

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

spark® 星火·燎原

丛书主编 马德高

高等数学辅导及习题精解

(同济·六版 下册)

本册主编 同济大学 彭 辉

联系考研, 渗透精讲历年考研真题

典型例题
分析

+

教材习题
答案

+

同步自测
练习

延边大学出版社

spark® 星火·燎原

高等数学辅导及习题精解

(同济·六版 下册)



延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书. 第5册
/ 马德高主编. — 延吉: 延边大学出版社, 2010.6
ISBN 978-7-5634-3211-0

I. ①高… II. ①马… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 072898 号

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

主编:马德高

责任编辑:赵立才

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号

邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435

传真:0433-2732434

印刷:山东鸿杰印务有限公司

开本:880×1230 1/32

印张:108 字数:2 750 千字

版次:2011 年 2 月第 1 版第 2 次印刷

ISBN 978-7-5634-3211-0

定价:134.60 元

前 言

高等数学是理工类专业重要的基础课程,也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》体系完整,层次清晰,讲解深入浅出,是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材,被全国许多院校采用。2007年同济大学数学系推出的《高等数学》第六版保持了该教材一贯的优点、特色,进一步强调了提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为了帮助读者学好高等数学,编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与技巧,提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第六版教材完全一致,共分十二章,每章又分若干节,每节包括两大部分内容:

一、知识要点与考点:用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理,并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点;

二、习题精解:对教材里该节全部习题做了解答。对部分有代表性的习题,在解题过程中,设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。另外本书还用“警示语”的形式对解题要点、技巧和解题中易错的地方做了简短警示。

为了帮助读者对每章所学过的知识进行复习巩固,在每章编写完后另外增加两部分内容:

一、本章知识结构及内容小结:先用网络结构图揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于学生系统地掌握本章知识体系和核心内容;然后给出了教材总习题全解:对每道题给出了详细解答,有的题还给出了“思路探索”和“方法点击”,以便帮助读者尽快找到解决问题的思路、方法、技巧和规律;

二、同步自测题及参考答案:精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测、巩固读者的学习效果,提高应试水平。

全书内容编写系统、独到,充分体现了如下三大特色:

一、知识梳理清晰、简洁:直观、形象的图表总结,精炼、准确的考点提炼,权威、独到的题型归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构,以便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,从而为以后提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动:所有重点、难点、考点,统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,给出丰富的精选例题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合,一举完成。

三、联系考研密切、实用:本书是一本教材同步辅导,也是一本实用的考研复习用书。书中处处联系考研:例题中有考研试题,同步自测题中也有考研试题,更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的重点、难点等,目的就是让读者同步完成考研备考,达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此,向这些书籍的编著者表示感谢。由于作者水平有限,书中疏漏与不妥之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编者

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数

第一节 向量及其线性运算	(423)
第二节 数量积 向量积 *混合积	(430)
第三节 曲面及其方程	(437)
第四节 空间曲线及其方程	(445)
第五节 平面及其方程	(449)
第六节 空间直线及其方程	(456)
本章知识结构及内容小结	(465)
同步自测题及参考答案	(471)

第九章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念	(476)
第二节 偏导数	(484)
第三节 全微分	(490)
第四节 多元复合函数的求导法则	(496)
第五节 隐函数的求导公式	(508)
第六节 多元函数微分学的几何应用	(515)
第七节 方向导数与梯度	(524)
第八节 多元函数的极值及其求法	(529)
*第九节 二元函数的泰勒公式	(538)
*第十节 最小二乘法(略)	(540)
本章知识结构及内容小结	(542)
同步自测题及参考答案	(550)

第十章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质	(555)
第二节 二重积分的计算法	(560)
第三节 三重积分	(586)
第四节 重积分的应用	(599)
*第五节 含参变量的积分	(610)
本章知识结构及内容小结	(614)
同步自测题及参考答案	(623)

第十一章 曲线积分与曲面积分

第一节	对弧长的曲线积分	(630)
第二节	对坐标的曲线积分	(636)
第三节	格林公式及其应用	(644)
第四节	对面积的曲面积分	(657)
第五节	对坐标的曲面积分	(664)
第六节	高斯公式 * 通量与散度	(671)
第七节	斯托克斯公式 * 环流量与旋度	(678)
	本章知识结构及内容小结	(685)
	同步自测题及参考答案	(695)

第十二章 无穷级数

第一节	常数项级数的概念和性质	(702)
第二节	常数项级数的审敛法	(709)
第三节	幂级数	(721)
第四节	函数展开成幂级数	(730)
第五节	函数的幂级数展开式的应用	(737)
* 第六节	函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	(743)
第七节	傅里叶级数	(748)
第八节	一般周期函数的傅里叶级数	(757)
	本章知识结构及内容小结	(761)
	同步自测题及参考答案	(769)
	第二学期期末考试模拟题	(777)

第八章 空间解析几何与向量代数

第一节

向量及其线性运算

一、知识要点与考点

1. 空间直角坐标系的概念

	定 义	说 明
空间直角坐标系	在空间取定一点 O , 和三个两两垂直的单位向量 i, j, k , 它们都是以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴), y 轴(纵轴) 和 z 轴(竖轴). 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系.	通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴是铅垂线, 它们的正向符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向.
坐标面	三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面	x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, y 轴和 z 轴确定 yOz 面, z 轴和 x 轴确定 zOx 面.
卦限	三个坐标面把空间分成的八个部分	一共八个卦限, 用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 来表示
空间中点的坐标	空间中任一点 M 在三条坐标轴上的投影 P, Q, R 在各自坐标轴上的坐标记为 x, y, z , 则点 M 与有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系, 称 (x, y, z) 为点 M 的坐标, 点 M 称为以 (x, y, z) 为坐标的点	
空间间的中距离	$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 则 M_1 和 M_2 之间的距离为 $d = M_1M_2 $	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

2. 向量的有关定义和性质

	定 义	说 明
向量(矢量)	既有大小又有方向的量称为向量.	<p>(1) 常用有向线段表示向量, 如 \vec{a}、\overrightarrow{AB} 等.</p> <p>(2) 将向量 \vec{a} 的起点与空间直角坐标系的原点重合, 则其终点的坐标 (x, y, z) 称为向量 \vec{a} 的坐标, 记作 $\vec{a} = \{x, y, z\}$ 或 $\vec{a} = xi + yj + zk$.</p> <p>(3) 设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.</p> <p>(4) 大小相等、方向相同的两向量相等.</p>
向量的模	向量的大小(或长度)	<p>(1) 向量 \overrightarrow{AB}、\vec{a} 的模依次记作 \overrightarrow{AB}、\vec{a}.</p> <p>(2) 模为 0 的向量叫做零向量, 记作 $\vec{0}$ 或 0, 它的方向可看作是任意的. 模为 1 的向量叫做单位向量. 与 \vec{a} 模相同, 方向相反的向量叫做 \vec{a} 的负向量, 记作 $-\vec{a}$.</p> <p>(3) 设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则 $\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.</p> <p>(4) 对空间中任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 有</p> $ \overrightarrow{M_1M_2} = \overline{M_1M_2} $ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$
向量的方向余弦	设向量 \vec{a} 与三坐标轴正向的夹角分别为 α, β, γ , 则 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 \vec{a} 的方向余弦	<p>(1) 如果 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则 $\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$,</p> $\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$ $\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$ <p>(2) $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 恰为与 \vec{a} 方向相同的单位向量, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.</p>

	定 义	说 明
向量的投影	已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和轴 u , M_1, M_2 在 u 上的投影分别为 M'_1, M'_2 , 那么 u 上的有向线段 $\overrightarrow{M'_1M'_2}$ 的值 $ \overrightarrow{M'_1M'_2} $ 即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 上的投影.	<p>(1) 若 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, \mathbf{a} 与轴 u 的夹角为 φ, 则 $\text{Prj}_u \mathbf{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \cos \varphi$.</p> <p>(2) (投影定理) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦; $\text{Prj}_u \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_2} \cos \varphi$.</p> <p>(3) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和, 即: $\text{Prj}_u (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2$.</p> <p>(4) 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积, 即: $\text{Prj}_u (\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_u \mathbf{a}$.</p> <p>(5) 向量在与其方向相同的轴上的投影为其模; 在与其方向垂直的轴上的投影为 0.</p> <p>(6) \mathbf{a} 在 x, y, z 轴上的投影坐标分别为 $\mathbf{a} \cos \alpha, \mathbf{a} \cos \beta, \mathbf{a} \cos \gamma$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.</p>

3. 向量的线性运算

	坐标表示	说 明
向量的数乘	$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则 $\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.	当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 反向, 其模 $ \lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} $.
向量的加法	$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$.	(1) 对向量的加法有平行四边形法则和三角形法则. (2) \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线 \Leftrightarrow 存在不全为零的数 λ, μ 使得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

4. 重点难点与考点

重点	向量、向量的线性运算、空间直角坐标系、方向角、方向余弦
难点	方向角、方向余弦、向量在轴上的投影
考点	向量的线性运算、方向角、方向余弦、投影

二、经典例题解析

基本题型 I: 有关向量的线性运算、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等问题

例 1 一向量 \mathbf{a} 与 x 轴正向、 y 轴正向的夹角相等, 与 z 轴正向的夹角是前者的两倍. 求与向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量.

【思路探索】 与向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量就是以向量 \mathbf{a} 的方向余弦为坐标的向

第8章 空间解析几何与向量代数

DI BA ZHANG

量.故问题求解的关键在于求出向量 a 的方向余弦.

解:设向量 a 与 x 轴正向、 y 轴正向的夹角为 α ,则它与 z 轴的正向夹角为 2α ,

那么, a 的方向余弦分别是 $\cos\alpha, \cos\alpha, \cos 2\alpha$,

故有 $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2(2\alpha) = 1$, 即 $2\cos^2\alpha - 1 + \cos^2(2\alpha) = 0$,

由此得到 $\cos 2\alpha(\cos 2\alpha + 1) = 0$.

$\therefore \cos 2\alpha = 0$ 或 $\cos 2\alpha = -1$.

又 $\because 2\alpha \in [0, \pi]$, $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

则 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = 0$ 或 $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1$.

因此,所求的单位向量为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 或 $(0, 0, -1)$.

【方法点击】 向量 a 的方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 满足关系式: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

例 2 设 $a = (4, 5, -3), b = (2, 3, 6)$, 求 a 对应的单位向量 a° 及 b 的方向余弦.

解:与 a 对应的单位向量 a° 是与 a 方向相同的单位向量, 因此

$$a^\circ = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2}}(4, 5, -3) = \left(\frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

$$\text{又 } b^\circ = \frac{b}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}(2, 3, 6) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

从而, b 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}, \cos\beta = \frac{3}{7}, \cos\gamma = \frac{6}{7}.$$

例 3 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $a = (8, 9, -12)$ 方向取长为 34 的线段 \overline{AB} , 求点 B 的坐标.

解:设 B 点坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x-2, y+1, z-7).$$

由于 \overrightarrow{AB} 与 a 方向一致, 故存在实数 $\lambda > 0$, 使 $\overrightarrow{AB} = \lambda a$, 即

$$(x-2, y+1, z-7) = \lambda(8, 9, -12)$$

得 $x-2 = 8\lambda, y+1 = 9\lambda, z-7 = -12\lambda$

又 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = 34$, 得

$$\sqrt{289\lambda^2} = 34, 17\lambda = 34, \text{得 } \lambda = 2, \text{所以}$$

$$x = 8\lambda + 2 = 18, y = 9\lambda - 1 = 17, z = -12\lambda + 7 = -17$$

B 点坐标为 $(18, 17, -17)$.

【方法点击】 $b \parallel a (a \neq 0) \Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

基本题型 II: 利用向量的运算与性质证明结论

例 4 试证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等

腰直角三角形.

$$\text{证明:} \because |\vec{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2}$$

$$\therefore |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 = |\vec{BC}|^2 \text{ 且 } |\vec{AB}| = |\vec{AC}|$$

从而, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 5 用向量的方法证明: 三角形的中位线平行于底边, 且它的长度等于底边的一半.

证明: 设 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点,

$$\therefore \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AB}, \vec{EA} = \frac{1}{2} \vec{CA},$$

$$\therefore \vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} = \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{AB}) = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

$$\text{即 } \vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{BC}.$$

故 $DE \parallel BC$ 且 $|\vec{DE}| = \frac{1}{2} |\vec{BC}|$, 结论得证.

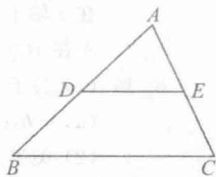


图 8-1

教材习题 8-1 解答 (下册 P₁₂)

1. 解: $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}) - 3(-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c})$

$$= 5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$$

2. 证明: 设四边形 $ABCD$ 中, \vec{AC} 与 \vec{BD} 相交于 M , 且 $\vec{AM} = \vec{MC}$,

$$\vec{DM} = \vec{MB}.$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{DM}$$

$$= \vec{DM} + \vec{MC} = \vec{DC}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DC} \text{ 且 } |\vec{AB}| = |\vec{DC}|$$

$\therefore ABCD$ 是平行四边形.

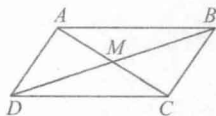


图 8-2

3. 解: $\vec{D_1A} = \vec{BA} - \vec{BD_1} = -\vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{BC} = -\mathbf{c} - \frac{1}{5} \mathbf{a}$

$$\vec{D_2A} = \vec{BA} - \vec{BD_2} = -\vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{BC} = -\mathbf{c} - \frac{2}{5} \mathbf{a}$$

$$\vec{D_3A} = \vec{BA} - \vec{BD_3} = -\vec{AB} - \frac{3}{5} \vec{BC} = -\mathbf{c} - \frac{3}{5} \mathbf{a}$$

$$\vec{D_4A} = \vec{BA} - \vec{BD_4} = -\vec{AB} - \frac{4}{5} \vec{BC} = -\mathbf{c} - \frac{4}{5} \mathbf{a}$$

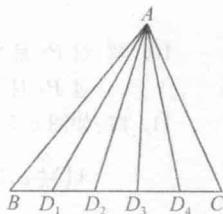


图 8-3

4. 解: $\vec{M_1M_2} = (1, -2, -2), -2\vec{M_1M_2} = (-2, 4, 4)$

5. 解: $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11$

$$\therefore e = \pm \frac{a}{|a|} = \left(\pm \frac{6}{11}, \pm \frac{7}{11}, \mp \frac{6}{11} \right)$$

6. 解: A: IV; B: V; C: VIII; D: III.

7. 解: 在 yOz 面上, 点的横坐标 $x = 0$;

在 zOx 面上, 点的纵坐标 $y = 0$;

在 xOy 面上, 点的竖坐标 $z = 0$.

在 x 轴上, 点的纵、竖坐标均为 0, 即 $y = z = 0$;

在 y 轴上, 点的横、竖坐标均为 0, 即 $z = x = 0$;

在 z 轴上, 点的横、纵坐标均为 0, 即 $x = y = 0$.

A 在 xOy 面上, B 在 yOz 面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. 解: (1) 关于 xOy 、 yOz 、 zOx 面的对称点的坐标分别为 $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$;

(2) 关于 x 、 y 、 z 轴的对称点的坐标分别为 $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$;

(3) 关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-a, -b, -c)$.

9. 解: xOy 面: $(x_0, y_0, 0)$; yOz 面: $(0, y_0, z_0)$; zOx 面: $(x_0, 0, z_0)$; x 轴: $(x_0, 0, 0)$; y 轴: $(0, y_0, 0)$; z 轴: $(0, 0, z_0)$. 如图 8-4 所示:

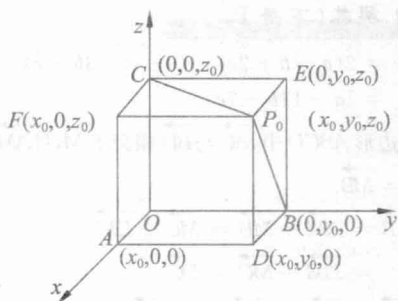


图 8-4

10. 解: 过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0 ;
过 P_0 且平行于 xOy 平面上的点具有相同的竖坐标 z_0 .

11. 解: 如图 8-5 所示, 各顶点的坐标分别为:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right),$$

$$D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right),$$

$$B'\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), D'\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$$

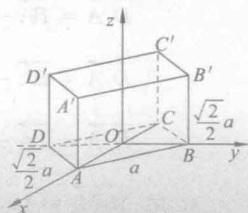


图 8-5

12. 解: 点 M 到 x 轴的距离: $r_x = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

点 M 到 y 轴的距离: $r_y = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

点 M 到 z 轴的距离: $r_z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

13. 解: 在 yOz 面上, 设点 $P(0, y, z)$ 与 A, B, C 三点等距离, 即

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2$$

$$\text{故} \begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解方程组, 得 $y = 1, z = -2$.

故所求点为 $(0, 1, -2)$.

14. 解答见 P_{126} 例 4.

15. 解: $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 2$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-1, -\sqrt{2}, 1) = 2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

16. 解: (1) 当 $\cos\alpha = 0$ 时, 向量与 x 轴垂直, 平行于 yOz 面;

(2) 当 $\cos\beta = 1$ 时, $\beta = 0$, 则向量与 y 轴正向一致, 垂直于 zOx 面;

(3) 当 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ 时, 则 $\cos^2\gamma = 1$. 故 $\gamma = 0$ 或 π , 此时向量平行于 z 轴, 垂直于 xOy 面.

17. 解: $\text{Prj}_r \mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cdot \cos\theta = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2$.

18. 解: 设起点 A 的坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z)$$

由题意, 得 $2-x = 4, -1-y = -4, 7-z = 7$

$$\therefore x = -2, y = 3, z = 0.$$

故起点 A 为 $(-2, 3, 0)$.

19. 解: $\mathbf{a} = 4(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

$$= 13\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

则 $a_x = 13$ 且 \mathbf{a} 在 y 轴上的分向量为 $7\mathbf{j}$.

第二节

数量积 向量积 * 混合积

一、知识要点与考点

1. 向量的运算

	定 义	说 明
数量积 (内积, 点乘)	两向量 a, b 的数量积 $a \cdot b = a b \cos\theta$ 是 a 与 b 的夹角	<p>(1) 若 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则 $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.</p> <p>(2) $a \cdot b = b \cdot a$.</p> <p>(3) $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$.</p> <p>(4) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.</p> <p>(5) a 与 b 的夹角余弦为 $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{ a b }$.</p> <p>(6) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ 即 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.</p>
向量积 (外积, 叉乘)	两向量 a, b 的向量积 $a \times b$ 为一向量 c , 其模为 $ a b \sin\theta$, 其中 θ 是 a 与 b 的夹角, 其方向垂直于 a 与 b 所决定的平面(即 c 既垂直于 a , 又垂直于 b), 且 c 的指向按右手规则从 a 转向 b 来确定.	<p>(1) 若 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则 $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \{a_y b_z - b_y a_z, a_z b_x - b_z a_x, a_x b_y - b_x a_y\}$.</p> <p>(2) $a \times b = -(b \times a)$.</p> <p>(3) $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$.</p> <p>(4) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.</p> <p>(5) a 与 b 的夹角正弦 $\sin\theta = \frac{ a \times b }{ a b }$.</p> <p>(6) $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ 其中 b_x, b_y, b_z 中有一个为 0 时, 如 $b_x = 0$, 应理解为 $a_x = 0$.</p> <p>(7) 以 a, b 为相邻边的平行四边形的面积为 $a \times b$; 若 a, b 为三角形的任意两边, 则三角形面积为 $\frac{1}{2} a \times b$.</p>

	定 义	说 明
混 合 积	对向量 a, b, c , 称 $(a \times b) \cdot c$ 为三向量 a, b, c 的混合积, 记作 $[a, b, c]$.	<p>(1) 若 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}, c = \{c_x, c_y, c_z\}$ 有 $[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.</p> <p>(2) $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$.</p> <p>(3) $(a \times b) \cdot c = -(b \times a) \cdot c = -(a \times c) \cdot b$.</p> <p>(4) $[a, b, c]$ 等于以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积, 并且当 a, b, c 成右手系时, $[a, b, c]$ 为正, 当 a, b, c 成左手系时, $[a, b, c]$ 为负.</p> <p>(5) a, b, c 共面 \Leftrightarrow 存在不全为零的 λ, μ 和 ν, 使得 $\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \Leftrightarrow (a \times b) \cdot c = 0$.</p>

2. 重点、难点与考点

数量积、向量积和混合积的定义、性质及相关运算.

二、经典例题解析

基本题型 1: 有关向量的数量积、向量积与混合积的运算及性质问题

例 1 设未知向量 x 与 $a = 2i - j + 2k$ 共线, 且满足 $a \cdot x = -18$. 求 x .

解: 方法一

由于 x 与 a 共线, 故设 $x = \lambda a = (2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$,

$$\therefore a \cdot x = (2, -1, 2) \cdot (2\lambda, -\lambda, 2\lambda) = 9\lambda = -18,$$

$$\therefore \lambda = -2,$$

$$\text{故 } x = (-4, 2, -4).$$

方法二

由于 x 与 a 共线, 故可设 $x = \lambda a$, 则

$$a \cdot x = a \cdot (\lambda a) = \lambda(a \cdot a) = \lambda|a|^2 = \lambda[2^2 + (-1)^2 + 2^2] = 9\lambda = -18,$$

$$\therefore \lambda = -2.$$

$$\text{故 } x = (-4, 2, -4).$$

例 2 已知 $|a| = 6, |b| = 3, |c| = 3, (a, b) = \frac{\pi}{6}, c \perp a, c \perp b$, 求 $[a, b, c]$.

【思路探索】 由定义, $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos(\widehat{a \times b, c})$. 故应先求 $|a \times b|$ 及 $\cos(\widehat{a \times b, c})$.

$$\text{解: } |a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(a, b) = 6 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} = 9$$

又 $\because c \perp a, c \perp b, \therefore c \parallel (a \times b)$,

故 c 与 $(a \times b)$ 的夹角 $\theta = 0$ 或 π .

第8章 空间解析几何与向量代数

DI BA ZHANG

因此, $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos\theta = \pm 27$.

例 3 设 $a = (1, -1, 1)$, $b = (3, -4, 5)$, $c = a + \lambda b$, 问 λ 为何值时, $|c|$ 最小? 并证明: 当 $|c|$ 最小时, $c \perp b$.

解: $|c|^2 = (a + \lambda b) \cdot (a + \lambda b) = (b \cdot b)\lambda^2 + 2(a \cdot b)\lambda + (a \cdot a)$, 所以当 $\lambda = -\frac{a \cdot b}{b \cdot b} = -\frac{12}{50} = -\frac{6}{25}$ 时, $|c|$ 最小,

$$\begin{aligned} \text{此时 } c \cdot b &= (a + \lambda b) \cdot b \\ &= (a \cdot b) + \left(-\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right)(b \cdot b) = 0, \end{aligned}$$

所以 $c \perp b$.

例 4 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路探索】 利用向量运算的性质将要求的式子展开化简.

$$\begin{aligned} \text{解: } [(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) &= (a \times b + a \times c + b \times b + b \times c) \cdot (c + a) \\ &= (a \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c + a) \\ &= (a \times b) \cdot c + (a \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot a \\ &= (a \times b) \cdot c + a \cdot (c \times c) + b \cdot (c \times c) + b \cdot (a \times a) + c \cdot (a \times a) + (a \times b) \cdot c \\ &= 2(a \times b) \cdot c = 4. \end{aligned}$$

【方法点击】 熟练掌握向量的数量积、向量积与混合积的基本性质.

基本题型 II: 关于向量的平行、垂直、共面关系及夹角的问题

例 5 已知 $a = i$, $b = j - 2k$, $c = 2i - 2j + k$, 求一单位向量 m , 使 $m \perp c$, 且 m 与 a, b 共面.

解: 设所求向量 $m = (x, y, z)$, 依题意, 有

$$|m| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$m \perp c \Rightarrow m \cdot c = 0 \Rightarrow 2x - 2y + z = 0$$

$$m \text{ 与 } a, b \text{ 共面} \Rightarrow [m, a, b] = 0, \text{ 即 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2y + z = 0$$

以上三式联立, 解得

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{2}{3}, \text{ 或 } x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{2}{3},$$

$$\therefore m = \pm \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

【方法点击】 涉及到共面问题时, 常用混合积.

例 6 设 $a + 3b$ 与 $7a - 5b$ 垂直, $a - 4b$ 和 $7a - 2b$ 垂直, 求非零向量 a 与 b 的夹角.

解: 由 $(a + 3b) \perp (7a - 5b)$, 得