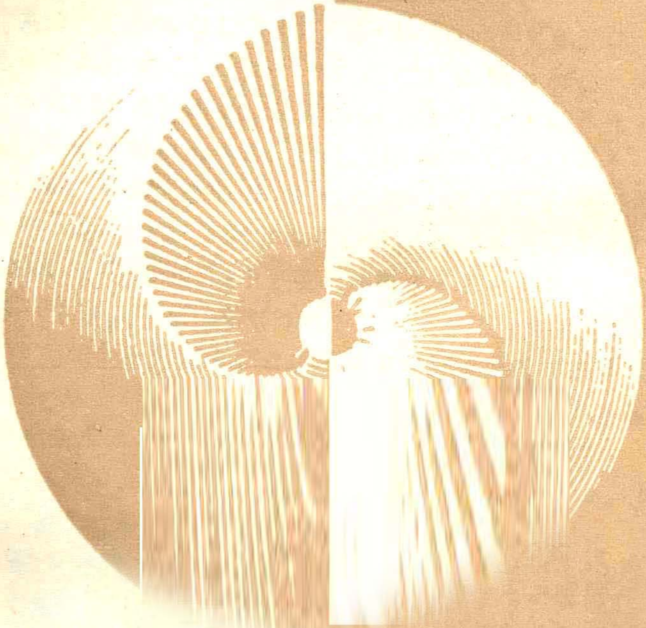
牟妍　等编著



国际文化出版公司

王连笑　著

数学解题中的数学思想



新蕾出版社

〔津〕新登字(90)004号

责任编辑：胡晓光

数学解题中的数学思想
王 连 笑
*
新蕾出版社 出版
天津新华印刷三厂印刷
新华书店天津发行所发行
开本850×1168毫米1/32 印张 13 字数280
1994年5月第1版 1995年[illegible]月第1次印刷
印数：1—3,000
ISBN 7-5307-1241-1
G·594 定价：9.65元

写在前面

美国数学家哈尔莫斯（P·R·Halmos）曾经说过：数学究竟是由什么组成的？是公理？定理？证明？概念？定义？理论？公式？方式？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的组成部分，但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏，因为数学的真正组成部分是问题和解，问题才是数学的心脏。对于中学数学也是如此。著名的数学教育家波利亚（G·Polya）曾指出，"中学数学教学首要任务就是加强解题训练。""掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题"。在中学数学教学大纲中也强调中学数学教学目的之一就是"逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。"解题是复杂的智力活动。中学生在学习数学过程中感到困难的就是解题。

一些同学在数学学习中，能够记住课本上的定义、定理和公式，甚至能够背得烂熟，但是一遇到解答习题，哪怕是一些简单的题目都会感到束手无策，不知如何思考，找不到解题的思路。造成这种状况的原因是什么呢？原因当然很多，但其中一个原因就是，这些学生在解题时往往不注重对题目的分析，不注意解题时是用什么思想去指导，在题目解出来之后，又不去思考究竟是怎么解出的，因此，他们虽然做了许多数学题，但常常不得要领，即使做了一千道题，对第一千零一题还是不会求解，这一部分学生出现的现象具有一定的普遍性，对此，就需要从根本上去认识，去解决解题这个问题。

解题需要数学知识、运算能力、思维判断、方法和技巧；但

更重要的解题需要有一定的指导思想。只有明确解题时哪些数学思想起了作用，才能在高观点的指导下完成解题，才能建立一个完善的解题结构和解题系统，因此，解题需要数学思想。

对中学生来说，比较有说服力的是高考试题，高考数学试题的命题原则是“考察基础知识,注重数学思想，培养实际能力”，事实上，许多高考试题正是体现了数学思想，正是体现了对考生数学思想水平的考察。基于上面的一些认识，作者近几年来，开始留意对解题中数学思想的思考，并以此为题在一些地方做了多次专题介绍，这些专题讲座的修改与整理，便成了这本书。

本书介绍了在解题中经常用到的一些主要数学思想—函数思想、参数思想、方程思想、数形结合思想、分类思想和化归思想。书中对每一种思想方法的介绍都立足于以例题的解题思路为主，在例题的编排上，注意以体现解题思想为主线，所选的例题有历届全国高考及上海市、广东省的高考题，也有高中数学课的典型题目，另有极少量的数学奥林匹克试题，对于每个题目都是采取讲解的叙述方式，而没有规范地写出解或证，作者的想法是，规范的解或证应该是简洁的，严密的，而为了阐述解题的数学思想就需要一边解题，一边议论，这样，你在读本书时，就可以像听老师讲课那样,可以流畅地读下去,一道题解完了，应该阐明的数学思想也渗透进去了,因而读起来可能不会感到那么枯燥。

这里还要提到的是作者在写本书时，参阅了大量的数学杂志和书籍，并从中吸收了一些相当好的题目，所以本书的写成也是作者向全国同行学习的结果。

这本书是献给中学生和中学数学教师的，把这样一本介绍解题与数学思想的书写好只是作者的一个愿望，由于作者学识所限，心有余而力不足，谬误在所难免，恳请读者提出诚恳的批评，作者将不胜感谢。

作者　1991.9。

目　录

一　在数学基本思想指导下的解题

学生和教师若不试图从数学的形式主义和单纯的演算中跳出来，以掌握数学的本质，那么挫折和迷惑将显得更为严重.

—R·柯朗

对于如何解题这样一个十分普通的问题，不同的人有不同的处理方法.有的人只是就题论题，把解题的兴奋点集中在题型与方法的形式主义的对号和单纯的演算上，因而他所关注的是题目的模式和题型加方法的套路，当然，不管用什么方法能够把题目解出来并不是一件简单的事情，能够做到这一点当然要受到赞赏，然而，如果只是为了解题而解题，只是满足于题目一个一个地解决，这样往往就会题过境迁，就会在题海里找不到明确的方向，也往往只能习惯于常见题型的解决和对常用方法运用自如，而遇到一些稍微困难的题目就可能感到迷惑.这是因为在解题中，没有去注意数学的本质，没有用数学的基本思想去分析题目，指导解题，因此要提高解题的能力和水平，首先就要站在较高的观点上去研究解题，就要从数学的本质上去看待解题，就要在解题中体现数学思想并注意发挥数学思想的功能.

数学思想就是数学的基本观点，是对数学概念、数学方法和数学发现的本质认识.在解题中的数学思想常常体现在这样几个方面，即：函数思想、参数思想、方程思想、分类思想、数形结

合思想和化归思想等等，这些数学思想的名称与通常学习的数学概念、数学方法的名称有些虽然相同，但是数学概念和数学方法本身并不等于数学思想，它们之间有联系，又有区别，这种区别主要表现在不同的层次上.比如学习了函数的定义、函数的性质，并不一定具备函数思想.例如当题目明确了所研究的对象是函数时，会想到如何运用这个函数的性质，而在不明确指出所研究的解题对象是函数的时候，有人就想不到用函数和变化的观点去思考和解决问题，这就说明，只是学习了函数的性质并不等于具备函数的思想；又比如解方程中的消元法，恒等变形的配方法，三角中的诱导公式，几何中的割补法等等都是把问题向简单方向转化的具体方法，是化归思想的具体体现，但化归思想相对于消元法，配方法、诱导公式、割补法等来说则具有较高的层次.这就是说，数学中的一些具体方法都是在一些数学思想指导下产生的，我们在解题中站在数学思想的高度，抓住数学中最本质的东西去思考，就可以高屋建瓴，使解题更加科学化、合理化，就会使解题变被动为主动，就会形成较为完善的解题系统.

一道题目的解题过程，常常是在几种数学思想的指导下完成的.下面我们看一个比较简单的例子.

若不等式

$$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0 \qquad ①$$

对于 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 恒成立，求实数m的范围.

首先注意到①中既出现$\sin\theta$又出现$\cos\theta$，为使解题方便，我们需要化为同一个三角函数，由$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$可以得到只含有$\sin\theta$的不等式

$$\sin^2\theta-2m\sin\theta+2m+1>0. \qquad ②$$

如果把$\sin\theta$和$\cos\theta$理解为两个元素，则这一步工作是指导我们把两个元素转化为一个元素，这是一种从多元向少元的化归，

是化归思想的具体体现。

由于②式是一个三角不等式，只要我们把$\sin\theta$用x来表示又可以转化

设$x=\sin\theta$，由$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$0\leqslant x\leqslant 1$，则本题化为：

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，不等式

$$x^2-2mx+2m+1>0 \qquad ③$$

恒成立，求实数m的范围。

这又是化归思想的具体体现，实现了从三角向代数的化归，这次化归的指导思想是在一般情况下处理代数不等式比处理三角不等式方法规范些，解法容易些。

显然，要使不等式③对$0\leqslant x\leqslant 1$恒成立，只要使$x^2-2mx+2m+1$在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最小值大于零就可以了，这样题目又化归为求$x^2-2mx+2m+1$在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最小值。这又是函数思想起作用，因为我们设

$$f(x)=x^2-2mx+2m+1,\ x\in[0,\ 1]$$

则$f(x)$是定义在$[0,\ 1]$上的函数，我们通过求$f(x)$的最小值并使最小值大于零来求出m的范围。

注意到$f(x)=x^2-2mx+2m+1$，$x\in[0,\ 1]$中含有参数m，因而$f(x)$是一个含参数的二次函数，二次函数的最小值受到变化着的参数m的影响，这又是参数思想。

如果画出函数$f(x)$的图象，其对称轴为$x=m$，显然因为m是参数，则对称轴的位置是变化的，对称轴相对于定义域$x\in[0,1]$的不同位置，$f(x)$的最小值不同，这就需要对$x=m$的不同位置进行分类讨论，这又是分类思想的体现。下面我们就分类求出$f(x)$的最小值，并求出最小值大于零时m的范围。

在讨论$f(x)$的最小值时，我们需要画出$f(x)$的图象，借助图象可以直观地得到$f(x)$的最小值，这要靠数形结合思想作指

导．为此，我们画出$f(x)$的对称轴$x=m$三种不同位置的图象．

第一种情况：$f(x)$的对称轴在区间$[0,1]$的左边，即$m<0$时，此时从图1—1可以看出，$f(0)$为最小值，

解 $f(0)=2m+1>0$

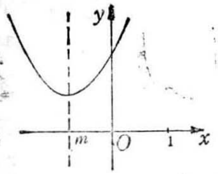


图 1—1

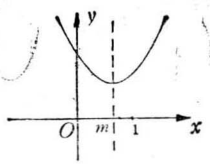


图 1—2

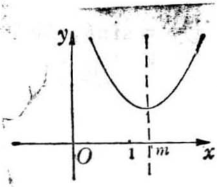


图 1—3

得 $$m>-\frac{1}{2}$$

所以 $$-\frac{1}{2}<m<0.$$

第二种情况：$f(x)$的对称轴在区间$[0,1]$的内部，即$0\leqslant m\leqslant 1$时，此时从图 1—2 可以看出，$f(m)$为最小值，

解 $f(m)=-m^2+2m+1>0$

得 $$1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}.$$

考虑到 $0\leqslant m\leqslant 1$ 可得 $0\leqslant m\leqslant 1$.

第三种情况：$f(x)$的对称轴在区间$[0,1]$的右边，即$m>1$时，此时从图 1—3 可以看出，$f(1)$为最小值，

解 $f(1)=2>0$

得 $$m>1.$$

综合以上三种情况得到所求m的集合为．

$$\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup[0,1]\cup(1,+\infty)=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right).$$

即满足条件的实数m的范围为$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

一个题目的解出就是在这几种思想的综合运用下进行的，我们将在下面几章依次介绍函数思想，参数思想，方程思想，数形结合思想，分类思想和化归思想。当然，用数学思想指导解题有很丰富的内容，我们的介绍不可能面面俱到，作者也没有这个水平做到这一点，我们只是把每一种解题思想中有代表性的内容通过一定数量的例题进行说明，使大家在解题中体会数学思想的指导作用。

二 函数思想

一般受教育者在数学课上应该学会的重要事情是用变量和函数来思考

——F·克莱因

在数学解题中，与我们打交道最多的一件事就是变量，所以为了解题的需要常常要把一个变量看作是另一个或另几个变量的函数，从而把题目转化为对函数的研究；也有时题目中已经直接或间接地给出了某个函数，这时我们就可以充分挖掘和利用这个函数的性质使它为解题服务；还有些题目给出的条件或结论相当有规律，这些规律就会启发我们的创造性思维，运用我们解题的经验和智慧去构造一个新的函数，通过对这个新的函数的研究去达到解题的目的.这些解题的思路都是在函数和变量的思想指导下启发出来的，本章将从一道高考试题的分析谈起，分别介绍以上用函数思想解题的方法.

1. 从一道高考试题谈起

1990年全国高考理工农医类第（26）题第（1）问是这样一个题目：

$$设f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$$

其中a是实数，n是给定的自然数，且$n \geqslant 2$.

如果$f(x)$在$x \in [-\infty, 1]$时有意义，求a的取值范围.

这个题目的入口是通畅的，因为使函数$f(x)$有意义，可以建立不等式

$$\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}>0, \quad x \in (-\infty, 1].$$

这里a是参数，把a分离出来得

$$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right], \quad x \in (-\infty, 1].$$

当计算到这一步时，下面怎样解，往往就不知所措了.

事实上，对于不等式右边的每一项$\left(\frac{k}{n}\right)^x$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$都是一个指数函数，又由于$0<\frac{k}{n}<1$，所以$\left(\frac{k}{n}\right)^x$是$(-\infty, +\infty)$上的减函数，因此$-\left(\frac{k}{n}\right)^x$是$(-\infty, +\infty)$上的增函数.

考虑到$x \in (-\infty, 1]$，所以当$x=1$时，$-\left(\frac{k}{n}\right)^x$取得最大值$-\frac{k}{n}$.

对于以上这些思考，解题者往往想不到，这是为什么呢？

就是因为他没有建立函数思想，没有用函数和变量来思考.

如果明确给出这样一个题目：

判断函数$y=-\left(\frac{k}{n}\right)^x$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1, k, n \in N)$的单调性，并求出$x \in (-\infty, 1]$时函数的最大值.

由于明确地告诉了所研究的对象是一个函数，题目可能会很快地解出来，解题者也不会费什么力气.问题的症结就在于，这

道高考试题并没有明确地告诉解题者$\left(\frac{k}{n}\right)^x$是一个函数，结果就造成了解题的迷惑。

再继续解下去，就要去求参数a的范围。

显然，又要把$-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$看做一个函数，即令

$$g(x)=-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right], x\in(-\infty, 1]$$

我们可以看出，要使

$$a>g(x)$$

成立，只要$g(x)$的最大值小于a成立就可以了。

这又是一个函数思想的问题，即求a的范围，需要考虑函数$g(x)$的最大值。由上面的分析可以知道，$g(x)$的最大值在$x=1$时得到

$$-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{n-1}{2},$$

从而 $$a>-\frac{n-1}{2}.$$

上面的例子说明了什么呢？说明数学概念和数学方法本身并不等于数学思想，即使学习了函数的概念，学习了一大堆函数的性质，在中学学习了几乎所有的基本初等函数，然而却不一定会用变量和函数的观点去思考、去解题。

函数是中学数学的中心课题，函数思想是中学数学特别是高中数学的一条主线。首先，函数思想的建立，使常量数学进入了变量数学，函数的运用，使许多数学问题达到了统一，中学数学中的许多问题，比如方程，不等式，数列，三角等内容都可以归结为函数；在解析几何中也渗透了函数思想，用关于x，y的关系表示的曲线方程，实际上是一个隐函数；在一些实际问题中，

也可以用变量来建立函数关系转化为数学问题来处理，所以用函数思想指导解题，就可以把变量引进数学的解题过程之中，从而使一些与变量有关的题目迎刃而解。

2. 视参数或代数式为函数

有一些题目常常涉及求某一个参数或某一个代数式的范围，这时，这个参数或代数式就是一个变量，用函数思想来思考就可以把这个待求范围的参数或代数式看作某一字母的函数。

例1. 已知两条曲线：椭圆C_1：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$和圆$C_2$：$x^2+(y+1)^2=r^2\ (r>0)$，问$r$为何值时，两条曲线没有公共点。

一般的解法是：从C_1和C_2的方程中消去一个未知数（比如x）得到一个方程

$$-\frac{5}{4}y^2+2y+10-r^2=0 \qquad ①$$

因为C_1和C_2没有公共点，所以方程①的根的判别式小于零，即

$$\Delta=4-4\left(-\frac{5}{4}\right)(10-r^2)<0$$

解得 $r>\sqrt{\frac{54}{5}}$ 或 $r<-\sqrt{\frac{54}{5}}$（舍去）。

这就是说使两曲线无公共点的r的范围为$r>\sqrt{\frac{54}{5}}$。

这个结果是不是正确呢？我们可以画一画这两个方程表示的曲线：C_1是长半轴为3，短半轴为2，以（0，0）为中心，两坐标轴为对称轴且长轴在x轴上

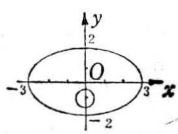


图 2—1

的椭圆，C_2是以（0，-1）为圆心的一族同心圆．当$r>\sqrt{\frac{54}{5}}$时，椭圆C_1在圆C_2的内部，显然没有交点，然而，当$0<r<1$时，圆C_2在椭圆C_1的内部（图2—1）也没有公共点．但是上面的解法中没有得出$0<r<1$这个结果．

显然，解法出了毛病！

现在我们换一个思路：由方程①变形为

$$r^2=-\frac{5}{4}y^2+2y+10$$

即把r^2看作是y的函数．

由椭圆C_1的性质可知，y满足$-2\leqslant y\leqslant 2$，因此C_1与C_2有交点的r的集合就相当于求函数

$$r^2=f(y)=-\frac{5}{4}y^2+2y+10,\quad y\in[-2,\ 2]$$

的值域．

$f(y)$的图象是抛物线的一部分，它的值域可以通过求$f(y)$的图象在端点$y=-2$，$y=2$及顶点$y=\frac{4}{5}$的纵坐标得到．由

$$f(-2)=1,\quad f(2)=9,\quad f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{54}{5}$$

可知，$f(y)$的值域满足

$$1\leqslant f(y)\leqslant\frac{54}{5}\qquad\text{即}\quad 1\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{54}{5}}.$$

它的补集就是C_1和C_2无公共点的r的范围．即当$0<r<1$或$r>\sqrt{\frac{54}{5}}$时，C_1和C_2无公共点．

这个例题就是通过把r看作y的函数，使解析几何的问题函数化了．