学者书屋系列

非线性数学物理方程的精确解

杜兴华◎著

经典

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

学者书屋

非线性数学物理方程的精确解

杜兴华　著

哈尔滨工程大学出版社

内容提要

本书系统介绍了求非线性数学物理方程精确解的两种方法,即多项式完全判别系统法和试探方程法。作者利用这两种方法求解了许多非线性数学物理方程的大量精确解。本书还在广泛研究射影 Riccati 方程方法的基础上,以多项式型的非线性微分方程为例,给出了射影 Riccati 方程方法的统一格式,指出了该方法的局限性,并用此法求出了若干非线性数学物理方程的精确解。

本书可作为数学、力学、物理专业的研究生用教材,也可供非线性科学领域的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性数学物理方程的精确解/杜兴华著. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社, 2010.5

ISBN 978-7-81133-774-7

Ⅰ.①非… Ⅱ.①杜… Ⅲ.①非线性-数学物理方程 Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 085312 号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	黑龙江省教育厅印刷厂印刷
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	6
字　　数	140 千字
版　　次	2010 年 5 月第 1 版
印　　次	2010 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	18.80 元

http://press.hrbeu.edu.cn

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

寻求非线性数学物理方程的精确解是非线性科学研究的核心问题之一,可是由于非线性方程的复杂性，不可能有统一的求解方法,但经过众多科学家的努力，人们目前已经建立和发展了许多各具特色的构造精确解的有效方法，如反散射方法[1]、Backlunud 法[2,3,4]，Darboux 变换法[5,6]、Hirota 双线性法[1]、延拓法[7,8]、Painleve 分析法[9,10]、Lie 群法[11,12]、Tanh 函数法[13-19]等. 特别是近年来，随着计算机代数理论的发展,人们可以运用 Maple 或 Mathematica 等程序便捷地求解复杂、冗长的非线性代数方程组,从而为求解非线性数学物理方程的精确解提供了有力的工具. 尽管如此,仍有大量的具有实际背景的非线性数学物理方程,需要新的方法才能求出其精确解.

对于非线性数学物理方程,为求它们的精确行波解,首先要把这些方程约化成非线性常微分方程. 在很多情形下,这些非线性常微分方程是多项式形式. 对于多项式型的非线性微分方程,可以分为两类:一类是秩齐次的,另一类是秩非齐次的. 对于不是多项式形式的非线性方程，大多可以通过变换化成多项式形式，因此研究这些方程是具有比较普遍意义的. 为求这些方程的解，刘成仕提出了两个非常有效的方法，一个就是对于能直接化成初等积分形式的方程，利用多项式的完全判别系统,求出原方程的所有可能的单行波解. 在这本书里，我们将这一方法统称为多项式完全判别系统法[20-26,38,63]. 另一个就是试探方程法[27-29,34,77],这种方法从方程的自身结构着手，对非线性常微分算子进行因子分解，即使方程本身不可积，也可以分出一个可积的子方程，这样就得到了它的部分精确解,这在求解观念上是一个大的改变. 同时，这一方法有着深刻的理论基础. 随着这一方法的不断发展，它不仅适用于许多秩齐次方程，对于许多秩非齐次方程也适用. 利用这两种新方法，不仅可以求出许多非线性数学物理方程的精确解，还可以求出许多由其他方法得不到的新解[24,25,28]，并且这两种方法更直接，更简捷. 目前还没有专门介绍这两种研究方法的书籍，对于欲了解、掌握该研究方法的人们只能从零散的有关文献中去寻找学习，这给学习者和研究者带来很大不便. 因此，本书系统完整地介绍了这两种方法，并利用这两种方法求解许多非线性数学物理方程的精确解，使读者通过本书能完全、系统、有效地掌握该方法，以适用于今后的非线性研究.

本书第一部分介绍多项式完全判别系统法. 这一部分共分 5 章. 第 1 章首先简单介绍了多项式完全判别系统法,并且给出了二阶至五阶多项式的完全判别系统. 第 2 章具体介绍二阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 2 + 1 维广义 Hirota 方程和 Maccari' s 方程组的精确解，其中包括许多新解. 第 3 章具体介绍三阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 2 + 1 维 Zakharov-Kuznetsov 方程、Kadmtsev-Petviashvili 方程、2 + 1 维 Bousenisq 方程、正则长波方程和 Pochharmer-Chree 方程的精确解,其他包括许多新解. 第 4 章具体介绍四阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 Medium Equal Width 方程、正 Gardner 方程、非线性耦合标量场方程的精确解,其中包括大量新解. 第 5 章具体介绍五阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了带有四阶非线性项的 $D+1$ 维 Klein-Gordon 方程、带有任意阶非线性项的混合 KdV 方程以及不带耗散项的广义 KP 方程的精确解，其中包括大量新解. 事实上，所求这些方程的精确解，都是原方程的所有单行波解的分类，这些完备的结果用其他展开方法是不可能得

到的.

第二部分介绍试探方程法. 这一部分共分7章，详细介绍了多项式试探方程法、有理试探方程法和无理试探方程法. 前4章分别针对秩齐次和秩非齐次方程给出了四种多项式试探方程法，并且作为应用，求出了1+1维 Camassa-Holm 方程、Tzizeica-Dodd-Bullough 方程等11个非线性数学物理方程的精确解，其中包括很多新解. 第5章和第6章分别给出了有理试探方程法和无理试探方程法，并分别用这两种方法求出了2+1维 KdV-Burgers 方程和 RLW-Burgers 方程、耗散双 Sine-Gordon 方程的精确解. 第7章给出了推广的无理试探方程法，作为更一般的方法，能求解更多的非线性数学物理方程. 作为应用求出了 Fujimoto-Watanabe 方程的精确解.

多年来，人们不断改进已有的求解方法，并且努力寻找各种新方法，使得过去一些难以求解的方程得到解决，而且不断发现许多非线性数学物理方程有重要意义的新解. 比如射影 Riccati 方程方法是构造非线性数学物理方程精确解的一种有效方法，人们多年来不断研究改进这个方法，并且利用各种 Riccati 方程发现其他新方法. 但是该方法的理论基础往往被忽略.

因此本书第三部分就是对射影 Riccati 方程方法进行理论研究. 这一部分共分2章. 第1章在广泛研究射影 Riccati 方程方法的基础上，以多项式型的非线性微分方程为例，给出了射影 Riccati 方程方法的统一格式. 同时研究了这个方法的数学基础，得到该方法的主要结论，指出了射影 Riccati 方程方法的局限性. 第2章作为这个方法的应用，求出了 Fitzhugh-Nagumo 方程、BBM-Burgers 方程和广义 KPP 方程的精确解.

本书求解的非线性数学物理方程，主要是作者近年将本书所述方法在众多非线性数学物理方程应用的一部分，有些是已经发表了的，有些是新的结果，但为方便读者，力求内容详细全面，还是将其写在此书中.

本书在编写与出版过程中，得到了刘成仕教授的建议与帮助，得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

作　者

2010年4月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第1编　多项式完全判别系统法及其应用

第2编　试探方程法及其应用

第3编 射影 Riccati 方程方法的统一格式及其应用

第 1 编　多项式完全判别系统法及其应用

在这一部分，利用多项式的完全判别系统法[20-26,38,63]，来寻求若干非线性数学物理方程的所有单行波解的分类.

第 1 章　多项式完全判别系统法概述

为寻求某些非线性数学物理方程的精确行波解，我们常常将这些方程约化成如下常微分方程

$$u'(\xi) = G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \tag{1.1.1}$$

其中，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 是参数，那么方程(1.1.1)可写成积分形式

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{\mathrm{d}u}{G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)} \tag{1.1.2}$$

因此，为求解方程(1.1.1)，我们只需求解积分式(1.1.2). 根据不同的参数，我们可以给出积分式(1.1.2)的不同解. 但是确定参数的范围是相当困难的. 因此，最重要的步骤就是确定参数的范围及相应的积分解. 刘成仕首次应用一种称作多项式完全判别系统[30,22,21,26]的新的数学工具很好地解决了这个问题. 利用多项式的完全判别系统，我们可以给出积分式(1.1.2)的所有解的分类，从而求出原非线性数学物理方程相应的所有单行波解的分类. 为明确起见，这里把由求解一个积分而得到的方程的解叫做原子解[24]. 在这本书里，我们仅考虑原子解. 对于许多非线性数学物理方程，它们的精确行波解都是某些形如积分式(1.1.2)的解，其中 $G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 常常和一些多项式有关. 通过利用多项式完全判别系统求解积分式(1.1.2)就可以求出这些数学物理方程的精确解，它们是该方程所有单行波解的分类. 这就是所谓的多项式完全判别系统法.

多项式的完全判别系统是二阶多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的自然推广. 但是对于高阶多项式，要得到相应的完全判别系统却非常困难. 1996 年，杨路等[30]解决了这个问题. 在计算机代数的帮助下，他们给出了计算多项式完全判别系统的算法. 比如三阶多项式 $F(w) = w^3 + d_2w^2 + d_1w + d_0$，它的完全判别系统是

$$\begin{cases} \Delta = -27\left(\dfrac{2d_2^3}{27} + d_0 - \dfrac{d_1d_0}{3}\right)^2 - 4\left(d_1 - \dfrac{d_2^2}{3}\right)^3 \\ D_1 = d_1 - \dfrac{d_2^2}{3} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

四阶多项式 $F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r$ 的完全判别系统[26]

$$\begin{cases} D_1 = 4 \\ D_2 = -p \\ D_3 = -2p^3 + 8pr - 9q^2 \\ D_4 = -p^3q^2 + 4p^4r + 36pq^2r - 32p^2r^2 - \dfrac{27}{4}q^4 + 64r^3 \\ E_2 = 9p^2 - 32pr \end{cases} \tag{1.1.4}$$

五阶多项式 $F(w) = w^5 + pw^4 + qw^2 + rw + s$ 的完全判别系统[20,24,30]

$$\begin{cases} D_2 = -p \\ D_3 = 40rp - 12p^3 - 45q^2 \\ D_4 = -4p^3q^2 + 12p^4r + 117pq^2r - 88p^2r^2 - 40qsp^2 - 27q^4 + 160r^3 - 300qrs \\ D_5 = -1\,600qsr^3 - 3\,750pqs^3 + 2\,000ps^2r^2 - 4p^3q^2r^2 + 16p^3q^3s - 900rs^2p^3 + \\ \quad 825p^2q^2s^2 + 144pq^2r^3 + 2\,250rq^2s^2 + 16p^4r^3 + 108p^5s^2 - 128r^4p^2 - \\ \quad 27r^2q^4 + 108sq^5 + 256r^5 + 3125s^4 - 72rsqp^4 + 560sqr^2p^2 - 630prsq^3 \\ E_2 = 160r^2p^3 + 900q^2r^2 - 48rp^5 + 60rp^2q^2 + 1\,500pqrs + 16q^2p^4 - \\ \quad 1\,100qsp^3 + 625s^2p^2 - 3\,375sq^3 \\ F_2 = 3q^2 - 8rp \end{cases} \tag{1.1.5}$$

利用这些完全判别系统，我们可以求得许多非线性数学物理方程的所有单行波解的分类，并且可以得到许多其他方法没有得到的新解.

第2章 二阶多项式完全判别系统法及其应用

2.1 二阶多项式完全判别系统法

如果一个非线性数学物理方程,经过行波变换后能够约化成以下常微分形式

$$(u')^2 = au^2 + bu + c \tag{1.2.1}$$

那么,只要我们能给出方程(1.2.1)的所有解的分类,则原非线性数学物理方程的所有单行波解的分类就都能给出.下面便给出方程(1.2.1)的所有解的分类.

首先将式(1.2.1)写成积分形式

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2 + bu + c}} \tag{1.2.2}$$

这里我们记 $F(u) = au^2 + bu + c$,其多项式完全判别系统,也就是所谓的判别式,即 $\Delta = b^2 - 4ac$.那么积分式(1.2.2)的解有以下三种情形.

情形1: $\Delta = 0$.此时 $F(u) = 0$ 有一个二重实根,即

$$F(u) = a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2$$

若 $a > 0$,积分式(1.2.2),相应的得到方程(1.2.1)的解为

$$u_1 = \pm \exp[\pm\sqrt{a}(\xi - \xi_0)] - \frac{b}{2a}$$

情形2: $\Delta > 0$.此时 $F(u) = 0$ 有两个不相等的实根,则

$$F(u) = a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

相应的得到积分式(1.2.1)的解为

$$u_2 = \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} + \frac{b^2 - 4ac}{8a^2}\mathrm{e}^{\mp\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} \mp \frac{b}{2a} \quad (a > 0)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2a}\{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\sin[\pm\sqrt{-a}(\xi - \xi_0)] + b\} \quad (a < 0)$$

情形3: $\Delta < 0$.此时 $F(u) = 0$ 没有实根.当 $a > 0$ 时,相应的得到积分式(1.2.1)的解依然为

$$u = \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} + \frac{b^2 - 4ac}{8a^2}\mathrm{e}^{\mp\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} \mp \frac{b}{2a}$$

2.2 2+1维广义Hirota方程的精确解

考虑2+1维广义Hirota方程[31-33,93]

$$iu_t + u_{xy} + iu_{xxx} + uv - i|u|^2u_x = 0 \tag{1.2.3}$$

$$3v_x + (|u|^2)_y = 0 \tag{1.2.4}$$

我们首先作以下变换，$u=\exp(i\theta)U(\xi)$，$v=V(\xi)$，$\theta=px+qy+rt$，以及 $\xi=x+dy+et$，将方程(1.2.3)和方程(1.2.4)变换成如下形式

$$(e+q+pd-3p^2)U'-U^2U'+U'''=0 \tag{1.2.5}$$

$$(p^3-r-pq)U+UV+pU^3+(d-3p)U''=0 \tag{1.2.6}$$

$$V=-\frac{d}{3}U^2+c \tag{1.2.7}$$

其中，c 是积分常数. 对方程(1.2.5)积分一次并把方程(1.2.7)代入式(1.2.6)得

$$(e+q+pd-3p^2)U-\frac{1}{3}U^3+U''=d_0 \tag{1.2.8}$$

$$(p^3-r-pq+c)U+\left(-\frac{d}{3}+p\right)U^3+(d-3p)U''=0 \tag{1.2.9}$$

为了使方程(1.2.8)和方程(1.2.9)相容，我们令

$$d_0=0, c=(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3 \tag{1.2.10}$$

在条件(1.2.10)下，方程(1.2.8)和方程(1.2.9)是同一方程. 积分方程(1.2.8)，相应地有

$$(U')^2=\frac{1}{6}U^4-(e+q+pd-3p^2)U^2+c_1 \tag{1.2.11}$$

其中，c_1 是任意常数. 为了求解方程(1.2.11)，作变换，$w=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}U$，$\xi_1=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi$，使方程(1.2.11)变为

$$w_{\xi_1}^2=w^4+p_1w^2+p_2 \tag{1.2.12}$$

其中，$p_1=-\sqrt{6}(e+q+pd-3p^2)$，$p_2=c_1$.

令 $w^2=\psi$，并将其代入方程(1.2.12)得

$$\psi_{\xi_1}^2=4\psi(\psi^2+p_1\psi+p_2) \tag{1.2.13}$$

再积分方程(1.2.13)，得

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{\psi F(\psi)}}=\pm 2(\xi_1-\xi_0) \tag{1.2.14}$$

其中，$F(\psi)=\psi^2+p_1\psi+p_2$，且 ξ_0 是积分常数. 令 $\Delta=p_1^2-4p_2$ 为二阶多项式 $F(\psi)$ 的判别式，根据 $F(\psi)$ 的根的情况，方程(1.2.14)的解有四种情形.

情形1：$\Delta=0$. 由于 $\psi>0$，则有

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\int\frac{d\psi}{\left(\psi+\frac{p_1}{2}\right)\sqrt{\psi}} \tag{1.2.15}$$

若 $p_1<0$，则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\sqrt{\frac{2}{-p_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\psi}-\sqrt{-p_1}}{\sqrt{2\psi}+\sqrt{-p_1}}\right|$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right] \tag{1.2.16}$$

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\coth^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right] \tag{1.2.17}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

若 $p_1>0$,则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=-2\sqrt{\frac{2}{p_1}}\arctan\sqrt{\frac{2\psi}{p_1}}$$

相应地,方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{p_1}{2}\tan^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]\tag{1.2.18}$$

若 $p_1=0$,则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\frac{-2}{\sqrt{\psi}}$$

相应地,方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{1}{(\xi_1-\xi_0)^2}\tag{1.2.19}$$

情形2:$\Delta>0,p_2=0$. 由于 $\psi>-p_1$,故方程(1.2.14)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi\sqrt{\psi+p_1}}\tag{1.2.20}$$

根据情形1,方程(1.2.20)的解有如下情况:

若 $p_1>0$,则方程(1.2.20)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\sqrt{\frac{2}{p_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(\psi+p_1)}-\sqrt{p_1}}{\sqrt{2(\psi+p_1)}+\sqrt{p_1}}\right|$$

相应地,方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{p_1}{2}\tanh^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1\tag{1.2.21}$$

$$\psi=\frac{p_1}{2}\coth^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1\tag{1.2.22}$$

若 $p_1<0$,则方程(1.2.20)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=-2\sqrt{-\frac{2}{p_1}}\arctan\sqrt{\frac{2(\psi+p_1)}{-p_1}}$$

相应地,方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\tan^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1\tag{1.2.23}$$

情形3:$\Delta>0,p_2\neq 0$. 假设 $\alpha<\beta<\gamma$,且其中有一个为零,其余两个是 $F(\psi)$ 的两个根. 由于 $\alpha<w<\beta$,作变换 $\psi=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi$,由方程(1.2.14)有

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\frac{2}{\sqrt{\gamma-\alpha}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\tag{1.2.24}$$

其中,$m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

根据方程(1.2.24)及 Jacobi 椭圆函数 sn 的定义,得

$$\mathrm{sn}^2(\pm\sqrt{\gamma-\alpha}(\xi_1-\xi_0),m)=\sin^2\varphi=\frac{\psi-\alpha}{\beta-\alpha}\tag{1.2.25}$$

即得方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi = \alpha + (\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m) \tag{1.2.26}$$

若 $V > \gamma$,作变换 $\psi = \dfrac{-\beta\sin^2\varphi + \gamma}{\cos^2\varphi}$,并代入方程(1.2.14),类似地,可得方程(1.2.13)的显式解

$$\psi = \frac{-\beta\mathrm{sn}(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m) + \gamma}{\mathrm{cn}(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m)} \tag{1.2.27}$$

情形4:$\Delta < 0$. 因为 $\psi > 0$,作如下变量替换

$$\psi = \sqrt{p_2}\tan^2\frac{\varphi}{2} \tag{1.2.28}$$

将式(1.2.28)代入方程(1.2.14)得

$$\pm 2(\xi_1 - \xi_0) = p_2^{-\frac{1}{4}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{1.2.29}$$

其中,$m^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p_1}{2\sqrt{p_2}}\right)$.

根据方程(1.2.29)及 Jacobi 椭圆函数 cn 的定义,得

$$\mathrm{cn}(2(p_2)^{\frac{1}{4}}(\xi_1 - \xi_0), m) = \cos\varphi \tag{1.2.30}$$

再由方程(1.2.28),可得

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{p_2}}{\psi + \sqrt{p_2}} - 1 \tag{1.2.31}$$

比较方程(1.2.30)和方程(1.2.31),因为 $\psi > 0$,所以有方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi = \frac{2\sqrt{p_2}}{1 + \mathrm{cn}(2p_2^{\frac{1}{4}}(\xi_1 - \xi_0), m)} - \sqrt{p_2} \tag{1.2.32}$$

由以上可知,式(1.2.16)~式(1.2.19),式(1.2.21)~式(1.2.23),式(1.2.26),式(1.2.27),及式(1.2.32)是方程(1.2.13)的所有可能的解. 从而就能够写出相应参数条件下方程(1.2.11)的所有精确解,再由式(1.2.7)进而给出方程(1.2.3)和方程(1.2.4)的所有的包络行波解

$$u_1(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px + qy + rt)]\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)} \times$$
$$\tanh\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right],$$

$$v_1 = -d(e + q + pd - 3p^2)\tanh^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right] +$$
$$(e + q + pd - 3p^2)(d - 3p) + r + pq - p^3$$

$$u_2(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px + qy + rt)]\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)} \times$$
$$\coth\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right]$$

$$v_2 = d(e+q+pd-3p^2)\coth^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+$$

$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_3(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$

$$\tan\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]$$

$$v_3 = -d(e+q+pd-3p^2)\tan^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+$$

$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_4(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt[4]{6}}{\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0}\exp[i(px+qy+rt)]$$

$$v_4 = -\frac{\sqrt{6}d}{3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)^2}+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_5(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$

$$\sqrt{\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_5 = -\frac{d}{2}[-2(e+q+pd-3p^2)]\tanh^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$

$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_6(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$

$$\sqrt{\coth^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_6 = -\frac{d}{2}[-2(e+q+pd-3p^2)]\coth^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$

$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_7(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{2(e+q+pd-3p^2)}\times$$

$$\sqrt{\tan^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_7 = -\frac{d}{2}[2(e+q+pd-3p^2)]\tan^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$

$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_8(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}$$

$$v_8 = -\frac{d}{3}\sqrt{6}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)\right]+$$
$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_9(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6}\sqrt{\frac{-\beta\mathrm{sn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}{\mathrm{cn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}}\exp[i(px+qy+rt)]$$

$$v_9 = -\frac{\sqrt{6}d}{3}\frac{-\beta\mathrm{sn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}{\mathrm{cn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_{10}(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6p_2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{\frac{2}{1+\mathrm{cn}\left(2p_2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}-1}$$

$$v_{10} = -\frac{d\sqrt{6p_2}}{3}\left[\frac{2}{1+\mathrm{cn}\left(2p_2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}-1\right]+$$
$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

2.3 Maccari's 方程组的精确解

考虑 Maccari's 方程组[35-37,103]

$$iq_t+q_{xx}+qR=0 \tag{1.2.33}$$
$$R_t+R_y+(|q|^2)_x=0 \tag{1.2.34}$$

我们先作如下规范变换，$q(x,y,t)=u(x,y,t)\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]$，再作行波变换，$u=u(\xi)$，$R=R(\xi)$，$\xi=p(x+ny-2kt)$，则方程(1.2.33)，方程(1.2.34)变成

$$p^2u''-(\lambda+k^2)u+uR=0 \tag{1.2.35}$$
$$(n-2k)R'+(u^2)'=0 \tag{1.2.36}$$

将方程(1.2.36)积分一次，且令积分常数为零，得 $R=-\frac{1}{n-2k}u^2$. 将其代入方程(1.2.35)，则方程(1.2.35)约化成一个常微分方程

$$u''=\frac{1}{p^2(n-2k)}u^3+\frac{\lambda+k^2}{p^2}u \tag{1.2.37}$$

将方程(1.2.37)积分一次，得

$$(u')^2=a_4u^4+a_2u^2+a_0 \tag{1.2.38}$$

其中，$a_4=\frac{1}{2p^2(n-2k)}$，$a_2=\frac{\lambda+k^2}{p^2}$，$a_0$ 是任意常数.

令

$$\left.\begin{aligned} u &= \pm\sqrt{(4a_4)^{-\frac{1}{3}}w} \\ b_1 &= 4a_2(4a_4)^{-\frac{2}{3}} \\ b_0 &= 4a_0(4a_4)^{-\frac{1}{3}} \\ \xi_1 &= (4a_4)^{\frac{1}{3}}\xi \end{aligned}\right\} \tag{1.2.39}$$

则方程(1.2.38)变成

$$(w_{\xi_1})^2 = w(w^2 + b_1 w + b_0) \tag{1.2.40}$$

将方程(1.2.40)用初等积分重新表示

$$\pm(\xi_1 - \xi_0) = \int \frac{dw}{\sqrt{w(w^2 + b_1 w + b_0)}} \tag{1.2.41}$$

根据二阶多项式完全判别系统法,积分式(1.2.41)的所有解的分类都可以给出. 和前一节的方法一样,容易求得 Maccari's 方程组(1.2.33),方程组(1.2.34)的所有包络精确行波解

$$q_1(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(2k - n)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \tanh\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_1 = (\lambda + k^2)\tanh^2\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_2(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(2k - n)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \coth\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_2 = (\lambda + k^2)\coth^2\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_3(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(n - 2k)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \tan\left\{\left[\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_3 = -(\lambda + k^2)\tan^2\left\{\left[\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_4(x,y,t) = \pm\frac{2}{\left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{2}}\xi - \left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{6}}\xi_0} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)]$$

$$R_4 = -\frac{4\left[\frac{p^2}{2(n - 2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}}}{[2(n - 2k)^2]^{\frac{1}{3}}\left\{\left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right\}^2}$$

$$q_5(x,y,t) = \pm\sqrt{2(\lambda + k^2)(n - 2k)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left[\left(\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_5=-2(\lambda+k^2)\left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left[\left(\frac{(\lambda+k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\right]-1\right\}$$

$$q_6(x,y,t)=\pm\sqrt{2(\lambda+k^2)(n-2k)}\times\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]\times$$
$$\left\{\frac{1}{2}\coth^2\left[\left(\frac{(\lambda+k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\right]-1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_6=-2(\lambda+k^2)\left\{\frac{1}{2}\coth^2\left[\left(\frac{(\lambda+k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\right]-1\right\}$$

$$q_7(x,y,t)=\pm\sqrt{2(\lambda+k^2)(2k-n)}\times\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]\times$$
$$\left\{\frac{1}{2}\tan^2\left[\left(\frac{-(\lambda+k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\right]+1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_7=2(\lambda+k^2)\left\{\frac{1}{2}\tan^2\left[\left(\frac{-(\lambda+k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\right]+1\right\}$$

$$q_8(x,y,t)=\pm\left[\frac{p^2(n-2k)}{2}\right]^{\frac{1}{6}}\times\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]\times$$
$$\left\{\alpha+(\beta-\alpha)\operatorname{sn}^2\left[\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right),m\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_8=-\left[\frac{p^2}{2(n-2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\left\{\alpha+(\beta-\alpha)\operatorname{sn}^2\left[\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right),m\right]\right\}$$

$$q_9(x,y,t)=\pm\left[\frac{p^2(n-2k)}{2}\right]^{\frac{1}{6}}\times\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]\times$$
$$\left[\frac{-\beta\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\Big/2,m\right)+\gamma}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\Big/2,m\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_9=\left[\frac{p^2}{2(n-2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\times\frac{\beta\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\left(\frac{p^2(n-2k)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\Big/2,m\right)-\gamma}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\left(\frac{p^2(n-2k)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right)\Big/2,m\right)}$$

$$q_{10}(x,y,t)=\pm[2a_0p^2(n-2k)]^{\frac{1}{4}}\times\exp[i(kx+\alpha y\mp\lambda t+l)]\times$$
$$\left[\frac{2}{1+\operatorname{cn}\left[(32a_0^3p^2(n-2k))^{\frac{1}{12}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi-\xi_0\right),m\right]}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com