

高等院校精品课教辅用书

高等院校经济数学教辅用书

上海财经大学应用数学系 编



上海财经大学出版社

(第二版)

概率论与数理统计 习题集

高等院校精品课教辅用书
高等院校经济数学教辅用书

概率论与数理统计习题集

(第二版)

上海财经大学应用数学系 编

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题集/上海财经大学应用数学系编. —2版.

—上海:上海财经大学出版社,2009.1

高等院校精品课教辅用书

高等院校经济数学教辅用书

ISBN 978-7-81098-327-3/O·009

I. 概… II. 上… III. ①概率论-高等学校-习题②数理统计-高等学校-习题 IV. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004718 号

责任编辑 刘光本

封面设计 周卫民

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI XITIJI

概率论与数理统计习题集

(第二版)

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海市印刷七厂印刷

上海叶大装订厂装订

2009 年 1 月第 2 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 18.5 印张 382 千字

印数:7 001—11 000 定价:26.00 元

第二版前言

本书是上海财经大学出版社 2007 年 3 月出版的《概率论与数理统计》(第二版)的教学参考书,也可作为初学者自修本课程的参考书。

我们知道,教材的编撰者常在每个章节之后编列许多习题供读者练习,希望通过练习加深读者对本课程基本理论的掌握与理解。当然,这些练习中不乏为扩大读者视野而编列的一些练习。另一方面,每门课程的教材都是为实现本专业的教学目标而编写的,其学科内容的取舍与偏重也都依本专业的需求及教学时数而定。为保持一门学科的严谨性与完整性,编撰者也会刻意将一些在他们看来与本专业联系不大(但却是学科的重要理论)或读者自己能作出的结论作为习题编列其后。后两类的习题相对于初学者是有一定难度的。

本参考书有如下特点:

(1)为帮助初学者,对每章的内容都做了提要式的小结,并附有部分典型例题的分析、解答与评议,对教材中所有习题都给出了参考答案;

(2)考虑到某些读者的特殊要求,本书精选了部分有代表性的“提高题”,并对它们做了详尽的分析与解答,希望通过它们扩大读者对本课程的理解,提高读者对本学科的进一步认识,为后续学习和考研提供指导。

尽管如此,我们仍然希望读者不要养成对本书的依赖,更不要局限于本书的一些解法与技巧。要切实掌握本学科的基本理论,并在一定程度上灵活运用。为此,我们建议读者要尽可能多地独立做出一些习题,这对掌握一门数学课程是至关重要的。

本书采用了上海财经大学出版社 2005 年版《概率论与数理统计习题集》一书的许多内容,我们对该书的编撰者何其祥、杨勇、杨晓斌深表谢意,也对上海财经大学应用数学系的领导和老师们的关心与鼓励表示深切的谢忱。

本书的前五章由张晓梅改编,后五章由何萍改编。尽管我们做了许多努力,但限于水平,漏误之处在所难免,敬希读者不吝赐教。

编 者

2008 年 12 月
于上海财经大学

目 录

1	第二版前言
1	第一章 事件与概率
1	一、内容提要
5	二、典型例题
13	三、练习题
19	四、参考答案与提示
25	第二章 条件概率与独立性
25	一、内容提要
27	二、典型例题
34	三、练习题
39	四、参考答案与提示
46	第三章 随机变量及其分布
46	一、内容提要
53	二、典型例题
66	三、练习题

81	四、参考答案与提示
96	第四章 随机向量及其分布
96	一、内容提要
100	二、典型例题
115	三、练习题
126	四、参考答案与提示
144	第五章 数字特征和特征函数
144	一、内容提要
148	二、典型例题
159	三、练习题
172	四、参考答案与提示
191	第六章 极限定理
191	一、内容提要
192	二、典型例题
194	三、练习题
197	四、参考答案与提示
201	第七章 统计量和抽样分布
201	一、内容提要
204	二、典型例题
209	三、练习题
213	四、参考答案与提示

216	第八章 参数估计
216	一、内容提要
222	二、典型例题
232	三、练习题
238	四、参考答案与提示
243	第九章 假设检验
243	一、内容提要
247	二、典型例题
255	三、练习题
260	四、参考答案与提示
266	第十章 线性统计推断
266	一、内容提要
279	二、典型例题
282	三、练习题
284	四、参考答案与提示

第一章 事件与概率

一、内容提要

(一) 随机试验和随机事件

1. 随机试验

对随机现象的某一特征的试验或观察,称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E . 随机试验必须满足下述条件:

- (1) 试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 试验之前能确定所有可能的结果;
- (3) 试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

2. 样本点与样本空间

随机试验的每一可能结果称为**样本点**,用 ω 表示.

样本点全体组成的集合称为**样本空间**,用 Ω 表示.

3. 随机事件

由若干个样本点组成的集合(或样本空间的某个子集)称为**随机事件**,简称**事件**,用 A, B, C, A_i, B_j 等大写拉丁字母表示.

在某次试验中,若事件 A 中的某个样本点出现,则称 A **发生**.

样本空间 Ω 包含了所有的样本点,在每次试验中它总发生,因此 Ω 就是**必然事件**. 空集 Φ 不包含任何样本点,在每次试验中它总不发生,因此 Φ 即为**不可能事件**.

(二) 事件之间的关系与运算

1. 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B ,则称 A **包含于** B ,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,这时事件 A 的发生必然导致 B 的发生.

2. 相等事件

如果同时成立 $A \subset B$ 及 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 等价, 或 A 等于 B , 记为 $A=B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件, 它们所包含的样本点完全相同.

3. 不相容事件

若在任何一次试验中, 事件 A 与 B 都不可能同时发生, 则称事件 A 与 B 互不相容, 或 A 与 B 互斥. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则称这 n 个事件互不相容. 若可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 两两互不相容, 则称 $A_1, A_2, \dots$ 互不相容.

4. 交(积)

由同时属于事件 A 与 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的交(或积), 记为 $A \cap B$ 或 AB , 事件 AB 表示 A 与 B 同时发生. 显然, A 与 B 互不相容即为 $AB = \Phi$. 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交事件记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 它由同时属于 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的样本点组成, 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生. 对可列个事件, 定义 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n A_i$.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 事件 $A \cup B$ 表示 A 与 B 中至少有一个发生. 如果 A 与 B 互不相容, 则称它们的并为和, 记为 $A+B$. 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, 它由至少属于 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中的一个的样本点组成, 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少发生一个. 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 则称它们的并为和, 记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum_{i=1}^n A_i$. 对可列个事件, 定义 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n A_i$. 若 $A_1, A_2, \dots$ 互不相容, 则称它们的并为和, 记为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

6. 逆事件

由不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的逆事件或对立事件, 记为 $\bar{A}$, $\bar{A}$ 表示事件 A 不发生.

注意: 对立事件一定互不相容, 但互不相容的事件不一定互为对立事件.

7. 差事件

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的差, 记为 $A-B$, 事件 $A-B$ 表示 A 发生而 B 不发生. 显然 $A-B = A\bar{B}$.

事件运算的顺序: 首先进行逆的运算, 再进行交的运算, 最后才进行并或差的运算.

与集合之间的关系及运算相类似, 事件之间的关系及运算 $A \subset B, AB = \Phi, A \cap B, A \cup B, \bar{A}, A-B$ 可以用 Venn 图直观地表示.

8. 事件之间的运算法则

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
 (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
 (4) 德莫根(De Morgan)定理 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
 德莫根定理可以推广到多个事件甚至可列个事件:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

(三) 概率的定义与性质

1. 频率及概率的统计定义

对于随机事件 A , 若在 N 次试验中发生了 n 次, 则称 $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 为 A 在这 N 次试验中出现的频率.

频率具有以下性质:

- (1)(非负性) 对任一事件 $A, F_N(A) \geq 0$;
 (2)(规范性) $F_N(\Omega) = 1$;
 (3)(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 互不相容, 则

$$F_N\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m F_N(A_i).$$

在一次试验或观察中, 事件 A 是否发生是偶然的. 但在大量重复试验中, A 出现的频率会在某个固定常数附近摆动, 而且一般说来, 随着试验次数的不断增加, 摆动的幅度会越来越小, 这一现象称为频率稳定性.

在频率稳定性中, 事件 A 的频率的稳定值称为 A 发生的概率, 以 $P(A)$ 表示, 称这一定义为概率的统计定义, 它度量了事件 A 发生的可能性大小.

2. 古典概型和概率的古典定义

(1) 古典概型

古典概型是指具有以下两个特征的一类特殊的概率模型:

(I) 试验的全部可能结果只有有限个, 即样本空间只含有限个样本点, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, n 为有限正整数;

(II) 每个样本点出现的可能性相同, 即 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$.

(2) 概率的古典定义

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}} = \frac{A \text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}.$$

古典概率具有以下性质:

- (1)(非负性) 对任一事件 $A, P(A) \geq 0$;
- (2)(规范性) $P(\Omega) = 1$;
- (3)(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 互不相容, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i).$$

3. 几何概率

记 A_D 为事件“在区域 Ω 中随机地取一点, 而该点落入区域 D 中”, 称 $P(A_D) = \frac{D \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}$ 为几何概率. 区域 Ω 和 A_D 可以是一维的, 也可以是高维的. 其中的测度是一个广义的概念, 可以指长度、面积、体积等. 与概率的古典定义类似, 几何概率也是通过等可能性来定义的. 这里的等可能性是指: 随机选取的点落入区域 D 的概率与 D 的测度成正比, 而与 D 的位置、形状无关.

几何概率具有以下性质:

- (1)(非负性) 对任一事件 $A, P(A) \geq 0$;
- (2)(规范性) $P(\Omega) = 1$;
- (3)(可列可加性) 若事件 $A_1, A_2, \dots$ 互不相容, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

4. 概率的公理化定义

(1) 事件域(σ -域)

设 Ω 是样本空间, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一些子集组成的集类, 满足下列条件:

- (I) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (II) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
- (III) 若 $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots)$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的事件域(σ -域).

$\mathcal{F}$ 的性质:

- (a) $\Phi \in \mathcal{F}$;
- (b) 若 $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots)$, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;
- (c) 若 $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$;

(d) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A - B \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ 并没有包含 Ω 的所有子集, 但足以包含了我们感兴趣的那些子集. 在概率的公理化定义中, 只有 $\mathcal{F}$ 中的元素才称为事件, 并赋以概率.

(2) 概率的公理化定义

设 P 是定义于事件域 $\mathcal{F}$ 上的集合函数, 满足条件:

①(非负性) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;

②(规范性) $P(\Omega) = 1$;

③(可列可加性) 若 $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots)$, 且互不相容, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 P 为概率, 而称三元体 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

(3) 概率的性质

性质 1 $P(\emptyset) = 0$;

性质 2(有限可加性) 若 $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots, n)$, 且互不相容, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

性质 3 对任何事件 A , 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;

性质 4 如果 $A \supset B$, 则

$$P(A - B) = P(A) - P(B), P(A) \geq P(B);$$

性质 5(概率的加法定理) 对任何两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 有下式成立

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

二、典型例题

例 1 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 掷一枚均匀的骰子两次, 观察两次出现的点数之和;
- (2) 某篮球运动员投篮时, 要求连续 5 次投中, 观察其投篮的次数;
- (3) 记录某班一次数学考试的平均成绩(以百分制记);
- (4) 一射手进行射击, 直到击中时为止, 观察其射击情况;

- (5) 在单位圆内任选两点, 观察这两点的距离;
 (6) 观察某地一天内的最高气温和最低气温(假定最低气温不低于 T_1 , 最高气温不高于 T_2).

解 (1) 骰子两次出现的点数之和最小为 2, 最大为 12, 故样本空间为

$$\Omega_1 = \{2, 3, \dots, 12\}.$$

(2) 连续 5 次投篮命中, 至少必须投 5 次, 但无法确定它的上界, 因此样本空间为

$$\Omega_2 = \{5, 6, \dots\}.$$

(3) 设该班共有 n 名学生, 则样本空间为

$$\Omega_3 = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 100\right\}.$$

(4) 以 0 表示没有击中, 1 表示击中目标. 由于射击必须到击中目标时才终止, 因此每一个样本点均为最后一次击中目标的序列, 于是样本空间为

$$\Omega_4 = \{1, 01, 001, 0001, \dots\}.$$

(5) 设两点的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 则样本空间为

$$\Omega_5 = \{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \mid x_1^2 + y_1^2 < 1, x_2^2 + y_2^2 < 1\},$$

或写成更加简洁的形式:

$$\Omega_5 = \{t \mid 0 < t < 2\}.$$

(6) 设样本点为 (x, y) , 其中 x, y 分别表示最低气温和最高气温, 则样本空间为

$$\Omega_6 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x < y \leq T_2\}.$$

例 2 指出下列关系中哪些成立, 哪些不成立:

- (1) $A \cup B = A\bar{B} \cup B$;
- (2) $\overline{(A \cup B)C} = \overline{A\bar{B}\bar{C}}$;
- (3) 若 $A \subset B$, 则 $A = AB$;
- (4) 若 $A \subset B$, 则 $\bar{B} \subset \bar{A}$;
- (5) 若 $AB = \Phi$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \Phi$;
- (6) $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = \Phi$;
- (7) $\bar{A}\bar{B} = A \cup B$.

解 (1) 成立. $A\bar{B} \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$.

(2) 不成立. $(A \cup B)C$ 发生, 即 $A \cup B$ 发生且 C 发生, C 发生则 $\bar{C}$ 不发生, 所以 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 也不发生. 因此 $\overline{(A \cup B)C} \neq \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(3) 成立. 首先, 显然有 $AB \subset A$, 其次, 若 A 发生, 由于 $A \subset B$, 则 B 必发生, 即 $A \subset AB$, 从而 $A = AB$.

(4) 成立. 因为 $A \subset B$, 所以 A 的每个样本点都是 B 的, 从而 $\bar{B}$ 的每个样本点都是 $\bar{A}$

的,即 $\bar{B} \subset \bar{A}$.

(5) 成立. 由于 $C \subset A$, 因此 $BC \subset AB = \Phi$, 但另一方面, 显然成立 $\Phi \subset BC$, 所以 $BC = \Phi$.

(6) 成立. $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = A(B\bar{B}) = A\Phi = \Phi$.

(7) 不成立. 若 $\bar{A}B = A \cup B$, 则 $A\bar{A}B = A(A \cup B)$, 即 $\Phi = A \cup AB$, 矛盾.

例 3 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1 000 个同样大小的小正方体. 从这些小正方体中任取一个, 求这一小正方体的两面涂有油漆的概率.

解 记 A 为“任意取得的小正方体两面涂有油漆”的事件. 小正方体总的个数 $n = 1\,000$, 正方体共有 12 条边, 每条边被分成 10 段, 每条边上各有 8 个两面涂有油漆的小正方体, 因此 $m(A) = 12 \cdot 8 = 96$, 所求概率 $P(A) = \frac{m(A)}{n} = 0.096$.

例 4 求下列事件的概率: (1) A : 同房间的 4 个学生, 至少有 2 人生日在同一个月; (2) B : 同一班的 30 个学生中, 至少有 1 人生日在 10 月 1 日; (3) C : 参加聚会的 K 个人中至少有 2 人生日相同.

解 (1) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{P_{12}^4}{12^4} = 1 - \frac{495}{864} \approx 0.4271$;

(2) $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{364^{30}}{365^{30}} \approx 0.08$;

(3) $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{P_{365}^K}{365^K}$.

例 5 n 对新人参加婚礼, 现进行一项游戏: 随机地把人分为 n 对, 问每对恰为夫妻的概率是多少?

解 把这 $2n$ 个人从左至右排成一列, 总共有 $(2n)!$ 种排法. 处在 1, 2 位置的作为一对夫妻, 3, 4 位置的作为一对夫妻, 等等. 将每对夫妻看成一组, 先按组排列, 共有 $n!$ 种排法; 每组都各有 2 种排法, 共 2^n 种, 故排列总数为 $2^n \cdot n!$. 所以

$$P = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}.$$

例 6 从 0, 1, ..., 9 中有放回地连取 4 个数, 并按出现的先后次序排列, 求下列事件的概率:

(1) A_1 : 四个数字组成一四位数;

(2) A_2 : 四个数字组成一四位偶数;

(3) A_3 : 四个数字中 0 恰好出现两次;

(4) A_4 : 四个数字中 0 至少出现一次.

解 (1) 样本点总数显然为 10^4 . 四个数组成一个四位数, 只需第一位数字不为 0, 后三位数可以任意, 所以 A_1 的有利场合数为 $C_9^1 \cdot 10^3$, 因此

$$P(A_1) = \frac{C_9^1 \cdot 10^3}{10^4} = 0.9.$$

(2) 四个数组成一个四位偶数, 第一位数字不能为 0, 且末位必须为偶数或 0, 所以 A_2 的有利场合数为 $C_9^1 \cdot 10^2 \cdot C_5^1$, 因此

$$P(A_2) = \frac{C_9^1 \cdot 10^2 \cdot C_5^1}{10^4} = \frac{9}{20}.$$

(3) 数字 0 恰好出现两次, 必须有某两次取为 0, 而另两次不取 0, 于是 A_3 的有利场合数为 $C_4^2 \cdot 9^2$, 从而

$$P(A_3) = \frac{C_4^2 \cdot 9^2}{10^4} = 0.0486.$$

(4) 为求四个数字中 0 至少出现一次的概率, 我们先求四个数字中不含 0 的概率. 取到的四个数字不含 0, 共有 9^4 种取法, 因此

$$P(A_4) = 1 - \frac{9^4}{10^4} = 0.3439.$$

例 7 一部电梯从底层开始启动时有 6 位乘客, 设每位乘客在十层楼的任何一层离开的可能性相同. 试求下列事件的概率:

- (1) A: 某指定的一层有两位乘客离开;
- (2) B: 没有两位及两位以上的乘客在同一层离开;
- (3) C: 恰有两位乘客在同一层离开;
- (4) D: 至少有两位乘客在同一层离开.

解 由于每一位乘客均可能在十层楼的任一层离开, 故样本点总数为 10^6 .

(1) 某指定的一层有两位乘客离开, 这两位乘客可以是 6 人中的任 2 人, 共有 C_6^2 种组合方式, 其余 4 人可以在另外 9 层任意离开, 共有 9^4 种方式, 故 A 的概率为

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot 9^4}{10^6} \approx 0.0984.$$

(2) 没有两位及两位以上的乘客在同一层离开, 即 6 位乘客应在 10 层中任选 6 层, 每层有 1 位下, 共有 P_{10}^6 种不同的方式, 故 B 的概率为

$$P(B) = \frac{P_{10}^6}{10^6} = 0.1512.$$

(3) 恰有两位乘客在同一层离开, 乘客的组合方式共有 C_6^2 种, 对楼层的选择方式共有 C_{10}^1 种, 其余的 4 位乘客不能有 2 位在同一层一起下, 有如下三种形式: 4 位在同一层一起下, 共有 C_9^1 种方式; 有 3 位在 9 层的某一层一起下, 余下的 1 位在剩下的 8 个楼层选择一层下, 共有 $C_4^3 C_8^1$ 种不同的方式; 4 个人在不同的楼层下, 一人一层, 共有 $C_9^4 \cdot 4!$ 种方式. 因此 C 的概率为

$$P(C) = \frac{C_{10}^1 C_6^2 (C_9^1 + C_4^3 C_9^1 C_8^1 + C_9^4 \cdot 4!)}{10^6} \approx 0.4982.$$

(4) 显然有 $P(D) = 1 - P(B) = 1 - 0.1512 = 0.8488$.

例8 口袋中有 $n-1$ 只黑球及 1 只白球, 每次从袋中取出一球, 并换入 1 只黑球, 如此继续下去. 求第 k 次取到黑球的概率.

解 记 A 为第 k 次取到黑球的事件. 如果直接求 A 的概率, 则必须将 A 分解成许多事件的并, 为此我们先求 $\bar{A}$ 的概率. 这里 $\bar{A}$ 表示第 k 次取到白球的事件, $\bar{A}$ 发生, 即前 $k-1$ 次取到的均为黑球, 从而

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$

例9 从 $1, 2, \dots, N$ 中每次有放回地任取一数, 共取 k ($1 \leq k \leq N$) 次, 求下列事件的概率:

- (1) A : k 个数字全不相同;
- (2) B : 不含 $1, 2, \dots, N$ 中指定的某 r 个数字;
- (3) C : 某指定的一个数字恰好出现 m ($m \leq k$) 次;
- (4) D : k 个数字中的最大数为 M ($1 \leq M \leq N$);
- (5) E : k 个数字严格上升.

解 从数字 $1, 2, \dots, N$ 中有放回地取 k 个数字, 共有 N^k 种取法, 即样本点总数为 N^k .

(1) 由于要求取出的 k 个数字全不相同, 所以 A 的有利场合数为 P_N^k , 因此

$$P(A) = \frac{P_N^k}{N^k}.$$

(2) 取出的 k 个数字中不含某指定的 r 个数字, 则只能在剩下的 $N-r$ 个数字中有放回地取 k 个数, 因而 B 的有利场合数为 $(N-r)^k$, 因此

$$P(B) = \frac{(N-r)^k}{N^k}.$$

(3) 某指定的一个数字重复出现 m 次, 可以是 k 次中的任意 m 次, 共有 C_k^m 种选法, 而其余的 $k-m$ 次均取自剩下的 $N-1$ 个数字, 因此事件 C 的有利场合数为 $C_k^m \cdot (N-1)^{k-m}$, 因此

$$P(C) = \frac{C_k^m \cdot (N-1)^{k-m}}{N^k}.$$

(4) 从 $1, 2, \dots, N$ 中有放回地取 k 个数字, 最大数不大于 M 的取法共有 M^k 种 (这是因为只能从 $1, 2, \dots, M$ 中有放回地取 k 个数字), 而最大数不大于 $M-1$ 的取法共有 $(M-1)^k$ 种, 因此事件 D 的有利场合数为 $M^k - (M-1)^k$, 从而

$$P(D) = \frac{M^k - (M-1)^k}{N^k}.$$

(5) k 个数字按严格上升的次序排列, 自然它们全不相同, 共有 C_N^k 种取法, 其中只有一种是按严格上升次序排列的, 因此事件 E 的有利场合数为 C_N^k , 从而

$$P(E) = \frac{C_N^k}{N^k}.$$

例 10 甲、乙、丙三人按下面的规则进行比赛: 第一局甲、乙参加而丙轮空, 由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛, 而失败者轮空, 比赛用这种方式进行到其中一人连胜两局为止, 连胜两局者为整场比赛的优胜者. 若甲、乙、丙胜每局的概率均为 $\frac{1}{2}$, 问甲、乙、丙成为整场比赛的优胜者的概率各是多少?

解 记 A, B, C 分别为比赛中甲、乙、丙获胜的事件, 则比赛的可能结果有

AA, ACC, ACBB, ACBAA, ACBACC, ACBACBB, ...

BB, BCC, BCAA, BCABB, BCABCC, BCABCAA, ...

在这些结果中, 包含 k 个字母的事件发生的概率为 $\frac{1}{2^k}$, 于是丙获胜的概率为

$$\begin{aligned} P(C) &= [P(ACC) + P(BCC)] + [P(ACBACC) + P(BCABCC)] + \cdots \\ &= 2 \times \frac{1}{2^3} + 2 \times \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{2}{7}, \end{aligned}$$

由于甲、乙的地位是对称的, 所以 $P(A) = P(B)$, 因此

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} [1 - P(C)] = \frac{5}{14}.$$

例 11 某班 n 个战士各有 1 支枪, 这些枪的外形完全一样, 在一次夜间紧急集合中, 每人随机地取了 1 支枪, 求至少有 1 人拿到自己的枪的概率.

解 记 A_i 为“第 i 个战士拿到自己枪”的事件 ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$P(A_i) = \frac{(n-1)! \cdot 1}{n!} = \frac{1}{n},$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)! \cdot 1 \cdot 1}{n!} = \frac{1}{P_n^2} \quad (i \neq j)$$

.....

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!},$$

因而所求概率为

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{P_n^2} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{P_n^n} \end{aligned}$$