高等数学

（基础版）

湘潭大学文科高等数学教学改革课题组　编

科学出版社
www.sciencep.com

高 等 数 学

（基础版）

湘潭大学文科高等数学教学改革课题组　编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书将高等数学的主干内容——一元函数微积分与多元函数微积分有机地结合起来，针对文科类（含经济、管理类）专业对高等数学的不同要求，将课程内容分成若干模块. 本书分基础版与加强版两册出版，本册为基础版，所含内容为必修模块，包括函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步，每节后配有习题，习题分 A，B 两组，A 组为基础题，B 组为综合题. 书末附有部分习题参考答案、常用的数学公式、符号与希腊字母、常用积分公式；加强版为选修模块，包括极限、连续与导数续论、中值定理与导数应用、函数积分学与无穷级数、微分方程与差分方程. 学生可根据专业的不同要求选修相关内容.

本书体系完整、结构严谨、逻辑清晰、叙述清楚、通俗易懂，例题与习题较多，可供高等院校文科类（含经济、管理类）专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 基础版/湘潭大学文科高等数学教学改革课题组编. —北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-027907-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①湘… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 107951 号

责任编辑：王 静 张中兴 / 责任校对：纪振红
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1—5 000 字数：290 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

中学新课程标准已在全国范围内铺开. 在数学新课程标准中，部分属于大学数学的教学内容下放到中学，而以往部分属于初等数学的教学内容没有涉及；并且在教学中提倡选用与生活实际密切相关的素材、现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现数学的概念、结论，体现数学的思想、方法，忽略一些抽象的推理与证明.

为了更好地与中学数学教学相衔接，帮助文科类（含经济、管理类）专业的学生理解高等数学的基础知识，掌握基本的方法与技能，我们组织了数位工作在教学一线的中青年教师，针对模块化教学的特点，结合自身多年的教学实践和教学经验，考虑到不同专业的要求和跨专业学习的需求，保持学生学习的统一性与连贯性，按照知识点由浅入深、由粗到细的原则，编写了本书的基础版和加强版. 本书采用与传统教材不一样的分级模块形式，各分级模块由相应的子模块组成，可作为高等院校文科类（含经济、管理类）专业的高等数学课教材.

在基础版中，我们放弃传统意义下的经典. 尽可能地绕开数学的抽象，力图以直观、描述性的形式来展示数学的内涵，例如，不介绍极限的“ε-N，ε-δ”定义. 而对于知识点则力图广泛涉及，即追求宽度、广度而不是深度，例如，不局限于一元函数的讲授. 基础版适合全体文科类（含经济、管理类）专业选用.

在加强版中，我们力求重拾传统的经典. 针对学生的学习要求，培养对数学抽象的理解，让他们尽可能地理解高等数学的专业术语，养成严格的数学思维，能够较好地利用数学工具. 以严谨、抽象的形式来展示数学的内涵，增加对知识点进一步的理解与掌握，尽量做到刨根究底，追求深度. 加强版适合经济、管理类专业选用.

本书的编写得到湘潭大学教务处、数学与计算科学学院的大力支持.

由于我们水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月于湘潭

目　　录

数学是在一切领域中建立真理的方式.

——笛卡儿(Descartes)

第 1 章　函数与极限基础

静止是相对的，运动是绝对的，如何描述事物的运动状态是高等数学与初等数学对函数研究的关键区别. 函数与极限是高等数学这门课程最基本的核心概念，其中如何理解极限概念既是重点又是难点，而且会直接影响到后续章节的学习.

本章从简单介绍 $\mathbf{R}^n$ 空间入手，试图通过几何直观到数学的抽象来思考问题，研究函数及其图形，给出极限的几种具体表述形式，并介绍一些简单极限的计算方法.

1.1　$\mathbf{R}^n$ 空间简介

1. 了解 $\mathbf{R}^n$ 空间、距离、邻域等基本概念；
2. 熟知 $\mathbf{R}^n$ 空间的距离公式；
3. 注意区分 $\mathbf{R}^1$ 空间中几类常见邻域的异同.

1.1.1　$\mathbf{R}^n$ 空间

空间不是一个陌生的词语，人们常说：生存空间、生活空间、私人空间等. 如何描述空间呢？在数学上，空间是由满足一定“关系”的点组成的集合. 研究空间就是研究如何确定空间中的点及其关系. 例如，当描述一个物体在空间中的位置时，我们通常可以采用以下三种不同的描述方式：一是按“上下、东西、南北”的方式；二是按“上下、前后、左右”的方式；三是按“内外”的方式. 其共同的特点是，必须选择一个具体参照物的位置为基准点（参照点），然后才可以进行正确的描述.

人们常说数学的美在于抽象. 例如，对于“上下、前后、左右”的描述方式，如果只考虑其中一对方向上的位置，则可抽象成一条用带方向的直线——数轴（常用字母 $x, y, z, \cdots$）来表示. 习惯上，如果该直线是左右方向（或说水平）的，则选右方为正向；如果该直线是上下方向的，则选上方为正向；如果该直线是前后方向的，则选前方为正向.

下面以考虑“左右”方向为例：以坐标原点 O 表示参照点，一条水平方向的数轴（图 1.1），若得知点在 $x_1=-3$ 处，我们就可以明确该位置是在坐标原点 O 的左侧，距离坐标原点 O 为 3 个单位长度的地方. 同理，若得知点在 $x_2=3$ 处，可以明确该位置是在坐标原点 O 的右侧，距离坐标原点 O 为 3 个单位长度的地方.

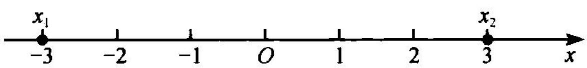

图 1.1

在直线上任意选定一个原点 O、一个正向(正向有两种可能的情形)和一个单位长度,该直线就叫做数轴.

这里借助符号"+"和"－"号来表示正向和负向,用数值的大小来表示点与原点 O 的距离. 因此,数轴上的点和实数之间建立了一种"一一对应"关系,即不仅数轴上每一点 P 确定唯一的一个实数 x,而且每一个实数 x 也确定数轴上唯一的一点 P. 我们常常将点 P 称为点 x,而不加以区分. 若以 O 为起点,P 为终点,则可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{OP}$,且有

$$\overrightarrow{OP} = x,$$

如图 1.2 所示.

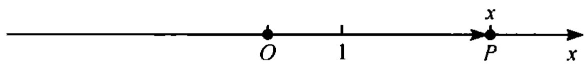

图 1.2

对应于数轴上一点 P 的实数 x 也叫做 P 点的坐标,数轴也可以称为坐标轴,用 Ox 表示,对应地称为 x 轴.

跟现实生活中一样,当既要考虑"左右"方向,又要考虑"前后"方向时,对此我们在中学数学中借助两条相互垂直的数轴来表示,即平面直角坐标系,如图 1.3 所示.

我们借助有序实数对(x,y)来表示平面所有点的位置,类似于数轴的情形,平面上的点和实数对(x,y)之间建立了一种"一一对应"关系,即不仅平面上每一点 P 确定唯一的一个实数对(x,y),而且每一个实数对(x,y)也确定平面上唯一的一点 P. 我们也常常将点 P 称为点(x,y),而不加以区分. 若以 O 为起点,P 为终点,则可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{OP}$,且有

$$\overrightarrow{OP} = (x,y),$$

如图 1.4 所示.

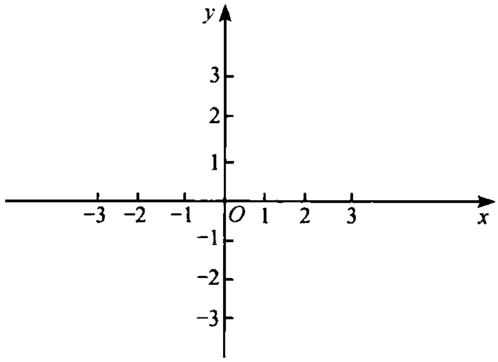

图 1.3

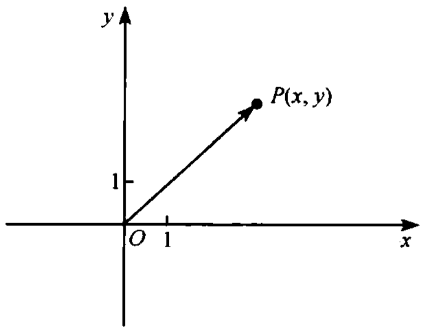

图 1.4

对应于平面上一点 P 的有序实数对 (x,y) 叫做点 P 的**坐标**，数轴称为**坐标轴**，分别用 Ox 和 Oy 表示，对应地分别称为 x **轴**和 y **轴**，或**横轴**和**纵轴**.

当我们不仅要考虑"左右"与"前后"位置关系，而且还要考虑"上下"位置时，那么跟平面直角坐标系类似，可建立空间直角坐标系来描述，即如图 1.5 所示：过空间定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，并且通常取相同的单位长度，这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴.

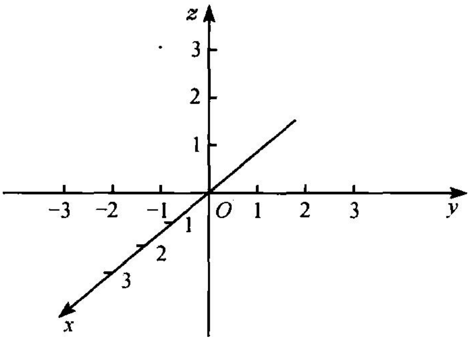

图 1.5

各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定(图 1.6)：

以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正向，以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向. 这个法则叫做**右手法则**.

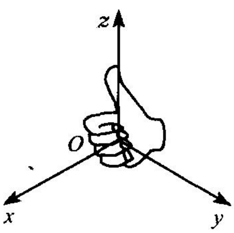

图 1.6

类似平面的情形，我们借助有序实数组 (x,y,z) 来表示空间所有点的位置，同理可得，空间上的点和有序实数组 (x,y,z) 之间建立了一种"一一对应"关系，即不仅空间上每一点 P 确定唯一的一个有序实数组 (x,y,z)，而且每一个有序实数组 (x,y,z) 也确定空间上唯一的一点 P. 我们也常常将点 P 称为点 (x,y,z)，而不加以区分. 若以 O 为起点，P 为终点，则可以唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OP}$，且有

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z),$$

如图 1.7 所示.

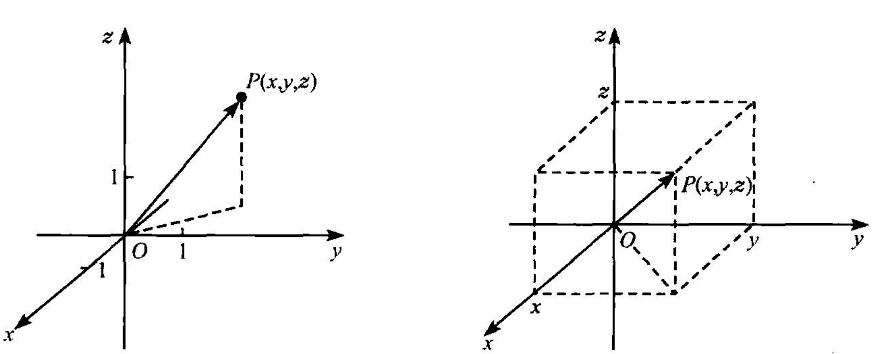

图 1.7

对应于空间上一点 P 的有序实数组 (x,y,z) 也叫做 P **点的坐标**，三条相互垂直的数轴也称为**坐标轴**，分别用 Ox，Oy 和 Oz 表示，对应地分别称为 x **轴**、y **轴**和 z **轴**，或**横轴**、**纵轴**和**竖轴**.

引入数学术语，我们可将

实数 x 称为 1 维实数组或 **1 维向量**；

有序实数对 (x,y) 称为 2 维实数组或 **2 维向量**；

有序实数组 (x,y,z) 称为 3 维实数组或 **3 维向量**.

而且

所有 1 维实数组构成的集合称为 **1 维空间**，记为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^1$；

相应地，

所有 2 维实数组构成的集合称为 **2 维空间**，记为 $\mathbf{R}^2$；

所有 3 维实数组构成的集合称为 **3 维空间**，记为 $\mathbf{R}^3$.

在生产实践活动过程中，因为时间对我们认识世界也很重要，所以常常需要考虑 3 维空间中的点在不同时刻的位置. 类似地，引入上述的描述方式，在 3 维空间的基础上增加对时间度量 t 的考虑，故可采用 4 维实数组 (x,y,z,t) 来表示，虽然此时已经无法用几何直观来表达了，但依旧类似上述表述方式，定义如下：

所有 4 维实数组 (x,y,z,t) 构成的集合称为 **4 维空间**，记为 $\mathbf{R}^4$.

更一般地，我们有

定义 1.1.1 所有 n 维实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成的集合称为 ***n* 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\},$$

其中 n 维实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 ***n* 维向量**，通常用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 或粗体的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots$ 表示，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**向量的第 i 个分量**(或第 i 个坐标).

注 空间的点与向量形成了"一一对应"，因此在以后的章节里，只要不会引起混淆，常常不再加以区分.

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中，通常还定义以下两种运算：

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，$c$ 为实数，则

1. **加法** $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$；
2. **数乘** $c\boldsymbol{\alpha}=c(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)$.

与空间对应的还有一个重要概念——距离. 什么是空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点 P 与 Q 之间的距离呢？或者说，什么是空间 $\mathbf{R}^n$ 中两个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离呢？

在 $\mathbf{R}^1$ 中，若点 P 的坐标为 x，点 Q 的坐标为 y，则由绝对值的几何意义知：点

P 与 Q 之间的距离为

$$|y-x| \quad 或 \quad \sqrt{(y-x)^2}.$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中,若点 P 的坐标为(x_1,y_1),点 Q 的坐标为(x_2,y_2),如图 1.8 所示,则由平面几何中勾股定理可知:点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中,若点 P 的坐标为(x_1,y_1,z_1),点 Q 的坐标为(x_2,y_2,z_2),如图 1.9 所示,则由立体几何中长方体对角线长度的计算公式知:点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

根据中学的几何知识,不难看出上述两点之间的距离公式的实质是:连接两点 P 与 Q 的线段的长度.

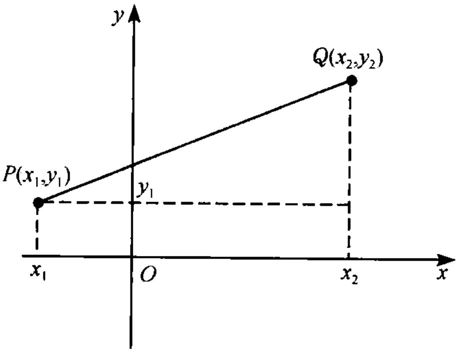

图 1.8

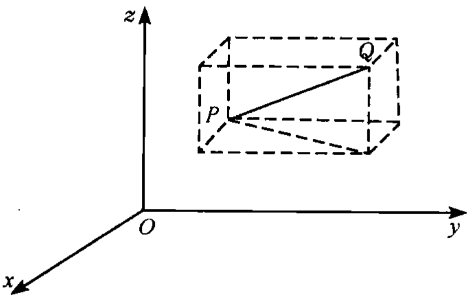

图 1.9

一般地,在 $\mathbf{R}^n$ 中,若点 P 的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,点 Q 的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义点 P 与 Q 之间的距离为

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

记为$|PQ|$,$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$或 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地,当点 Q 与原点 O 重合时,或者说$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(0,0,\cdots,0)$时,有

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

称$|\boldsymbol{x}|$为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**模**或**长度**.

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,c 为实数,可以验证向量的模具有下列性质:

(1) $|\boldsymbol{x}|\geqslant 0$,$|\boldsymbol{x}|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

(2) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$;

(3) $|c\boldsymbol{x}|=|c||\boldsymbol{x}|$.

1.1.2 邻域

邻域是一个在高等数学中经常用到的概念，同时也是一个极其重要的概念. 直观地说，**点 x_0 的 δ 邻域**是指位于定点 x_0 周围的点的集合，其中每个点 x 与定点 x_0 的距离小于定长 δ，δ 通常是很小的正数. 换而言之，一个点的邻域是包含这个点的集合，可以稍微“抖动”一下这个点而不会离开这个集合.

在 $\mathbf{R}^n$ 中点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x-x_0|<\delta\}$.

从图形上看，邻域可以看成是 $\mathbf{R}^1$（数轴）中开区间概念的推广.

考虑 $\mathbf{R}^1$ 中开区间 (a,b)，若记

$$x_0=\frac{a+b}{2},\quad \delta=\frac{b-a}{2},$$

则有

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=(a,b),$$

如图 1.10 所示.

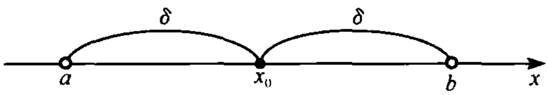

图 1.10

$\mathbf{R}^1$ 中点 x_0 的 δ 邻域就是到定点 x_0 的距离小于定长 $\delta(\delta>0)$ 的所有点 x 的集合.

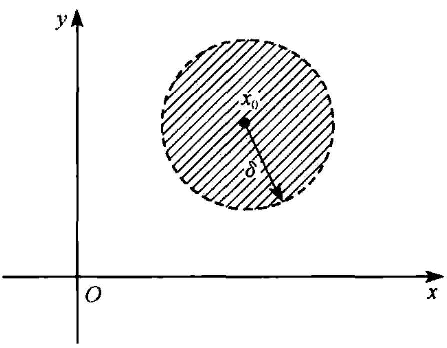

图 1.11

如图 1.11 所示，在 $\mathbf{R}^2$ 中有

$$U(x_0,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|<\delta\},$$

表示的是以点 x_0 为圆心，$\delta>0$ 为半径的圆盘，其中不包含边界圆

$$\{x\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|=\delta\}.$$

设 M 为常数，下面介绍一些跟邻域密切相关的概念.

点 x_0 的去心 δ 邻域，记为

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\};$$

特别在 $\mathbf{R}^1$ 中还有：

点 x_0 的 δ 右邻域，如图 1.12 所示，记为

$$U_{+}(x_0,\delta)=\{x \mid x_0 \leqslant x < x_0+\delta\};$$

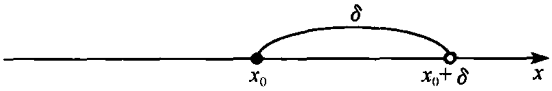

图 1.12

点 x_0 的去心 δ 右邻域，如图 1.13 所示，记为

$$\mathring{U}_{+}(x_0,\delta)=\{x \mid x_0 < x < x_0+\delta\};$$

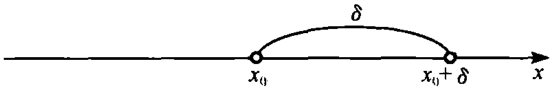

图 1.13

点 x_0 的 δ 左邻域，如图 1.14 所示，记为

$$U_{-}(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta < x \leqslant x_0\};$$

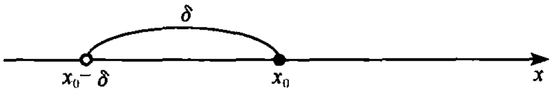

图 1.14

点 x_0 的去心 δ 左邻域，如图 1.15 所示，记为

$$\mathring{U}_{-}(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta < x < x_0\};$$

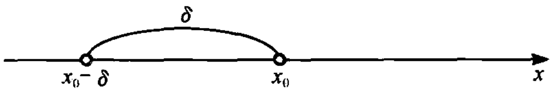

图 1.15

$+\infty$的邻域，如图 1.16 所示，记为

$$U(+\infty)=\{x \mid x > M, M > 0\};$$

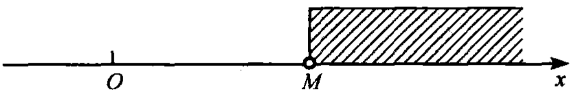

图 1.16

$-\infty$的邻域，如图 1.17 所示，记为

$$U(-\infty)=\{x \mid x < -M, M > 0\}.$$

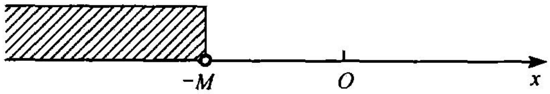

图 1.17

特别地，若不需要指明邻域的大小，常用 $U(x_0)$ 表示 x_0 的邻域，$\mathring{U}(x_0)$ 表示 x_0 的去心邻域.

习　题　1.1

A 组

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中点集

$$A=\{(x,y)\mid 1<x<3,1<y<3\}$$

包含点(1,1)的一个邻域吗？包含点(2,2)的一个邻域吗？请说明理由.

2. 试比较在 $\mathbf{R}^1$ 中的邻域与开区间、闭区间之间的区别与联系.

3. 试问 $\mathbf{R}^3$ 中点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 是什么形状？

4. 试举例说明生活中什么地方用到了 $\mathbf{R}^n(n>3)$ 空间的向量来表示.

5. 在数轴上画出下列数集所表示的区间：

(1) $\{x\mid(x-2)(x-3)<0\}$；　　(2) $\{x\mid x^2+x\geqslant1\}$；

(3) $\left\{x\left|\dfrac{2}{x-2}<5\right.\right\}$；　　(4) $\{x\mid x^2-16<0,x^2-2x\geqslant0\}$；

(5) $U\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$；　　(6) $\mathring{U}(5,3)$.

6. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；　　(2) $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{x}$.

B 组

1. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$；　　(2) $|c\boldsymbol{x}|=|c||\boldsymbol{x}|$.

2. 请思考：空间与集合的关系，区间与邻域的关系.

1.2　函数及其图形

1. 了解复合函数、分段函数、反函数、隐函数、三角函数等概念；
2. 掌握初等函数的定义及函数的三种表示法；
3. 熟知函数的四大特性：单调性、有界性、奇偶性和周期性.

1.2.1　函数

1. 函数的定义

函数是高等数学的一个核心概念，也是我们在数学学习过程中最早接触到的

概念之一，小学数学中最常见的函数. 形式如图 1. 18 所示.

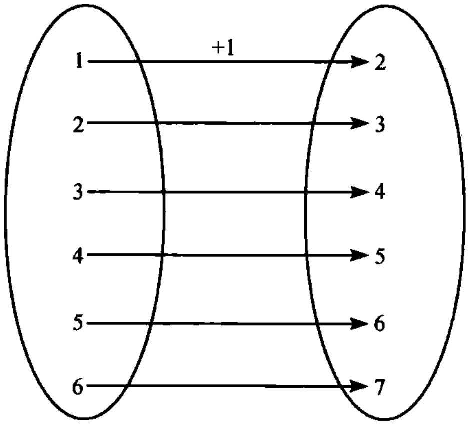

图 1. 18

进一步学习过程中，就会碰到如下形式的应用题.

引例 1. 2. 1　商家销售某种商品的价格为 7 元／千克，每销售 1 千克商家就获得 0. 5 元利润. 那么该商家的销售量和总利润之间有什么联系？

当销售量在它可能的变化范围内每取一个值 q 时，总利润 L 就会有一个唯一确定的值 $0.5q$ 与之相对应. 销售量与总利润之间的这种对应关系就叫做函数关系，即 $L=0.5q(q\geqslant 0)$.

在中学的数学学习过程中，我们得到了函数的如下定义：

设 A,B 是非空数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数值 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**(function)，记作

$$y=f(x),\quad x\in A,$$

其中 x 叫做**自变量**(independent variable)，x 的取值范围叫做函数的**定义域**(domain)；y 叫做**因变量**，与 x 的值对应的 y 值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的**值域**(range).

若借助中学课程中的映射定义，上面函数的定义可以等价地表述如下：

设 D 是 $\mathbf{R}$ 中的非空数集，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中定义域 D 也可记作 D_f，值域 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 也可记作 R_f.

从空间的角度考虑，上述函数的定义都是在 1 维空间 $\mathbf{R}^1$ 中得到的. 类似地，在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中，可以将函数的定义推广如下：

定义 1. 2. 1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

其中向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 叫做**自变量**；y 叫做**因变量**；D 叫做**定义域**，记作 D_f；函数值的集合

$$\{y\mid y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

叫做函数的**值域**，记作 R_f.