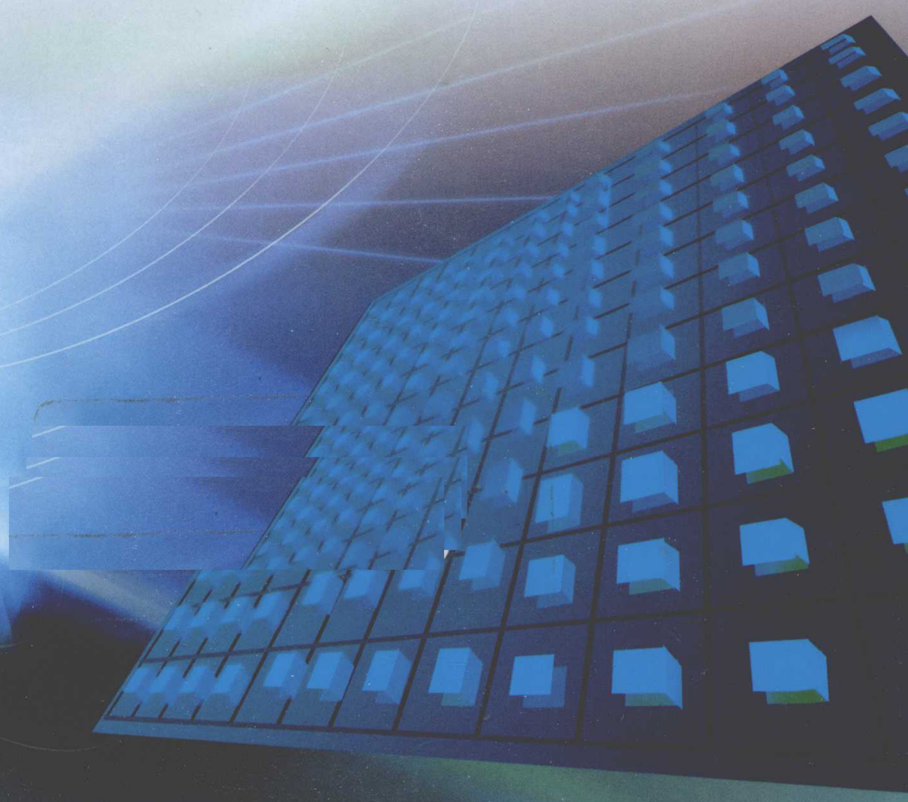
MATHEMATICAL
MODELING

数学建模

——方法导引与案例分析

◎ 方道元　韦明俊　编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学建模

——方法导引与案例分析

方道元　韦明俊　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内 容 简 介

“数学建模”是随着科技进步越来越受人们重视的课程。本书以物理、生态、环境、医学、经济等领域的一些典型实例阐述了建立数学模型解决实际问题的基本方法和技能。阅读本书有助于拓展视野，增强应用数学思想和方法解决实际问题的能力。

本书可用作普通高校或高职院校的数学建模课程教材，同时也可供高等院校师生及各类科技、工程工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模:方法导引与案例分析 / 方道元，韦明俊编著. —杭州：浙江大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-308-08389-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①方… ②韦… Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 013597 号

数学建模——方法导引与案例分析
方道元　韦明俊　编著

责任编辑　王　波
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310007)
（网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　杭州印校印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　21
字　　数　511 千
版 印 次　2011 年 2 月第 1 版　2011 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08389-8
定　　价　39.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

序　言

数学建模课程已经成为理工科院校以及一些高职院校的必修课。这样一门课程能迅速地得以认可，从客观上讲应得益于计算机科学的快速发展。正是由于计算机的发展，人们总希望各项工作能由机器来协助或代替完成，而这样的愿望的实现，就严重地依赖于数学模型的建立。就我国而言，另一个重要的动力来源得归功于数学建模的赛事在全国各高等院校的推开。二十多年前，姜启源、叶其孝和谭永基等教授为这项竞赛的形成、发展付出了大量的心血。但应该说竞赛只是手段，目的是想通过这样的赛事来推动教学改革。

浙江省成立数学建模赛区已经是20世纪90年代中期的事情了，当时我作为浙江大学数学建模课程的主要建设者之一，为这项赛事在浙江的发展做了大量的工作。由于当时的省教委高教处和校教务处的重视，在分管领导的推动下我和杨启帆合写了一本《数学建模》教材，作为省面向21世纪教学改革的重点教材于1999年9月出版发行。该书到2005年3月就已经印了17000册，可见是很受广大读者欢迎的。该教材的重要特色之一就是强调了数学建模的基本思想和技能，并将建模思想和方法作为建模基础单独成篇，这使得新手很容易知道何为建模、如何建模、如何评判等。在本人的再三努力和出版社的支持下，在这里我将数学建模的基础部分单独成书。为适应教学的需求，我们还吸收了统计建模技术等一些内容，以全新的面目与读者见面。

为了符合循序渐进的原则，本书分为建模基础、一些理想化问题的模型以及一些典型实例的模型三部分。第一部分除了原有的介绍如何建模，如何分析、评判模型等内容外，新增了基本的统计技术。有了这一部分内容的准备，我们就可以通过对一些常见的基本问题的分析建立相对理想化的模型，这即是本书第二部分的内容。通过这样的基本训练以后，我们相信读者就有能力来建立和评析一些离实际更为贴近和合理的实用模型，这即是本书第三部分的内容。这一部分主要是由韦明俊博士编写的。他多年来都在从事数学建模竞赛的辅导和教学工作，具有丰富的经验。为了使读者有练习和提高的机会，我们还分类给出了相关的练习，特别是在附录中我们提供了一些较典型的数学建模竞赛试题和竞赛获奖论文，相信这是有益的。

本书不仅可以作为数学建模课程的教材或参考书，而且也可以作为本科、高职院校理工科学生以及计算机软件爱好者的参考读物。相信本书对于提高他们分析问题和应用知识解决问题的能力将起到积极的作用。通过阅读本书可以知道，只要具备一定的数学知识的人都可以根据不同的需求来建立自己的模型，就像构建自己的人生轨迹的模型一样，只有不断地改进，才能与时俱进。

方道元

2010年12月

目　　录

第一篇　建模基础

第二篇　一些理想化问题的模型

第三篇 一些典型实例的模型

附录 竞赛试题、论文选编及评价

第 一 篇

建 模 基 础

第 1 章　什么是数学建模

一、数学建模流程

何谓数学建模？简单地说它是建立数学模型的过程. 应该说我们对它并不陌生，早在中学，甚至小学时代就已经用建立数学模型的办法来解决过一些简单的或理想化的实际问题. 例如航行问题：甲乙两地相距 750 公里，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需 50 小时，问船速、水速若干？

这是一个非常理想化的实际问题. 显而易见，此题把航行中船速和水速都设为常数了. 求解这个问题当然是设船速、水速分别为 x 和 y，由题意并用匀速运动的距离等于速度乘以时间表达，即

$$(x+y)\cdot 30=750,\qquad (x-y)\cdot 50=750 \tag{1.1}$$

求解上述二元一次方程组，得

$$x=20,\qquad y=5 \tag{1.2}$$

这样我们就知道了船速、水速分别为 20 公里/小时，5 公里/小时.

这个问题固然简单，但其求解经历了以下过程：首先根据问题的所求明确了变量，然后根据"匀速运动的距离＝速度×时间"这一物理规律建立了变量之间的一个明确的数学方程式（称之为数学模型）；求解这个数学模型而得数学解. 解释验证这个解发现与要求相符，说明我们的模型是正确的.

上述航行问题大致描述了用数学建模方法解决实际问题的途径，一般说来数学建模过程可以用图 1.1 所示的流程框图来说明.

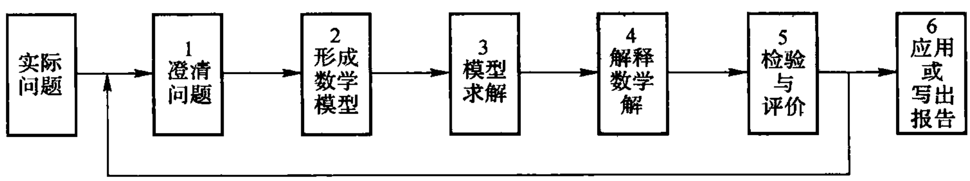


图 1.1　数学建模流程图

从以上框图可以看出，数学建模的过程就是一个执行上述流程框图的多次循环过程.

框 1——澄清问题　现实问题往往是复杂而零乱的，所以有必要认真审题. 澄清什么是已知的，什么是要求的，是确定型的还是随机型的问题，等等. 根据建模的对象和目的充分发掘解题的信息，如事实、数据等. 在澄清问题的同时，要着手对问题进行抽象和简化. 要注意的是这一工作往往不是一次能够完成的，有时需要反复几次.

框 2——形成数学模型　首先是寻找最简单的模型，如可能也可以作图说明. 可根据建模的对象、目的具体地找出所有的相关因素，抓住主要的方面进行定量研究，即参考因素间

的关系，提取主要因素. 确定出诸因素中哪些是变量，哪些是参量，哪些是常量，并采用适当的符号、单位来标识. 如有可能或必要可收集尽可能多的数据. 然后考察各信息因素的性态，以及它们之间的关系，使用数学技能或应用某种"规律"建立变量、参量间的明确的数学关系，如比例关系，线性、非线性关系，指数关系，输入、输出关系，牛顿第二定律，能量守恒，差分、微分方程，矩阵，概率统计等. 然后，可根据问题的要求对模型进行必要的修改.

框 3——模型的求解　选择适当的数学方法求得数学模型的解. 可以用代数方法、数值方法和分析、图论方法等. 如有可能，可以使用各种软件包. 值得注意的是许多数学模型往往是很复杂、很难的，有时往往要根据实际情况对模型作简化，使得解析或数值求解成为可能. 若是数值计算，要注意计算的复杂性问题.

框 4——解释数学解　考察所得的数学解，是否具有应有的性质. 同时把数学的表述解释或翻译成与实际问题相适应的通俗易懂的语言.

框 5——模型的检验与评价　建模是否正确还必须验证. 常常是用实验或问题提供的信息记录来进行检验：检验解对参数、初始数据的敏感程度；检验你的预测是否已经达到精度的要求，是否已经达到预期的目的等. 如果还想更精确地刻画问题的解，是否还需改进你的模型，如果是，则返回到框 1；否则进入框 6. 一个成功的模型往往是一个多次循环的过程.

框 6——建模报告　有关模型报告的写作参见 2.8 节.

此外，尚有几点说明：

(1)若对模型进行了简化，实质上是改变了原问题，简化后的模型只能说是原问题的一种近似，要做到正确的近似不仅需要很强的分析问题的能力，而且需要有很强的洞察力.

(2)任何一个模型(包括物理模型)都能定义为现实系统的某些方面的简化表示. 一个数学模型就是用数学概念、函数、方程等建立起来的模型.

(3)上面的流程图仅供初学者作参考，给初学者有一个基本的建模概念，在实际操作时未必严格按照这一流程进行.

二、举例

为了帮助读者理解与认识上述建模流程，这里给出一个大家都熟悉的例子.

雨中行走问题：天将下雨，从寝室到教室有一段约一公里的路程. 由于事情紧急，不拿雨具就跑出去了. 可刚到门口，天已下了大雨. 如果冒雨行走，问你将会被淋得多湿？

这个问题看起来很简单，只要跑得越快越好. 然而把雨的方向的变化考虑进去，不见得如此.

1. *澄清问题*

给定一个特定的降雨条件，能否设计一个方案使你被雨淋得最少？这个模型是确定的，因为它完全依赖于降雨速度、风向、路程与奔跑速度. 我们需要给出一个依赖于这些因素的确定淋雨量的公式. 通过调查可以知道一组比较典型的数据：雨速＝4 米/秒；走速＝2 米/秒；跑速＝6 米/秒；路程＝1000 米；降雨量＝2 厘米/小时.

与此问题有关的因素：

因素	符号	单位
淋雨时间	t	秒

雨速	r	米/秒
雨的角度(由于有风)	θ	度
走速	v	米/秒
人的高度	h	米
人的宽度	w	米
人的厚度	d	米
淋雨量	C	升
雨的强度	I	
行走的距离	D	米

2. 形成模型

首先我们建一个尽可能简单的模型. 假设人所走的路线是直线,将人体视为长方体,设雨速为常数,不考虑雨向. 若在整个一公里路程中你的跑速均为 6 米/秒,则

$$淋雨时间=\frac{1000\ 米}{6\ 米/秒}\approx 167\ 秒=2\ 分\ 47\ 秒$$

若降雨量为每小时 2 厘米,则 2 分 47 秒中的降雨量为 $2\times167\times0.01\div3600$ 米. 此时,若取人高为 1.5 米、宽为 0.5 米、厚为 0.2 米,则前后的表面积为 1.5 平方米,侧面积为 0.6 平方米,顶部面积为 0.1 平方米. 这样总面积为 2.2 平方米. 设这些表面积都淋雨,则

$$淋雨量=\frac{2\times167\times0.01\times2.2}{3600}\approx 2.041(升)$$

这样约有相当两瓶啤酒的雨量淋在你的身上.

通常,我们去掉雨是垂直而下的假设. 在前面所列的因素中,并不都是变量,事实上,r、θ、v、t 和 C 是变量而其他量在这个特殊情形不是变量. 另外雨速和降雨量是有区别的. 如果雨是像河流一样的连续水流,则雨速就能确定我们在地域上的降雨量. 显然,这是不现实的,因为雨是离散雨点的流. 以上为描述雨量的大小而引入了雨的强度概念.

从上面给出的数据知道雨速为 4 米/秒 $=1.44\times10^6$ 厘米/小时,而降雨量为 2 厘米/小时. 雨速与降雨量的比为 7.2×10^5,定义雨的强度 $I=1/(7.2\times10^5)$. 这样雨的强度反映了雨的大小,如果 $I=0$,就说明没有雨. 当强度 $I=1$ 时是暴雨,雨水就像屋檐水一样的连续流.

由于速度已取作常数,则淋雨时间 $t=D/v$(秒). 为考虑被淋湿的程度,必须考虑关于行走方向与雨的方向的关系,如图 1.2 所示.

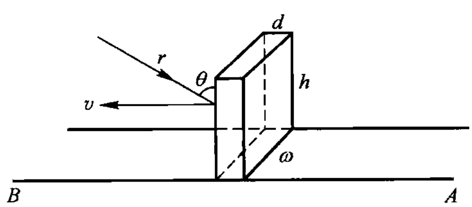


图 1.2

由于雨是呈一个角度降下来的,能看到在任何情形下受雨面仅为人顶部和前部. 故而淋

在人身上的雨量可分以下两种情况来计算:

(1)考虑人的顶部

顶部的表面积$=wd$ 米^2,雨速的分量为$=r\cos\theta$ 米/秒. 因为淋雨率=强度×面积×雨速$=Iwdr\cos\theta$ 米^3/秒(单位时间内的淋雨量),这样在时间 D/v 中的

$$\text{淋雨量}=\frac{DIwdr\cos\theta}{v}\ (\text{米}^3) \tag{1.3}$$

(2)考虑人的前部

前部的面积$=wh$(米^2),雨的分量$=r\sin\theta+v$(米/秒). 因此,淋雨率为 $Iwh(r\sin\theta+v)$(米^3/秒),在时间 D/v 中的

$$\text{淋雨量}=\frac{IwhD(r\sin\theta+v)}{v}(\text{米}^3) \tag{1.4}$$

从式(1.3)和式(1.4)知总淋雨量为

$$C=\frac{IwD}{v}[rd\cos\theta+h(r\sin\theta+v)]\ (\text{米}^3) \tag{1.5}$$

从前面给出的数据知 $h=1.5$,$w=0.5$,$d=0.2$,$r=4$,$D=1000$,$I=1/7.2\times10^5$. 于是

$$C=\frac{0.8\cos\theta+6\sin\theta+1.5v}{1.44\times10^3v}\ (\text{米}^3) \tag{1.6}$$

这样所求的数学模型为给定 θ 选取怎样的 v 使得式(1.6)中的 C 最小?

3. 模型求解

分几种情形讨论这个模型:首先,如果 $I=0$,则有 $C=0$;其次,将根据是朝着雨还是背着雨. 考虑几个特殊情形:

(1)$\theta=0°$

这时雨是直下的,从式(1.6)知,当 v 最大时,C 最小. 即当 $v=6$ 米/秒时

$$C=\frac{9.8}{1.44\times10^3\times6}\approx1.13\ (\text{升})$$

(2)$\theta=30°$

雨朝你而下,这时

$$C=\frac{0.4\sqrt{3}+3+1.5v}{1.44\times10^3v}\ (\text{米}^3)$$

在这种情形是 v 最大时,C 最小:

$$C_{\min}=\frac{0.4\sqrt{3}+3+9}{1.44\times6}=1.47\ (\text{升})$$

(3)负角

这时雨来自你的后面,取 $\theta=-\alpha$,得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha-6\sin\alpha+1.5v}{1.44\times10^3v}\ (\text{米}^3)$$

对于充分大的 α,这个表达式会出现负号,而这是不可能的. 所以仍回到式(1.3)去分析这种情形. 分两种情形来决定你该走多快:

(a)若 $v<r\sin\alpha$,则你背后的淋雨量为 $IwDh(r\sin\alpha-v)/v$. 总淋雨量

$$C=\frac{IwD}{v}[rd\cos\alpha+h(r\sin\alpha-v)]$$

把数据代入得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha+1.5(4\sin\alpha-v)}{1.44\times10^{3}v}\ (\text{米}^3)$$

这时如果你以速度 $4\sin\alpha$ 行走，这个表达式可改写为

$$C=\frac{0.8\cos\alpha}{1.44\times10^{3}\times4\sin\alpha}$$

即为淋在头顶的雨量. 这样如果雨以 30°的倾角从后面下来，你就应该以 2 米/秒（$4\sin30°$）的速度行走，淋雨量仅为 0.24 升.

(b) $v>r\sin\alpha$

这时式(1.3)为 $IwhD(v-r\sin\alpha)/v$，于是

$$C=\frac{IwD}{v}[rd\cos\alpha+h(v-r\sin\alpha)]\ (\text{米}^3)$$

把数据代入得

$$C=\frac{0.8\cos\alpha+1.5v-6\sin\alpha}{1.44\times10^{3}v}\ (\text{米}^3)$$

于是，在 θ 为负角的情况下，当 $0.8\cos\alpha-6\sin\alpha<0$，即 $\tan\alpha>\frac{2}{15}$ 时，$v_{\min}=r\sin\alpha$，则 C 最小；当 $0.8\cos\alpha-6\sin\alpha>0$，即 $0<\tan\alpha\leqslant\frac{2}{15}$ 时，v 越大则 C 越小.

4. 数学解的解释

上述结果似乎与实际有些相符，它告诉我们：如果你是逆风行走，则越快越好；如果是顺风，则当雨的倾角大于约 8°时，你应该保持与水平雨速一致的速度；而当雨基本上是垂直而下时（倾角小于约 8°），还是越快越好.

数学模型在自然科学、工程领域中的重要性已广为人知了. 在学习这门课程的一开始就应认识到它与其他的数学课程不同，它没有理论的学习，仅有一些纲要的引导，这并不意味着它是一门容易学的课程，困难并不在于学习或理解所要用的数学，而在于何处、何时用之. 要学好这门课程，不仅要注意培养自己理解实际问题的能力、抽象分析问题的能力，而且还要训练自己应用各种知识、特别是数学知识、数学技能的能力.

数学模型可以按照不同的方式分类，如按照变量的关系分，可以分为几何模型、微分方程模型、代数模型、概率统计模型、逻辑模型等；按变量的性质可分为确定性模型、随机性模型和模糊性模型，或分成连续性模型和离散性模型.

第 2 章 数学建模的基本技能与方法

2.1 建模的基本技能

一、列出相关因素、作出合理假设

面对一个问题如何下手往往是最困难的事，特别是对初学者更是如此. 建模的一个基本原则是认真分析所给的问题，找出所有相关的因素. 这里的因素可以是定量的，即可以由数量来描述，也可以是定性的，如有可能还可以找出各因素间的一些简单关系式. 定量的因素可以分为变量、参量、常量(比如光速). 参量是这样一些量，它对于一个特定的问题可以认为是常量，但对不同的问题这个常量也就不同. 变量可分离散的与连续的，也可以分确定的与随机的. 在一个实际问题中，往往会有很多因素与之有关. 所以在收集好这些相关因素之后，先考虑一些主要的因素，丢弃一些与问题关系不太大的次要的因素，并且区分出哪些因素是输入变量(自变量)——可以影响模型，但其性状不是该模型所要研究的那些因素，哪些是输出变量(因变量)——其性状是这个模型打算研究的那些因素，并给出适当的符号与单位. 要做到这一点有时是很困难的，这不仅有赖于对问题的深刻认识而且还有赖于建模的经验. 对于有些因素虽然并非认为是无足轻重的，但还是把它略掉了，原因在于建模者不能处理它们，只能寄希望于略去之后不会使结果有太大的影响.

为使建模得以进行，我们必须作一些合理的假设. 假设的目的在于给出变量的取舍，即选出主要因素，忽略次要因素，使问题简化以便进行数学描述，又抓住了问题的本质. 如果我们把它比作“建房”，各个因素就是建房的砖块，而假设就像水泥把各个因素构在一起. 一个模型是否成功很大程度上依赖于假设的合理性，这当然主要取决于建模工作者的经验.

一般来说，假设可以分为两类：一类是为简化问题的需要而作的；而另一类是为了沿用某种数学方法之需要而作的. 这是由数学建模本身所决定的. 数学建模就是采用或建立某种数学方法来解决具体问题，而每种理论的应用都必须满足一定的条件，因此能否应用所需的数学方法的关键在于所研究的对象是否大体满足相应的条件. 但必须指出：一个假设是否合理，最重要的是它是否符合所考虑的实际问题，而不是为了解决问题的方便而扭曲了原问题.

在初次建模时，要选择假设使模型尽可能简单，把所有的假设清楚地写下来，使得你自己知道，而且也能使别人确切地知道是在怎样的假设下完成模型的. 不同的假设就可能得到不同的模型，所以描述一种情况的最佳模型通常不止一个. 在一个模型中不可能同时使普遍性、现实性、精确性都很佳. 所以在建模时可根据不同情况作出合理的取舍.

一旦建好了第一个模型，就要着手考虑问题中的其他因素的影响，对模型进行修正. 一

个良好的模型不但要刻画出问题的本质，而且还要使得模型不至于太复杂而导致实际上无法求解．这就要看你能否处理好简单与复杂、精确与普适之间的矛盾．

注意，在作假设时千万不要图处理问题的方便而忽视了与所给问题的相符性．其实与所给问题的相符性才是最重要的假设准则．

例 2.1　洗菜盘　我们知道在饭店里有很多菜盘要洗，为了洗涤的方便，通常是把盘子放在盛有热水的池中进行，当然水温不能太高以免烫手，但也不能太低使得脏东西洗不掉．问题是随着洗涤的进行，水温也在慢慢的冷却直到不能方便地洗掉脏物，又重新换一池水．你能否建立一个数学模型说明一池热水可洗多少盘子？

与此问题有关的显然有盘、水、池和空气等，如果我们忽略池的因素，其他因素可以罗列如下：

与水有关的因素有水量、初始温度、最后温度、表面积、水流、热容量以及热交换系数等；与盘子有关的因素有数量、大小、初始温度、最后温度、热容量等；与空气有关的因素有气温、对流等．

为建模的简单，假设：

(1)设水池不参与任何热交换．

(2)我们洗盘时一次洗一个，洗涤的过程是先把盘子放入水中，在水中洗涤 ΔT 的时间后取出去冲洗．

(3)在洗涤过程中池中的水量为一常数．

(4)设初始盘温与空气温度一样．

(5)设 ΔT 有足够长的时间使盘在水中达到与水温相同以及使得盘子能洗净．

(6)设 ΔT 对所有的盘子都是一样长的．事实上这样的假设不尽合理，因为随着水温的下降，浸泡的时间也要随之增长，但在模型精度要求不高的情况下，还是可以认为是合理的．

(7)设水温的损失主要是由于通过水的表层散热和对流、水与盘的热传导，在溶解盘中脏物时的热量传导．

在这样的假设下，可找出其主要因素并列示如下：

描述	变量类型	符号	单位
盘子数	变量	n	整数
盘的质量	变量	M	千克
空气温度	参数	T_a	开耳芬温标
水温	变量	T_w	开耳芬温标
初始水温	参数	$T_w(0)$	开耳芬温标
最终水温	参数	T_f	开耳芬温标
水的质量	参数	M_w	千克
水的表面积	参数	A	米^2
从水到空气的热交换系数	参数	h	瓦特/米^2 开耳芬温标
盘子的热容量	参数	C_p	焦耳/米^3 开耳芬温标
水的热容量	参数	C_w	焦耳/米^3 开耳芬温标

作为参考给出一些具体的数据如下：$C_p=600$ 焦耳/米^3 开耳芬温标（陶瓷），$C_w=4200$ 焦耳/米^3 开耳芬温标，$M_p=0.5$ 千克，$M_w=15$ 千克，$T_a=20℃$，$T_w(0)=60℃$，$A=0.1$米^2，

$T_f=40℃$，$h=100$ 瓦特/米^2 开耳芬温标.

建立此模型的主要思想是用热能的守恒，这里从略.

例 2.2　最优捕鱼策略　为了保持人类赖以生存的自然环境，可再生资源（如渔业、林业资源）的开发必须适度. 一种合理、简化的策略是，在实际可持续捕获的前提下，追求最大产量或最佳效益.

考虑对某种鱼（鱼）的最优捕捞策略：假设这种鱼分 4 个年龄组：称 1 龄鱼，…，4 龄鱼. 各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07，11.55，17.86，22.99（克）；各年龄组鱼的自然死亡均为 0.8（1/年）；这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5（个），3 龄鱼的产卵量为这个数的一半，2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后 4 个月；卵孵化并成活为 1 龄鱼，成活率（1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比）为 $1.22\times10^{11}/(1.22\times10^{11}+n)$.

渔业管理部门规定，每年只允许在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力（如渔船数、下网次数等）固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比，比例系数不妨称捕捞强度系数. 通常使用 13mm 网眼的拉网，这种网只能捕捞 3 龄鱼和 4 龄鱼，其两个捕捞强度系数之比为 0.4∶1. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

要建该问题的数学模型，必须澄清两个问题：一是如何实现可持续捕获（即每年开始捕捞时渔场中各年龄鱼群条数不变），并且在此前提下得到最高的年收获量（捕捞总重量）；二是该渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年，合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏. 已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为 122、29.7、10.1、3.29（$\times10^9$ 条），如果仍用固定努力量的捕捞方式，该公司应采取怎样的策略才能使收获量最高.

分析题意不难看出与问题相关的因素有鱼池的环境、鱼的生长、繁殖、死亡等情况，以及捕捞方式、强度等. 为了使问题简化，可以作如下的假设：

(1)只考虑一种鱼的繁殖和捕捞，鱼群增长过程中不考虑鱼的迁入与迁出.

(2)各年龄组的鱼在一年内的任何时间都会发生自然死亡.

(3)所有的鱼都在每年最后的四个月内（后 1/3 年）完成产卵和孵化的过程. 孵化成活的幼鱼在下一年初成一龄的鱼进入一龄鱼组.

(4)产卵发生于后四个月之初，产卵期鱼的自然死亡发生于产卵之后.

(5)相邻两个年龄组的鱼群在相邻两年之间的变化是连续的，也就说，第 k 年底第 i 年龄组的鱼的条数等于第 $k+1$ 年初第 $i+1$ 年龄组鱼的条数.

(6)四龄以上的鱼全部死亡.

(7)采用固定努力量捕捞的速度正比于捕捞时各年龄鱼群中鱼的条数. 比例系数为捕捞强度系数.

在以上的假设下与问题相关的主要因素可以罗列如下：

时间 t；t 时刻 i 年龄组的鱼群数量 $x_i(t)$；鱼的平均死亡率 r；i 年龄组鱼的产卵率 f_i；i 年龄组鱼的平均重量 w_i；i 年龄组的捕捞强度系数 q_i；产卵时间 $\bar{t}=2/3$；捕捞努力量 E；i 年龄组的年捕捞数量 Y_i；年捕捞量 Y 等.

二、数据的作用与收集

数据意指在考察现实问题中所收集的一些量化材料，是通过测量或观察得到的，虽然有