全日制十年制学校

初中数学第二册

教学参考书

人民教育出版社

目 录

第五章　二元一次方程组

I. 目的要求

1. 使学生理解二元一次方程解的不定性、二元一次方程解的集合的意义，理解方程组、方程组的解和解方程组的意义.

2. 使学生能够熟练地用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组，并会解三元一次方程组.

3. 使学生会用布列二元一次方程组的方法来解决一些实际问题，不断提高学生分析问题和解决问题的能力.

4. 结合一次方程组解法的教学，注意分析"未知"与"已知"、"多元"与"一元"的矛盾及其转化，对学生进行辩证唯物主义观点的教育，并注意结合实际问题的内容，对学生进行政治思想教育.

II. 教材说明

本章内容是在学生掌握了有理数、整式的加减、一元一次方程等知识的基础上学习的. 二元一次方程组是学习线性方程组的基础，在进一步学习一次函数和平面解析几何等内容时，经常要用到解二元一次方程组的知识，在三大革命实践中也有很多实际问题需要用二元一次方程组来解决.

教材首先引入二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组、二元一次方程组的解等概念. 课本用两个二元一

次方程解的集合的公共部分说明二元一次方程组的解，这样既有利于深刻理解二元一次方程组的解的概念，又为进一步学习作了准备，然后通过九个例题重点介绍二元一次方程组的两种解法——代入法、加减法．继而是三元一次方程组解法举例，最后介绍二元一次方程组的应用题．通过这些内容的学习，注意培养学生正确迅速的运算能力和分析问题解决问题的能力．

就方程组的概念来说（由几个方程组成的一组方程，叫做方程组），课本上没有涉及未知数的个数和方程的个数之间的关系．我们知道，可以有未知数的个数比方程的个数多、少或者相等这三种情形．课本中只研究相等的一种情形．因此本章介绍的二元一次方程组和三元一次方程组，都是未知数的个数和方程的个数相同的那些方程组，不涉及其它两种情形（见课本第 4 页倒数第 5 行及第 15 页第 4 行）．

由含有相同的两个未知数的两个一次方程所组成的二元一次方程组，它的解的情况，可能有唯一的一个解、无数个解或者无解（见附录）．本章主要研究有一个解，并且只有一个解的二元一次方程组，不研究另外两种情形．

本章教材的重点是二元一次方程组的解法，这是因为二元一次方程组是进一步学习所必须的基础知识，在解决较复杂的实际问题时比用一元一次方程容易一些，因而要求学生能够熟练地掌握二元一次方程组的解法．解二元一次方程组的关键是掌握消元的方法，这是因为在解二元一次方程组时，不论用代入法消元，还是用加减法消元，都是设法消去其中的一个未知数，得出一个一元一次方程，从而求得方程组的解．

本章教材的难点之一是二元一次方程的解的不定性，学生过去解一元一次方程得到的解都是一个，而二元一次方程的解则有无数多个，这是学生过去没有见过的. 而每一个解又有一对数，对于解的不定性和相关性，学生是不易理解的. 再一个难点是方程组的解的意义，而更主要的难点还是布列二元一次方程组来解应用题. 这是因为学生一方面对于了解题意(实际问题中的数量关系)有一定的困难，另一方面不会分析问题中所给出的两个条件，布列两个方程. 解决这一难点的关键在于正确分析应用题中已知和未知之间的数量关系，从而找出两个等量关系，列出两个不同的方程.

本章教学时间约需 18 课时. 具体分配如下(仅供参考):

5.1	二元一次方程	约 1 课时
5.2	二元一次方程组	约 1 课时
5.3	用代入法解二元一次方程组	约 2 课时
5.4	用加减法解二元一次方程组	约 3 课时
	练习课	约 2 课时
5.5	三元一次方程组的解法举例	约 2 课时
5.6	一次方程组的应用题	约 5 课时
	小结和复习	约 2 课时

5.1 二元一次方程

1. 课本关于二元一次方程的解是这样定义的：“能够适合于一个二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解”. 要让学生注意这里的“一个解”是指“一对

未知数的值(适合于方程的)”，如$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$是方程 $x+y=7$ 的一个解．课本把$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$不叫做“一组解”，而叫做“一个解”，是为了与后面的定义前后一致．我们知道，线性方程组中，一个 n 元方程的一个解可以看成一个 n 维向量，叫做它的解向量．同样，二元一次方程的一个解，就是一对有顺序的实数，可以看成一个向量(二维的)，这一对有序实数必须合在一起才能构成一个向量，例如对于方程 $x+y=7$，不能说 $x=3$ 是方程的解，只有当 $x=3$ 时求出 $y=4$ 并且写成$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$才是方程的一个解．教学时可以根据学生的实际情况，先复习一元一次方程的概念和一元一次方程解的概念，再用课本中的例题引入二元一次方程的概念．并启发学生找出使这个二元一次方程($x+y=7$)左右两边的值相等的未知数的值，从而说明适合于二元一次方程的两个未知数的值合在一起，叫做这个方程的一个解．要强调这两个未知数的值必须“适合于”方程，并且要强调这是方程的“一个解”，而不能说是两个解，因为它们合在一起才能满足方程．问题的条件是两个数的和是 7，只求出一个数还不能满足这个条件，必须求出另一个数，才能满足条件，因为这两个数是相关的，为了表示它们的相依关系，才加上“{”把它们合在一起，写成$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$的形式，叫做方程的一个解．

2．二元一次方程解的不定性是教学中的一个难点．为了突破这个难点，可在学生初步明确二元一次方程的解的概念

之后，进一步阐明二元一次方程的解既有相关性又有不定性.二元一次方程的一个解是一对未知数的值，这两个未知数的值是互相联系互相制约的，不是任意一对数值都适合于这个方程，所以说二元一次方程的解有相关性. 对于二元一次方程的解的不定性，如课本中所讲，把方程 $x+y=7$ 变形，用含有 x 的代数式表示 y，得

$$y=7-x.$$

在这个方程里，如果 x 取一个值，就可以求出与它对应的 y 的一个值，可列表说明如下：

x	……	-1	0	2.7	5	……
y	……	8	7	4.3	2	……

表中每一对数就是方程的一个解，还可以让学生再多求出一些解，可设 x 为正的或负的整数、分数或小数，例如设 $x=1.6$、1.7，还可在 1.6 与 1.7 之间设 $x=1.61$、1.62、……，再在 1.61 与1.62 之间设 $x=1.611$、1.612、……等等，并分别求出与它们对应的 y 值，从而说明适合这种关系的解有无数个，所以说二元一次方程的解有不定性.

3. 关于实际问题的解与所列方程的解两者之间的区别，我们看下面三个例子：

(1) 两数的和是 7，这两数各是多少？

(2) 两根木材共长 7 米，这两根木材各长多少？

(3) 7个人参加一项挖土运土工程，挖土、运土各有几人？

这三个问题列出的二元一次方程都是 $x+y=7$. 对于方程 $x+y=7$，x、y 可以是任意实数（在目前，对学生来说，是

任意有理数)，适合这个方程的解有无数个．但把方程与实际问题联系起来，由于x、y所代表的实际意义不同，所以问题的解也不一样．在(1)中，x、y可以是（适合于方程的）任意数值，这样的解有无数个；在(2)中，x、y可以是大于零和小于7的数值，这样的解也有无数个；在(3)中，x、y只能是不小于零和不大于7的整数，这样的解只有8个．课本中指出：任何一个二元一次方程都有无数个解，是指对所列的方程来说的，不是指实际问题的解的情况．

4．求二元一次方程的解，可以先给出一个未知数的一个值，再通过解一元一次方程求出另一个未知数的值，这样求出的一对数值就是二元一次方程的一个解．为了计算方便，还可以把这个二元一次方程变形为用一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式（例如把$x+y=7$表示为$y=7-x$）然后给出x（或y）的一些值，求出对应的y（或x）的值．这种求二元一次方程的解的方法，应当使学生掌握，为以后学习二元一次方程组打下基础．

5．在学生初步理解二元一次方程解的不定性以后，可以复习一元一次方程的解及一元一次不等式解的集合．再说明二元一次方程的所有的解构成一个集合，叫做二元一次方程的解的集合；它的元素有无穷多个，可以用图表示如下：

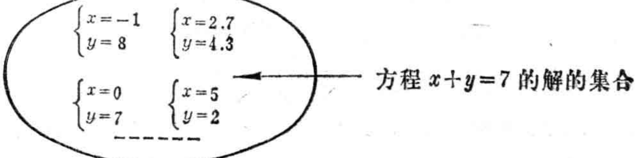


图 1

5.2　二元一次方程组

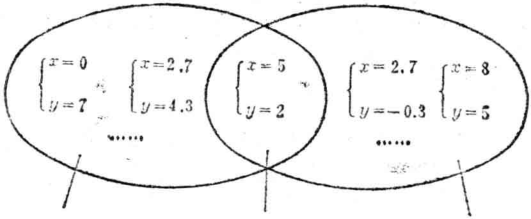
课本在5.1例题的条件（已知两个数的和是7）的基础上，又增加了一个条件，提出问题："甲乙两数的和是7，甲数比乙数大3，求甲乙两数"这样引入新课，使学生能比较自然地想到要设两个未知数，列出x，y的两个方程，从而引出二元一次方程组的概念.

学生理解方程组的解的概念也是一个难点，这是因为这里未知数和方程的个数都增多了，求出的解要同时满足两个方程，这些都是学生所不熟悉的．所以应当联系实际问题，重点讲解二元一次方程组的解的意义．指出两个方程

$$\begin{cases} x+y=7, & (1) \\ x-y=3 & (2) \end{cases}$$

中的两个未知数x、y分别代表相同的一个量（x在方程(1)中代表甲数，在方程(2)中也代表甲数；y在方程(1)中代表乙数，在方程(2)中也代表乙数）．因此，x与y在两个方程中应当分别有相同的值，也就是说，方程组的解就是方程组里各个方程的公共解．为了加深学生的认识，对于两个方程还可以多举出一些解，然后进行比较，找出既适合于方程(1)又适合于方程(2)的公共解，在此基础上运用集合思想，用图表示两个方程的解的集合，它们的公共部分就是方程组的解，这样便于使学生直观而且明显地认识方程组的解是两个方程的解的集合的公共部分，加深学生对方程组的解的理解．实际上，方程组的解就是两个方程的解的集合的交集，在这里，课本只提"方程(1)和方程(2)的公共解"，教学时应注意渗透交集的思想，为今后学习交集的概念作一些准备，但不必给学生提

出“交集”这个名词.



方程(2)的解的集合　方程(1)和方程(2)的公共解　方程(1)的解的集合

图　2

练习中的第3题说明方程组$\begin{cases}y=3x,\\y-2x=1\end{cases}$的解是方程$y=3x$和方程$y-2x=1$的公共解，并通过这类练习渗透对应思想. 如第一个圈中的“1”表示$x=1$，然后依$y=3x$这个关系，求出$y=3$，按箭头所指，把对应的值“3”写到另一个圈中“1”所对应的“?”处. 教学时可以安排类似的例题，有意识地渗透对应思想.

5.3　用代入法解二元一次方程组

1. 代入消元法是解二元一次方程组基本的方法之一，是本章教材的重点，必须使学生牢固掌握，熟练运用. 教学时要注意讲清代入消元法的基本思想. 可先复习一元一次方程的解法. 然后提出课本中的例，

$$\text{解方程组:}\begin{cases}y=2x, & (1)\\x+y=3. & (2)\end{cases}$$

向学生提出：方程组中(1)和(2)是互相联系着的两个方程，解这个方程组，就是要求这两个二元一次方程的公共解．由于两个方程里同一个未知数应取相同的值，因此第二个方程中的 y 可用第一个方程中表示 y 的代数式，$2x$ 来代替．然后采用课本中的表示方法，即

$$\begin{cases} y = \boxed{2x}, & (1) \\ x + y = 3. & (2) \end{cases}$$

把(1)代入(2)，得到

$$x + 2x = 3. \qquad (3)$$

这种写法比较直观，形象．这样，消去未知数 y，方程(2)变为方程(3)，就把解二元一次方程组的问题转化为解一元一次方程，于是可以用一元一次方程的解法求解．

2．学生开始学二元一次方程组的解法时，往往出现只求出一个未知数的值，就认为是方程组的解的错误，因此，这里应再一次强调，方程组的解是一对数值，求出 $x=1$，题目并没有作完，还要把 $x=1$ 代入(1)(或(2))求得对应的 y 值，$y=2$，并且写成$\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$的形式．

3．求得$\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$以后，应引导学生进行检验．其作用，一是使学生进一步明确代入消元法是求方程组的解的一种基本方法，通过代入消元的确可以求得方程组的解；二是进一步巩固方程组的解的概念，强调$\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$是方程(1)的解的集合与方

程(2)的解的集合的公共部分，所以它必须同时满足这两个方程；三是因为我们没有用方程组的同解定理而是用等量代换解方程组的，那么检验求出来的这一对数值是不是原方程组的解，在理论上是必要的．这里的例 1，写出了检验的步骤，并通过第 9 页练习的第 1、2 两题，让学生熟悉检验步骤，以后就可以用口算检验，不必写出．

4．讲完此例后，可以小结一下解二元一次方程组的关键在于消元，即把“二元”转化为“一元”，这里是通过等量代换“代入”的办法，消去一个未知数，得出一个一元一次方程，从而求得方程组的解．

5．课本例题的安排贯彻了由简到繁、由易到难、逐步加深的精神．在例 1 的两个方程中，方程(1)$y=1-x$ 是用 x 表示 y 的形式，所以直接用(1)代入(2)就可以达到消去一个未知数的目的．例 2 的方程中，有一个未知数的系数是 1．例 3 的方程中，没有一个未知数的系数是 1 或 -1．

当学生初步掌握了用代入法解二元一次方程组的方法以后，应进一步提高他们的解题技巧．如课本中的例 2，

$$\text{解方程组：}\begin{cases}2x+5y=-21, & (1)\\ x+3y=8, & (2)\end{cases}$$

可以看出，把方程组中第二个方程 $x+3y=8$ 变形为 $x=8-3y$，然后代入(1)，比把这个方程变形为 $y=\frac{8-x}{3}$，代入另一个方程简单．例 3 的方程(1)，x 的系数 2 最简单，所以把(1)变形为 $x=\frac{8+7y}{2}$ 较好．从而指出在解题时要力求使变形后的

方程比较简单和代入后化简比较容易.

教学时还要注意，方程组里的两个方程不能是相依的$\left(\text{如}\begin{cases}x+y=7,\\3x+3y=21\end{cases}\right)$，或矛盾的$\left(\text{如}\begin{cases}x+y=7,\\x+y=10\end{cases}\right)$，这样才能求出确定的解. 在消元时要强调，由两个方程中的任何一个得出关系式后，必须代入另一个方程，不可代回原方程. 如课本中的例 3，

$$\text{解方程组:}\begin{cases}2x-7y=8, & (1)\\3x-8y-10=0. & (2)\end{cases}$$

由(1)得

$$x=\frac{8+7y}{2}. \qquad (3)$$

如果把(3)代入(1)，则有

$$2\left(\frac{8+7y}{2}\right)-7y=8.$$

从而得 $$8=8.$$

这是因为方程(1)和(3)是相依方程，由方程(1)、(3)组成的方程组与由方程(1)、(2)组成的方程组不是同解方程组（见附录)，才出现了恒等式，求不出确定的解. 教学时，应紧紧扣住方程组的解的意义，说明把(3)代入(1)实际上没有用到方程(2)，所以不可能求得两个方程的公共解.

6. 通过例题的讲解，使学生掌握用代入法解二元一次方程组的步骤和方法. 在这个基础上，可总结出用代入法解二

元一次方程组的一般步骤：

1．把一个方程里的一个未知数，用含有另一个未知数的代数式表示出来；

2．把这个代数式代入另一个方程，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

3．解这个一元一次方程，求出一个未知数的值；

4．把求得的这个未知数的值代入第一步所得的代数式中，求出另一个未知数的值；

5．把这两个未知数的值写在一起，就是方程组的解．用$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$的形式表示．

5.4 用加减法解二元一次方程组

1．加减消元法也是消元法的一种，是解二元一次方程组基本的方法之一，因此，也要使学生牢固掌握，熟练运用．课本先以方程组$\begin{cases}x+y=5,\\2x-y=4\end{cases}$为例，介绍了加减消元法解方程组的基本思想和解题过程．教学时，可以先让学生用代入法来解这个方程组．然后，引导学生观察这个方程组的特点是两个方程中y的系数互为相反数，用课本中的方法在黑板上用虚线标出，这样更加醒目．根据“等式两边加上相等的数或代数式，等式不变，”如果将上面两个方程左右两边分别相加，就可以消去一个未知数y，得到一个一元一次方程：$3x=9$．这样，就可以求出一个未知数的值．再将这个未知数的值代入原方程组中任何一个方程，求出另一个未知数的值．经过检验（检

验时要代入原方程组的每一个方程，检验一般用口算，可不写出），从而得到方程组的解.

课本中例 1 的两个方程，未知数 x 的系数绝对值相等，符号相同，所以把(1)和(2)左右两边分别相减，就可以消去一个未知数. 例 2、例 3 是将方程组经过简单变形，使之具备两个方程里某一个未知数的系数的绝对值相等的特点，就可以用加减法来解. 其中例 2 的方程(2)的 v 的系数恰好是方程(1)的 v 的系数的 2 倍，方程(1)的 u 的系数恰好是方程(2)的 u 的系数的3倍；例 3 的两个方程的 x 的系数没有整倍数关系，y 的系数也没有整倍数关系. 讲解这两个例题时，重点应放在怎样把方程组里的方程通过简单变形，使一个未知数的系数的绝对值相等，从而利用加减法消去这个未知数。在这里应注意：①选未知数中系数最简单的（如课本中的例 2）；②使选出的未知数变形后的系数成为原系数的最小公倍数（如课本中的例3）. 此外，学生在变形时，往往出现只乘方程的某一边或某些项的错误，这一点应提醒学生注意.

在数学中经常采用 x、y 作为未知数，而在物理或其他科技书中，有时用 u、v、s、t 等为未知数，课本例 2 采用 u、v 为未知数，练习中也配有用 m、n，p、q，及 s、t 为未知数的题目，使学生能更广泛地使用字母表示未知数，为学习各种科学技术作好准备.

2. 通过课本中 4 个例题（引例、例 1、例 2、例 3）的讲解，要求学生基本弄清加减消元法的解题步骤和方法. 在这个基础上，可总结出用加减法解二元一次方程组的一般步骤：

1. 把一个方程或者两个方程的两边乘以适当的数，使两个方程里的一个未知数的系数的绝对值相等；

2. 把所得的两个方程的两边分别相加或者相减，消去这个未知数，得出另一个未知数的一个一元一次方程；

3. 解这个方程，求得一个未知数的值；

4. 用这个未知数的值代入方程组的任何一个方程，求出另一个未知数的值；

5. 把所求得的两个未知数的值写在一起，就是方程组的解，用$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$表示.

3. 在解应用题时往往列出的方程组不是标准形式，一般需要先将两个方程变形为标准形式：$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$然后再解方程组. 如课本中的例4：

解方程组：$\begin{cases}2(x-150)=5(3y+50), & (1)\\10\%\cdot x+6\%\cdot y=8.5\%\times 800, & (2)\end{cases}$

需要把方程(1)、(2)分别化简，得

$$\begin{cases}2x-15y=550, & (3)\\5x+3y=3400, & (4)\end{cases}$$

再解这个方程组. 培养学生养成先化简的习惯，以使运算简化.

4. 讲完代入法和加减法以后，应引导学生自己作小结. 比较这两种方法，可以发现，虽然方法不一样，但是它们的实质都是消元，通过消去一个未知数，使“二元”转化为“一元”.

$$\boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow[\text{转化}]{\text{消元}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

在解方程组时，究竟采用哪种方法比较简单，要对具体问题作具体分析．当方程组中一个方程的某一个未知数的系数是 1 时或某一个方程的常数项是零时用代入法比较简便；在两个方程的同一未知数的系数的绝对值相等或成整数倍时，用加减法较为简便．

课本习题一的第 6 题的各小题希望学生灵活应用代入法或者加减法来解．

5.5　三元一次方程组的解法举例

1．三元一次方程组的解法与二元一次方程组的解法基本思路是相同的，这里只举例说明如何用代入法、加减法来解．教学时，可先复习解二元一次方程组的基本思路(如 5·4 的 4.)，再研究课本上的例 1：

$$\text{解方程组：}\begin{cases}3x+2y+z=13, & (1)\\ x+y+2z=7, & (2)\\ 2x+3y-z=12. & (3)\end{cases}$$

引导学生考虑如何利用已有知识逐步消元、转化．通过分析，得出解三元一次方程组的一般步骤：

(1) 利用消元法，消去方程组中的一个未知数，转化为一个二元一次方程组；

(2) 解这个二元一次方程组，求得两个未知数的值；

(3) 求出消去的那个未知数的值．

即：