高級中學課本

代　數

第一冊

高級中學課本 代　數 第一冊

編譯者：	前東北人民政府教育部
校訂者 原出版者：	人民教育出版社
	（營業許可證出字第二號）
出版者：	中南人民出版社
發行者：	新華書店
印刷者：	（見正文最後頁）

書號：2072
字數··180,500
64,101–86,300
定價4,700元

1950年1月東北人民出版社原版
1951年2月第二次修訂原版
1954年7月漢口第三次印刷

出版者的話

初、高級中學代數和高級中學三角的課本，舊的有許多缺點，新的又沒有編好，經中央人民政府教育部指定暫以前東北人民政府教育部根據蘇聯中學教科書編譯的課本，供一九五三年秋季開始學習這三科的班次採用.

蘇聯教科書的優點是內容精簡，理論與實際結合，教材的排列能兼顧科學的系統和教學的原則. 東北各地試用這一套編譯的課本以後，凡能體會這些優點的教師，教學上都有很好的成績（參看教育資料叢刊社編：‘中學數學教學的改進’）. 用慣了舊課本的教師倘能虛心體會新課本的優點，學習新的教學方法，當然可以得到同樣的成績.

這套編譯的課本也還有某些缺點，如‘編譯者聲明’中所說的理論與實際結合不如原書，就是最顯著的. 原書是給蘇聯學生讀的，必然要結合蘇聯社會主義社會的實際，這就和我國當前的情況有若干距離. 因此，怎樣根據這套課本的理論體系，遵照國家在過渡時期總路線的精神來結合我國的實際，是教師們應該在教育實踐中仔細研究的問題. 希望大家積累經驗，爲編好一套我國的數學科新課本作準備.

我社這次供應的東北編譯並經我社稍加修訂的這幾種課本，一九五三年曾請吳品三、惠仰淑、程廷熙、傅種孫諸先生根據原書校譯過高中三角，請蔣鐸、薛宗慈，魏庚人諸先生校譯過初中代數，請蔣鐸、郝鈵新、嚴士健、魏庚人諸先生校譯過高中代數；高初中代數後面所附習題係請楊邁、蔣鐸二位先生根據蘇聯 M. A. 拉尼切夫：代數習題彙編 I、II 兩卷譯出，並曾請趙慈庚、傅種孫二位先生校譯過高中代數所附習題，請趙慈庚先生校譯過初中代數所附習題. 一九五四年秋季供應的，除了三角是全册外，初中代數有上下册，高中代數有第一、二册，各供一學年用，請教師們注意.

這套編譯的課本，每種都附有習題一册. 爲了發行的便利，把習題附釘在課本的後面，不再另釘成册.

人民教育出版社　一九五四年二月

編譯者聲明

這一套中學自然科學教科書，包括算術、代數、平面幾何、物理、化學、動物、植物、人體解剖生理學等，是根據蘇聯十年制中學的教科書翻譯的．為了適合我國的情況，在校閱時作了必要的修改，所以說是編譯．

這套教科書的初中用部分於一九四九年下半年匆匆編譯，一九五〇年起在東北各地中學試用．由於時間和人力的不足，發生了不少錯誤與不妥之處．一九五〇年下半年，我們一面修改了初中用書，一面又編譯出版了高中用的一部分．時間和人力仍然很受限制，在校閱時仍然感到很多地方不能趕上原書的精彩，特別是在理論與實際結合一方面．

我們希望，各地教師同志和別的同志們，指正我們的錯誤，提供我們進一步修改的要點，幫助我們來把這套教科書修訂得更好．

東北人民政府教育部

一九五〇年十二月

本書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學8——10年級代數教科書編譯的．原書為蘇聯吉西略夫（А. П. КИСЕЛЁВ）所著，1949年，莫斯科出版．

高級中學課本代數第一冊目錄

習 題 目 錄

第一章　乘方與方根的恆等變換

I　乘方

1. 乘方的運算　在初中代數裏我們已學過，乘方是將一數（底數）自乘多少次（表次數的叫指數）的算法．如 $2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$；$(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=(-3)^4=81$；

$$a\cdot a\cdot a=a^3.$$

一般的，
$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\text{ 個}}=a^n.$$

2. 負數的乘方　許多負數相乘，如其個數爲偶數時，則乘積爲正數；如其個數爲奇數時，則乘積爲負數．這個性質用於相等的負數的乘積，亦卽用於負數的乘方時可得下列法則：

負數的偶次方爲正，奇次方爲負．

例如：$(-2)^2=4$；　　$(-2)^6=64$；

$(-5)^4=625$；　　$(-2)^5=-32$；

$(-2)^7=-128$；　　$(-5)^5=-3125$，等等．

3. 單項式的乘方　我們在初中代數裏已得出將一單項式平方與立方的法則，對於單項式的任何次乘方，亦可產生同樣的法則．

1）求乘積 abc 的 n 次乘方．由已知的乘法性質，得

$$\begin{aligned}(abc)^n&=\underbrace{(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)\cdots(abc)}_{n\text{ 個}}\\&=abc\cdot abc\cdots abc\\&=\underbrace{(aa\cdots a)}_{n\text{ 個}}\cdot\underbrace{(bb\cdots b)}_{n\text{ 個}}\cdot\underbrace{(cc\cdots c)}_{n\text{ 個}}\\&=a^nb^nc^n.\end{aligned}$$

欲計算乘積的乘方,應先計算每個乘數的同次乘方,然後連乘之.

2) 用同法可以求分式 $\frac{a}{b}$ 的乘方

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n\text{個}}=\frac{a\cdot a\cdots a}{b\cdot b\cdots b}=\frac{a^n}{b^n}.$$

欲計算分式的乘方,應先分別計算分子與分母的同次乘方,然後以後者除前者.

3) 如求 a^m 的 n 次乘方則得

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\cdots a^m}_{n\text{個}}$$

$$=a^{m+m+m+\cdots+m}$$

$$=a^{mn}.$$

欲計算某一方冪數的任何次乘方,則須將原指數乘以乘方次數.

4) 現在我們任取一單項式,如 $2a^2b^3$, 並計算其任意的 n 次乘方、由上述法則可得

$$(2a^2b^3)^n=2^na^{2n}b^{3n}.$$

欲計算任一單項式的乘方,須先計算其係數的乘方,而其各文字的指數則與乘方次數相乘.

練　習

求下列乘方:

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0.1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^3b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(-\frac{0.2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II　多項式的平方

4. 公式的推演　把三項式 $a+b+c$ 看做二項式 $(a+b)+c$, 再應用公

式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 可求其平方:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2.$$

卽加第三項 c 於二項式 $a+b$ 時,則其平方應於前兩項和的平方之外,再加上兩個新項: 1) 前兩項的和與第三項相乘積的二倍及 2) 第三項的平方.

現在不難計算四項式 $a+b+c+d$ 的平方,把 $a+b+c$ 看作一項,則得

$$[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

以上邊求得的式子代$(a+b+c)^2$,可得

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

由上述二例可知. 當加一新項於一多項式而平方時,則所得之値,除原多項式的平方外,必須增加兩個新項: 1) 原多項式與新項乘積的二倍. 2) 新項的平方. 顯然加新項於二項式而計算其平方的方法,可以推廣到計算多項式的平方上去. 這就是說:

多項式的平方等於:第一項的平方加上第一項與第二項乘積的二倍,加上第二項的平方,加上前兩項的和與第三項乘積的二倍,加上第三項的平方,加上前三項的和與第四項乘積的二倍,加上第四項的平方,等等.

當然,多項式中也可能有負項.

如把最後等式各邊的括號脫去並加整理,得:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

由此歸納成法則:

多項式的平方等於其各項平方之和加上每兩項乘積的二倍.

5. 展開式的符號 由前節的最後得式可以推出,各平方項皆爲正號,而每兩項乘積二倍的符號,則視該兩項的符號而定,同號時爲正,異號時爲負. 例如:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+2(3x^2)(-2x)+(-2x)^2$$
$$+2(3x^2-2x)\cdot 1+1^2$$
$$=9x^4-12x^3+4x^2+6x^2-4x+1$$
$$=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

練　習

4. $\left(2a^2-\frac{1}{2}a+1\right)^2$.　　5. $\left(\frac{1}{2}x^2-4x-3\right)^2$.

6. $(-5a^3x+3a^2x^2-ax^3+3x^4)^2$.　　7. $(0.3x^3-0.1x^2-\frac{3}{4}x+0.5)^2$.

將下列二題展開,證其相等:由此可知當多項式各項反號時其平方相等.

8. $(a-b+c)^2=(-a+b-c)^2$.

9. $(2x^3-x^2-3x+1)^2=(-2x^3+x^2+3x-1)^2$.

10. 從已知等式$(a-b)^2=(m-n)^2$,可否推出等式 $a-b=m-n$?

III　關於無理數的概念

6. 有公度與無公度的線段　如幾何學中所述,若二線段各含有第三線段的整數倍而沒有剩餘時,則第三線段叫做前二線段的公度. 同時在幾何學中指出過,沒有公度的二線段是存在的(如正方形的一邊與其對角線).

二線段叫做有公度或無公度,就看它們之間是否有公共的量度存在.

7. 關於度量的概念　假設要用線段 CD 爲單位,去量線段 AB (圖 1) 的長度,就需要知道線段 AB 內含有幾個 CD. 若線段 AB 內含有三個 CD 並剩餘 EB(小於 CD),於是 3 就是精確到 1 的量得的不足近似結果. 因爲 AB 比 $3CD$ 多,但比 $4CD$ 少 (4 也可以取作精確到 1 的量得的過剩近似結果). 若想得到比較準確的結果, 還需知道線段 EB 內含有多少個單位 CD 的

圖 1

$\frac{1}{10}$. 設 EB 內含有的個數比 8 多,但比 9 少,於是 3.8 和 3.9 便成了量 AB 所得的近似結果,而精確度是 $\frac{1}{10}$; 前者是不足的,後者是過剩的. 如欲得到更準確的結果,就需要知道第二次剩餘線段內含有多少個 CD 的 $\frac{1}{100}$. 設含有的個數比 5 多但比 6 少,於是 3.85 和 3.86 就成了量 AB 所得的近似結果. 而精確度是 $\frac{1}{100}$. 繼續這樣量下去,可能得出兩種情形:

第一,依次測量精確到 0.1、0.01、0.001、…,最後量盡,而無剩餘;

第二,測量無論精確到 0.1、0.01、0.001、…,永遠有剩餘.

在第一種情形下,量的結果得有限十進小數;在第二種情形下,量的結果則得無限十進小數.

當單位線段的 $\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$、…之一中的任何一個,是被量線段與單位線段的公度時,則得有限小數.

若被量線段與單位線段雖有公度,但單位線段的 $\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$、…,都不是被量線段與單位線段的公度時,則得無限循環小數*. 最後,若被量線段與單位線段無公度時,則得無限不循環小數.

8. 無理數與其近似值 整數和分數都叫做有理數. 凡有理數可以寫成有限小數或無限循環小數的形式. 無限不循環小數叫做無理數. 有理數是與單位有公度的,無理數則是與單位無公度的 †.

---

* 實際,在有公度時,量得的正確結果經常是普通分數的形式,將此普通分數化爲小數,則可將量得的正確結果表爲小數的形式. 但化普通分數爲小數,有時得到無限小數,此小數必須是循環小數 在無公度時,得到的無限小數不可能是循環小數,因爲若是循環小數,則可化爲普通分數而此分數卻表示量得的正確結果. 這種結果不可能是無公度的情形,也就是說這時得到的無限小數不是循環小數.

† 凡有理數都可以表爲兩個整數的比. 無理數則不可能.

我們按一定的法則能寫到一個無理數的任意位數時，這個無理數叫做已知的.

將表示某已知數的無限小數（有理數或無理數）某位後的數字捨去，則得這個數的不足近似值．精確到 0.1、0.01、0.001…．在不足近似值的末位數加上 1，則得此一數的過剩近似值．其精確度與上面的相同.

〔例題 1〕 把分數$\frac{1}{3}$寫成無限循環小數 0.33333…，捨去小數點後第五位及其以下所有數字，則得$\frac{1}{3}$的不足近似值 0.3333，精確到 0.0001.

0.3334 是$\frac{1}{3}$精確到 0.0001 的過剩近似值.

〔例題 2〕 無理數 π，是圓周長與直徑之比值，可以寫成無限小數，前 25 位是 3.141592653589793238462643．3.14159 是它的不足近似值，3.14160 是它的過剩近似值，都精確到 0.00001.

〔例題 3〕 取一無限不循環小數 123.101001000100001000001 …（在兩個 1 中間有一個零、兩個零、三個零等等）．這個無理數，其精確到 0.000000000001$\left(\text{即}\ \frac{1}{10^{12}}\right)$的近似值是：123.101001000100（不足）；123.101001000101（過剩）.

9. 無理數的相等與不相等　實數　兩個無理數，若在表示它們的小數之間所對應的數字都相同時，則相等 *．比較兩個正無理數，可先把它們化爲小數，整數部分大的就大，若整數部分相同，則小數點後第一位大的就大，若整數及小數點後第一位相同，就要拿小數點後第二位數來決定，其餘類推．例如，2.745037…大於 2.745029…，它們整數部分及小數點後的前四位數字相同，但第五位數字不同，3 大於 2，所以第一個數大於第二個數.

假如有理數也化爲小數時，這個定義可以適用於無理數與有理數的比較上．又此定義也可用於兩個化爲小數的有理數的互相比較上．在比

較當中，假如遇到循環節爲 9 的循環小數時，則可用右面都是零的小數代替．例如，2.39999…可用 2.400000…代替．

由上所引用的不等式，我們看出：

若 α 是一任意無理數，a, b 分別是 α 的任一不足和過剩近似值，則

$$a<\alpha<b.$$

無理數可能爲正或負，都依所量的量的意義來決定．在兩個負實數中，其絕對值†小的，便是大數，這與有理數情形一樣；

所有負數都比零小，而零小於任何正數．

有理數與無理數都叫做實數．

10. 無理數運算的定義 設 α 與 β 爲任意兩個已知的正無理數(下面例中 $\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=\sqrt{2}$)，其不足近似值已經分別求得如下：

精確度	0.1	0.01	0.001	0.0001
α 的不足近似值	1.7	1.73	1.732	1.7320
β 的不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142

在不足近似值的末位上加 1 卽得其對應的過剩近似值．

於是：1) α 和 β 相加就是找一個數使它

大於以下每個和：		小於以下每個和：	
$1.7+1.4$	$=3.1$	$1.8+1.5$	$=3.3$
$1.73+1.41$	$=3.14$	$1.74+1.42$	$=3.16$
$1.732+1.414$	$=3.146$	$1.733+1.415$	$=3.148$
$1.7320+1.4142$	$=3.1462$，等等	$1.7321+1.4143$	$=3.1464$，卽：

α 和 β 相加，就是找一個數 γ 使其大於任意二不足近似值的和，而小於任意二過剩近似值的和．

---

* 兩個相等的有理數，若其中之一是循環節爲 9 的循環小數時，則可用數字不同的兩個數表示之．如 0.999…=1 或 2.3999…=2.4．

† 無理數的絕對值與有理數的絕對值可以同樣定義．

對於任意兩個無理數 α 與 β 的這樣的一個數 γ 是存在的而且只有一個. 這一事實我們採用但不加以證明.

2) 取上表中的 α 與 β 的近似値,則其積 $\alpha\cdot\beta$ 是這樣的一個數. 它

大於以下每個積:		小於以下每個積:	
1.7×1.4	$=2.38$	1.8×1.5	$=2.70$
1.73×1.41	$=2.4393$	1.74×1.42	$=2.4708$
1.732×1.414	$=2.449048$	1.733×1.415	$=2.452195$
1.7320×1.4142		1.7321×1.4143	
	$=2.44939440$, 等等		$=2.44970903$, 卽:

二正無理數 α 和 β 相乘,就是找這樣的一個數使其大於二任意不足近似値的積,而小於二任意過剩近似値的積.

很顯然,這樣的乘積是存在的,且僅有一個. 這一事實我們可以採用而不加以證明.

3) 求無理數 α 的二次方、三次方、四次方、…,是求由二個、三個、四個、…α 相乘而得的積.

4) 無理數逆運算,可如有理數的逆運算同樣定義,例如由 $\alpha-\beta$ 意就是求一數 x 使 $\beta+x=\alpha$ 等等.

若 α 與 β 之一是有理數,並可化爲有限小數,則取其精確値以代替近似値.

無理數乘零,和有理數一樣,其積也爲零.

負無理數的運算法則可由負有理數的運算法則導出.

經過充分的討論後,我們可以說無理數的運算和有理數的運算具有同樣的性質. 例如,加法與乘法具有交換和結合的性質;此外乘法與除法還具有分配的性質.

有理數在不等式中的性質,在無理數中仍然保持 例如 若 $\alpha>\beta$, 則 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$; $\alpha\gamma>\beta\gamma$ (當 $\gamma>0$ 時) 和 $\alpha\gamma<\beta\gamma$ (當 $\gamma<0$ 時), 等等.

11. 方根的求法 **定義** a的n次方根是這樣的數,它的n次乘方得a. a 的 n 次方根以$\sqrt[n]{a}$ 表之. 由定義得 $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

可以用這個等式,來檢驗所求得的方根是否正確. 例如,我們求出 $\sqrt[11]{2048}=2$,若想檢驗,可求 2 的 11 次方,得 $2^{11}=2048$. 故知所得的方根是對的. 同樣$\sqrt[4]{39.0625}=2.5$ 也是對的,因爲 $2.5^4=39.0625$.

12. 任意次的近似方根 在初中代數 §115～117 中,關於求平方根近似值且精確到 1、$\frac{1}{10}$、等等的方法,已經講過,在那裏所講的方法也能應用到求其他各次方根上. 例如精確到 $\frac{1}{100}$ 的$\sqrt[3]{2}$的不足近似根,是這樣的一個數,它包含個位及小數點後第一位與第二位,它的立方小於 2,但給它加上 0.01 時,它的立方便大於 2. 這裏不預備介紹,關於求三次或三次以上近似根或精確根的法則,我們只用下面簡單的例子來說明求近似根的方法.

設求 2 的三次方根$\sqrt[3]{2}$. 其近似値在個位上的爲 1 (不足) 或 2 (過剩). 若繼續求到小數後第一位,則其數必在下列數目之中: 1;1.1;1.2;1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9. 這一系列數,可分爲兩部分: 其立方小於 2 的爲一部分,必居左方; 其立方大於 2 的是另一部分,必居右方. 現在取正中的數 1.5,其立方爲 $1.5^3=3.375$,大於 2. 凡在 1.5 右側的數,其立方數必逐次增大,所以我們捨去 1.5 及其右側所有的數,而取以下各數: 1; 1.1; 1.2; 1.3; 1.4.

從這些數裏再取正中的數 1.2,立方之後,得 1.728,小於 2. 現在僅剩 1.3 和 1.4. 1.3 的立方爲 2.197,大於 2. 於是我們得二數: 1.2 和 1.3,此二數之差爲 0.1,2 位於此兩數立方之間,它們是 2 的立方根的近似値,一是不足,一是過剩,都精確到$\frac{1}{10}$.

如果要求到小數點後二位時,可研究下列各數: 1.21; 1.22; 1.23;……1.29. 在這裏取正中的數 1.25,其立方爲 $1.25^3=1.953125$,小於 2.