经全国中小学教材审定委员会
2006年初审通过

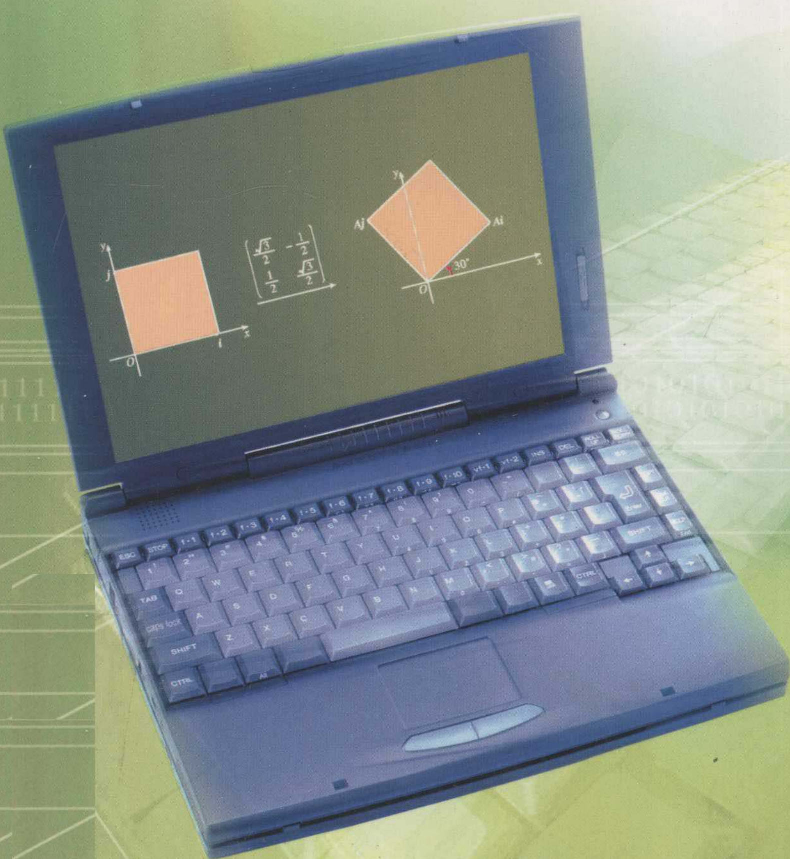
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

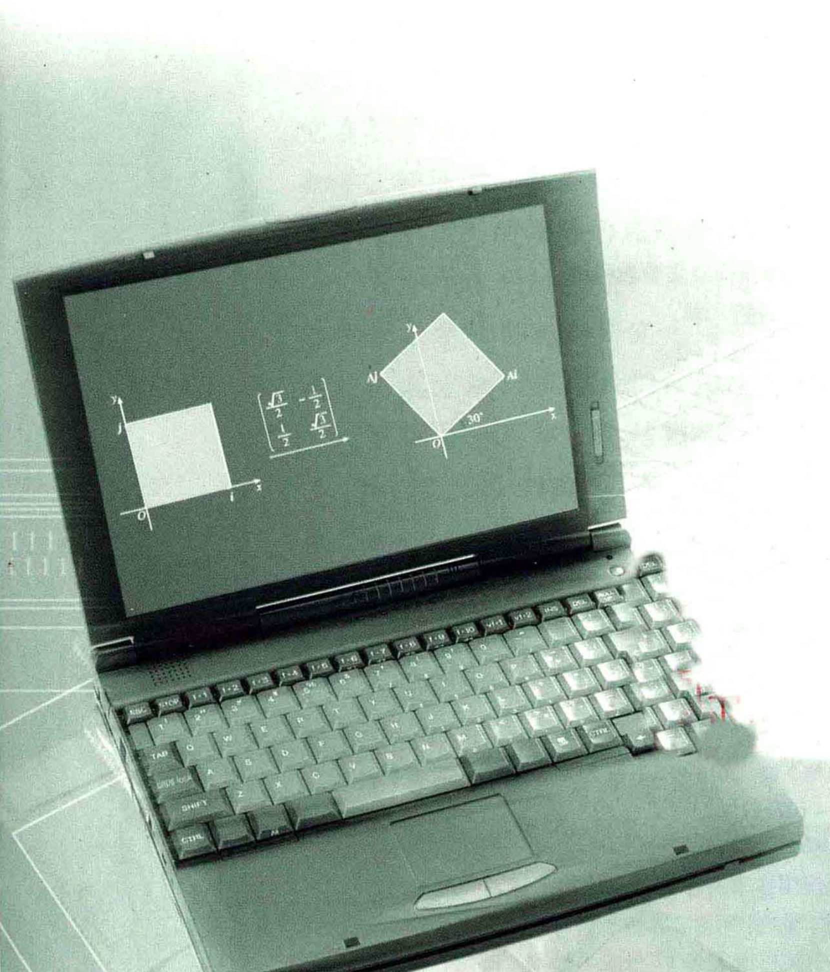
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4－2

A 版

矩阵与变换

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址： http://www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：5.25　字数：114 000

2008 年 12 月第 3 版　2010 年 5 月第 10 次印刷

ISBN 978－7－107－19623－2
G·12673（课）　定价：5.30 元

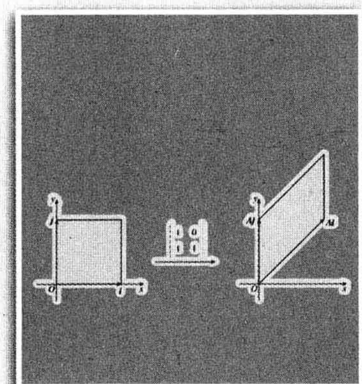
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

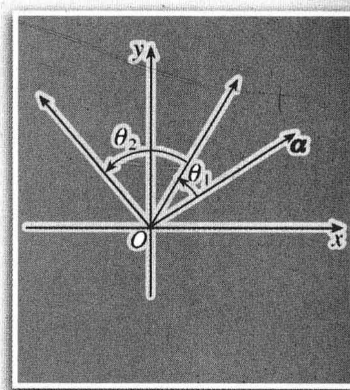
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要作者：李龙才　章建跃
责任编辑：俞求是

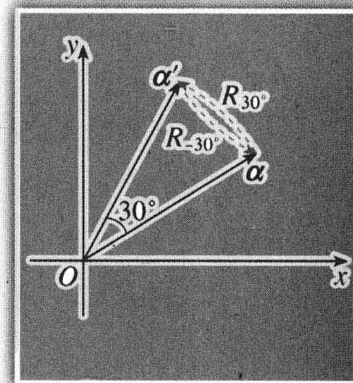
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

目 录

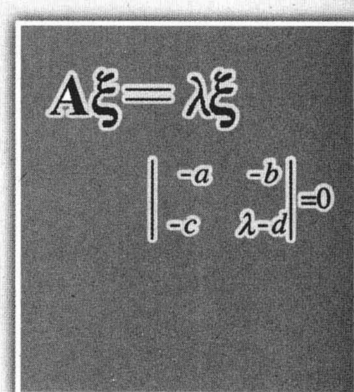




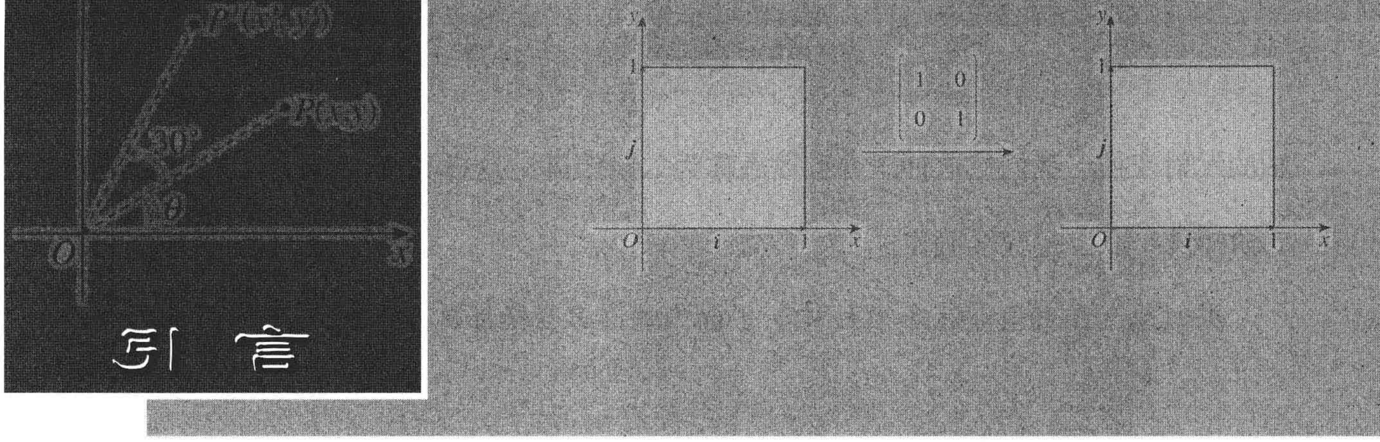
y
θ_2
θ_1
α
O
x



y
α'
$R_{30°}$
$R_{-30°}$
α
30°
O
x



$A\xi=\lambda\xi$
$\begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=0$



引言

在初中，我们已学过轴对称、旋转、相似等平面图形的变换．例如，我们知道，把一个平面图形沿着平面上一条直线 l 折叠，可以得到它关于直线 l 对称的图形，这个图形与原图形全等，新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点，连接任意一对对称点的线段被直线 l 垂直平分．像这样，由一个平面图形（如图 0-1 中的 $\triangle ABC$）得到它关于某条直线 l 的轴对称图形（图 0-1 中的 $\triangle A'B'C'$）叫做平面图形的轴对称变换．

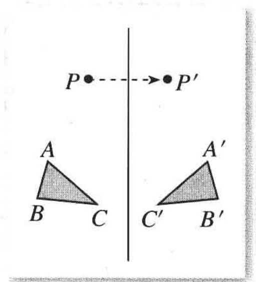


图 0-1

我们也可以这样来看平面图形的轴对称变换：如图 0-1，设直线 l 在平面 α 内，那么对于平面 α 内任意一点 P，都存在平面 α 内唯一一点 P'，使 P' 与 P 关于直线 l 对称．我们称这样的对应关系为平面 α 关于直线 l 的反射变换．这样，经过这个反射变换，平面 α 内的 $\triangle ABC$ 就被对应到 $\triangle A'B'C'$．

进一步地，如果在平面 α 内建立直角坐标系 xOy，那么平面内的点与有序实数对（x，y）之间就建立了一一对应．这样，我们又可以从代数的角度来研究反射变换．例如，关于 x 轴的反射变换，把平面 α 内的任意一点 $P(x,\ y)$ 变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x',\ y')$．对于坐标 $P(x,\ y)$ 与 $P'(x',\ y')$，可以得到

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases} \qquad ①$$

显然，表达式①完全刻画了关于 x 轴的反射变换．因此，也称表达式①为关于 x 轴的反射变换．

我们将反射变换①变形为

$$\begin{cases} x'=x+0y, \\ y'=0x-y. \end{cases} \qquad ②$$

由于②式由右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把它们按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，就得到正方形数表 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$．这个正方形数表也完全刻画了关于 x

轴的反射变换. 我们把这种正方形数表称为二阶矩阵. 这样关于 x 轴的反射变换就可以由二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ 完全确定.

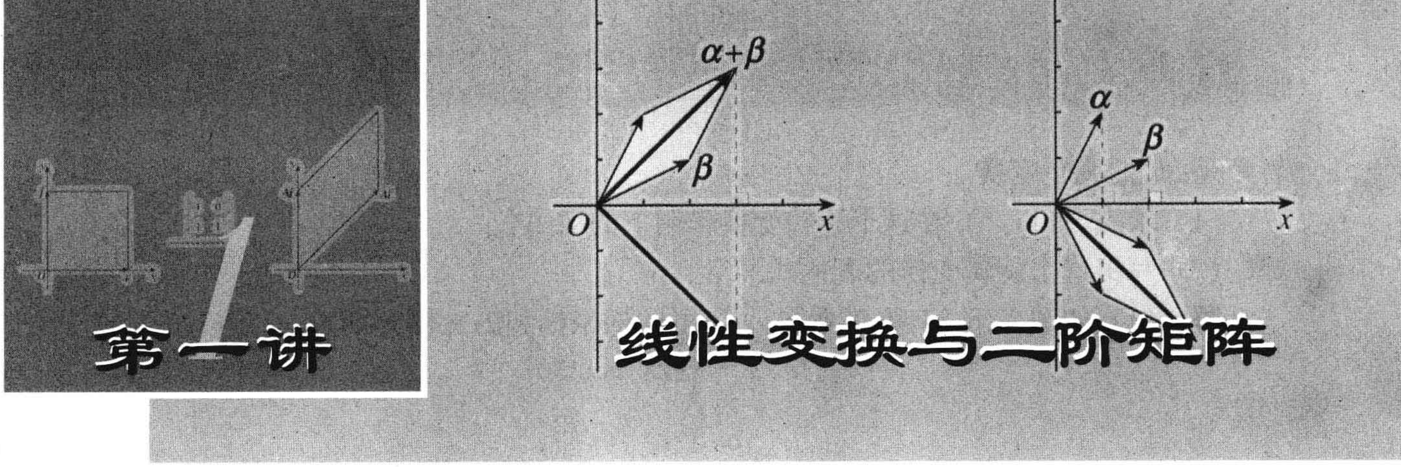
类似地，在直角坐标系 xOy 中，平面内的许多变换都具有形式

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\y'=cx+dy,\end{cases} \tag{③}$$

其中 a，b，c，d 均为常数. 变换③可以由二阶矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 完全确定.

数学中经常通过引入新的工具，建立不同对象之间的联系来研究问题. 例如，引入平面直角坐标系后，我们可以通过方程来研究平面曲线，也可以通过平面曲线来研究方程. 在引进二阶矩阵概念后，能否对二阶矩阵与平面内的某些几何变换进行类似的研究呢？这就是本专题要解决的主要问题.

本专题将以矩阵为工具，研究一些几何变换，并以平面图形的变换为背景，讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量的概念等，用变换的观点理解解二元一次方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性，为进一步学习打下基础.



第一讲 线性变换与二阶矩阵

在平面直角坐标系中，平面内的点与有序实数对有一一对应关系. 这样，借助直角坐标系，我们可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换. 本讲中，我们将在建立一些几何变换的代数表示的基础上，引入线性变换的概念，通过线性变换引入二阶矩阵，并进一步建立线性变换与二阶矩阵的联系，用矩阵研究线性变换的基本性质.

一 线性变换与二阶矩阵

（一）几类特殊线性变换及其二阶矩阵

1. 旋转变换

探究

将直角坐标系中所有点绕原点沿逆时针方向旋转一个角度 α. 设平面内点 $P(x, y)$经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，那么如何用 P 的坐标（x, y）表示 P'的坐标（x', y'）?

我们先从简单情形开始.

如图 1.1-1 所示，在直角坐标系 xOy 内，每个点都绕原点 O 按逆时针方向旋转 $180°$. 设点 $P(x, y)$ 经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，x'，y'与 x，y 有什么关系呢?

可以得到，$x'=-x$，$y'=-y$，即

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-y. \end{cases} \quad ①$$

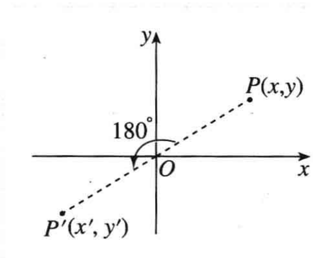


图 1.1-1

我们将①称为旋转角为 $180°$的旋转变换的表达式，它建立了平面内的每个点 P 到其对应点 P'的对应关系，我们称 P'是 P 在这个旋转变换作用下的像.

例 1 在直角坐标系 xOy 内，将每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 $30°$的变换称为旋

转角是 30°的旋转变换.

(1) 求点 $A(1, 0)$ 在这个旋转变换作用下的像 A'；

(2) 写出这个旋转变换的表达式.

解：(1) 如图 1.1-2，不难看出，点 A'的横坐标和纵坐标分别为

$$\begin{aligned} x &= |OA|\cos 30^\circ \\ &= 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y &= |OA|\sin 30^\circ \\ &= 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因此，点 $A(1, 0)$ 在这个旋转变换作用下的像为 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$；

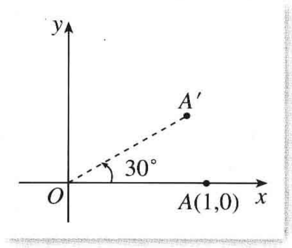


图 1.1-2

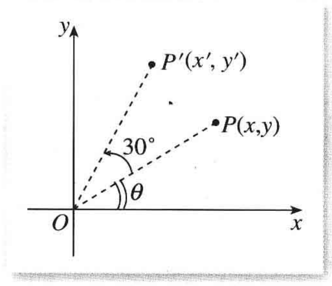


图 1.1-3

(2) 如图 1.1-3，分别连接 OP，OP'，设 $OP=OP'=r$，记 θ 是以 x 轴的正半轴为始边、以射线 OP 为终边的角. 由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+30^\circ), \\ y'=r\sin(\theta+30^\circ). \end{cases}$$

由两角和的三角函数公式得

$$\begin{cases} x'=x\cos 30^\circ-y\sin 30^\circ, \\ y'=x\sin 30^\circ+y\cos 30^\circ, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases} \qquad ②$$

这就是所求的旋转变换的表达式.

由于②式由其右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把这些系数按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，得到一个正方形数表 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. 可以发现，这个正

方形数表由旋转角是30°的旋转变换唯一确定；反之，旋转角是30°的旋转变换也可以由这个正方形数表唯一确定．所以，这个正方形数表唯一刻画了旋转角是30°的旋转变换．

事实上，在平面直角坐标系 xOy 内，很多几何变换都具有下列形式：

$$\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy. \end{cases} \quad ③$$

其中系数 a，b，c，d 均为常数．我们把形如③的几何变换叫做**线性变换**❶（linear transformation），③式叫做这个线性变换的**坐标变换公式**．$P'(x', y')$是$P(x, y)$在这个线性变换作用下的像．

❶ 在表达式③中，x'，y'都是关于x，y的常数项为0的一次式，通常称"一次表达式"为"线性表达式"．

与例1的解答一样，我们引进正方形数表$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，那么线性变换③可以由$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$唯一确定；反之，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$也可以由线性变换③唯一确定．

像这样，由4个数a，b，c，d排成的正方形数表$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$称为二阶**矩阵**❷（matrix），数$a$，$b$，$c$，$d$称为矩阵的元素．在二阶矩阵中，横的叫行，从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行；竖的叫列，从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列．矩阵通常用大写的英文字母$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示．

❷ 二阶矩阵仅仅是一个包含两行、两列的数表，它既不是数，也不是代数式．

元素全为0的二阶矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$称为**零矩阵**，简记为$\boldsymbol{0}$．矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$称为二阶**单位矩阵**，记为$\boldsymbol{E}_2$．

有了二阶矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，我们就可以利用它来研究线性变换③．

与例1(2)的解答过程一样，我们可以得到直角坐标系 xOy 内的每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换（通常记为 R_α）的坐标变换公式：

如图1.1-4，分别连接OP，OP'，设$OP=OP'=r$，记θ是以x轴的正半轴为始边、以射线OP为终边的角．由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+\alpha), \\ y'=r\sin(\theta+\alpha). \end{cases}$$

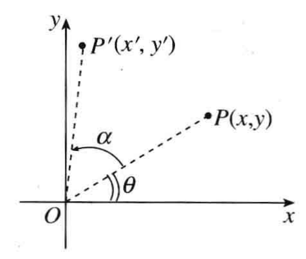


图1.1-4

所以，绕原点O按逆时针方向旋转α角的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \quad ④$$

对应的二阶矩阵为

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

2. 反射变换

在引言中我们已经看到，关于 x 轴的反射变换把直角坐标系 xOy 内的任意一点 $P(x,y)$ 变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x',y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-y.\end{cases}$$

与之对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

同样，关于 y 轴的反射变换把直角坐标系 xOy 内的任意一点 $P(x,y)$ 变成它关于 y 轴的对称点 $P'(x',y')$. 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=-x,\\ y'=y.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

我们知道，在直角坐标系 xOy 内，任意一点 $P(x,y)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(y,x)$. 所以，关于直线 $y=x$ 的反射变换把直角坐标系内任意一点 $P(x,y)$ 变成它关于直线 $y=x$ 的对称点 $P'(x',y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=y,\\ y'=x.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

一般地，我们把平面上的任意一点 P 变成它关于直线 l 的对称点 P' 的线性变换叫做**关于直线 l 的反射**（reflection）.

探究

在直角坐标系 xOy 内，直线 l 过原点，倾斜角为 α. 你能求出关于直线 l 的反射变换的坐标变换公式吗？

3. 伸缩变换

在直角坐标系 xOy 内，将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍，其中 k_1，k_2 均为非零常数，我们称这样的几何变换为**伸缩变换**(stretching).

例 2 在直角坐标系 xOy 内，将每一点的纵坐标变为原来的 2 倍，横坐标保持不变.

(1) 试确定该伸缩变换的坐标变换公式及其对应的二阶矩阵；

(2) 求点 $A(1,\ -1)$ 在该伸缩变换作用下的像 A'.

解：(1) 设在这个伸缩变换作用下，直角坐标系 xOy 内的任意一点 $P(x,\ y)$ 变成点 $P'(x',\ y')$，则

$$x'=x,\ y'=2y.$$

因此，所求的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(2) 将点 $A(1,\ -1)$ 的坐标代入坐标变换公式，得

$$\begin{cases} x'=1, \\ y'=2\times(-1)=-2. \end{cases}$$

从而 A' 的坐标为 $(1,\ -2)$.

一般地，在直角坐标系 xOy 内，将每个点的纵坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），横坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），纵坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍（k_1，k_2 均为非零常数）的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=k_1x, \\ y'=k_2y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$.

4. 投影变换

设 l 是平面内一条给定的直线. 对平面内的任意一点 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 P'，则称点 P' 为点 P 在直线 l 上的投影. 将平面上每一点 P 变成它在直线 l 上的投影 P'，这个

变换称为关于直线 l 的**投影**（projection）**变换**.

例 3 如图 1.1-5，在直角坐标系 xOy 内，过任意一点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 P'，我们称点 P' 为点 P 在 x 轴上的（正）投影. 如果一个变换把直角坐标系内的每一点变成它在 x 轴上的（正）投影，那么称这个变换为关于 x 轴的（正）投影变换.

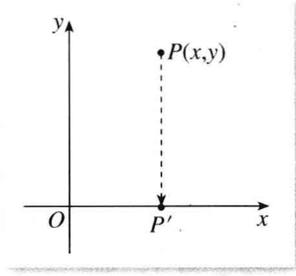


图 1.1-5

设在关于 x 轴的（正）投影变换的作用下，点 $P(x, y)$ 变成点 $P'(x', y')$，则

$$x'=x,\ y'=0.$$

因此，该变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=0. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

如果以直线 l 为 x 轴建立直角坐标系 xOy，则所有的投影变换都可以看成关于 x 轴的投影变换.

5. 切变变换

如图 1.1-6，在直角坐标系 xOy 内，将每一点 $P(x, y)$ 沿着与 x 轴平行的方向平移 ky 个单位变成点 P'，其中 k 是非零常数，称这类变换为平行于 x 轴的**切变**（shears）**变换**.

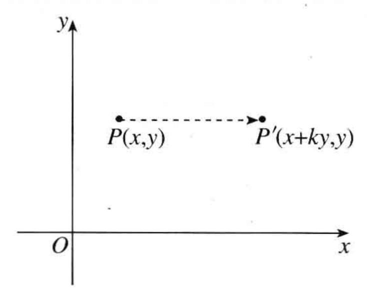


图 1.1-6

设 $P'(x', y')$，则

$$x'=x+ky,\ y'=y.$$

因此，平行于 x 轴的切变变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x+ky, \\ y'=y. \end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

类似的，平行于 y 轴的切变变换是指将直角坐标系内的每一点 $P(x, y)$ 沿着与 y 轴平行的方向平移 kx 个单位（其中 k 是非零常数）的线性变换. 其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=kx+y. \end{cases}$$

对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$.

（二）变换、矩阵的相等

我们知道，在直角坐标系 xOy 内，把每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{3\pi}{2}$，与把每个点绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的变换效果是一样的. 实际上，旋转角是 $\frac{3\pi}{2}$ 的旋转变换的

坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\dfrac{3\pi}{2}-y\sin\dfrac{3\pi}{2}, \\ y'=x\sin\dfrac{3\pi}{2}+y\cos\dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\dfrac{3\pi}{2} & -\sin\dfrac{3\pi}{2} \\ \sin\dfrac{3\pi}{2} & \cos\dfrac{3\pi}{2} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

旋转角是$-\dfrac{\pi}{2}$的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-y\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ y'=x\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+y\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，这两个旋转变换的坐标变换公式及对应的二阶矩阵是分别相同的．这时我们称这两个旋转变换相等．

一般地，设σ，ρ是同一个直角坐标平面内的两个线性变换．如果对平面内的任意一点P，都有$\sigma(P)=\rho(P)$，则称这两个线性变换相等，简记为$\sigma=\rho$．

> 变换与函数类似．函数把实数对应到实数；变换把点对应到点．

设σ，ρ所对应的二阶矩阵分别为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$．

如果 $\sigma=\rho$，那么它们对应的系数分别相等，即 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$，$d_1=d_2$. 这时我们也称二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，即

对于两个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果它们的对应元素都分别相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & x-1\\ y & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}p-1 & -2\\ 2 & q\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 p，q，x，y.

解：由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases}1=p-1,\\ x-1=-2,\\ y=2,\\ 0=q.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}p=2,\\ q=0,\\ x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

习题1.1

1. 在直角坐标系 xOy 内，如果把绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换记为 R_α，试给出下列旋转变换的坐标变换公式以及对应的矩阵：

   (1) R_{45°； (2) R_{90°； (3) R_{360°.

2. 如果一个几何变换把直角坐标系 xOy 内任意一点变成这一点关于坐标原点 O 的对称点，那么称这个几何变换为关于坐标原点 O 的反射变换，试求出这个反射变换的变换公式及其矩阵.

3. 过直角坐标系 xOy 内的一点 A 作一条与 $x+y=0$ 平行的直线交 x 轴于点 A'，则称 A' 点为过 A 点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 设一个几何变换把直角坐标系 xOy 内的任意一点变成过这一点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 试求

   (1) 点 $A(2, 1)$ 在这个投影变换下的像；

   (2) 这个投影变换的坐标变换公式及其矩阵.

4. 对于旋转变换 $R_{\frac{3\pi}{2}}$，除了 $R_{-\frac{\pi}{2}}=R_{\frac{3\pi}{2}}$ 以外，你还能再找出一些与 $R_{\frac{3\pi}{2}}$ 相等的平面变换吗？

5. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ x & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}2 & -y\\ 3 & z\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，求 x，y，z.

6. (1) 求直角坐标系 xOy 内关于直线 l：$y=2x$ 的投影变换的坐标变换公式及其矩阵；
(2) 如果直线 l 为 $Ax+By=0$(其中 A，B 不全为 0)，那么关于直线 l 的投影变换的坐标变换公式及其矩阵分别是什么？

二　二阶矩阵与平面向量的乘法

我们知道，线性变换与二阶矩阵是一一对应的. 能否直接用二阶矩阵表示线性变换呢？

在直角坐标系 xOy 内，如果规定每个向量都以坐标原点 O 为起点，那么任何一个向量 $\overrightarrow{OA}$ 就由其终点 A 唯一确定；反之，对直角坐标系 xOy 内的任意一点 A，有唯一的向量 $\overrightarrow{OA}$ 与之对应. 从而，直角坐标系内的向量与点是一一对应的. 因为平面内的点与有序实数对是一一对应的，从而平面内的向量与有序实数对也是一一对应的. 今后，为了方便，我们对向量、点以及有序实数对这三者不加区别. 例如，我们称点 A 的坐标 (x, y) 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标，或直接把向量 $\overrightarrow{OA}$ 叫做向量 (x, y).

向量 (x, y) 是一对有序数组，x，y 叫做它的两个分量. 我们把这两个分量按照 x 在上，y 在下的次序写成一列 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，这种形式的向量称为列向量. 相应的，形如 (x, y) 的向量称为行向量. 在本专题中，规定所有的平面向量都写成列向量的形式.

为了得到用二阶矩阵表示线性变换的方法，我们先考察上一节例 1 中得到的旋转角是 30°的旋转变换公式

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

上式表明，在旋转变换的作用下，直角坐标系内的向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 变成了新的向量 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$. 我们设想 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$ 是二阶矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ “相乘”的结果，即如果引进二阶矩阵与平面向量的乘法，使得乘积为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix},$$