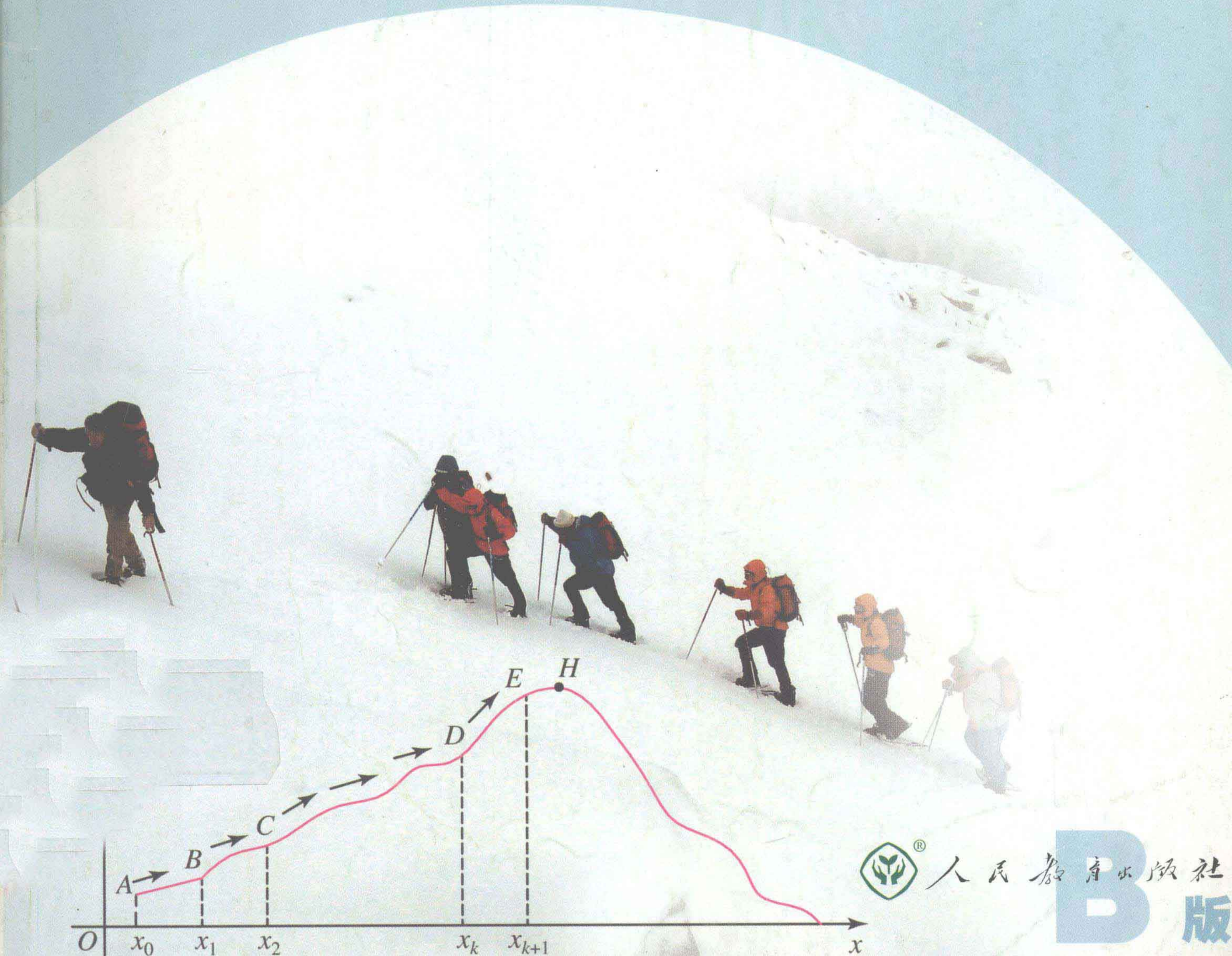
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2－2

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

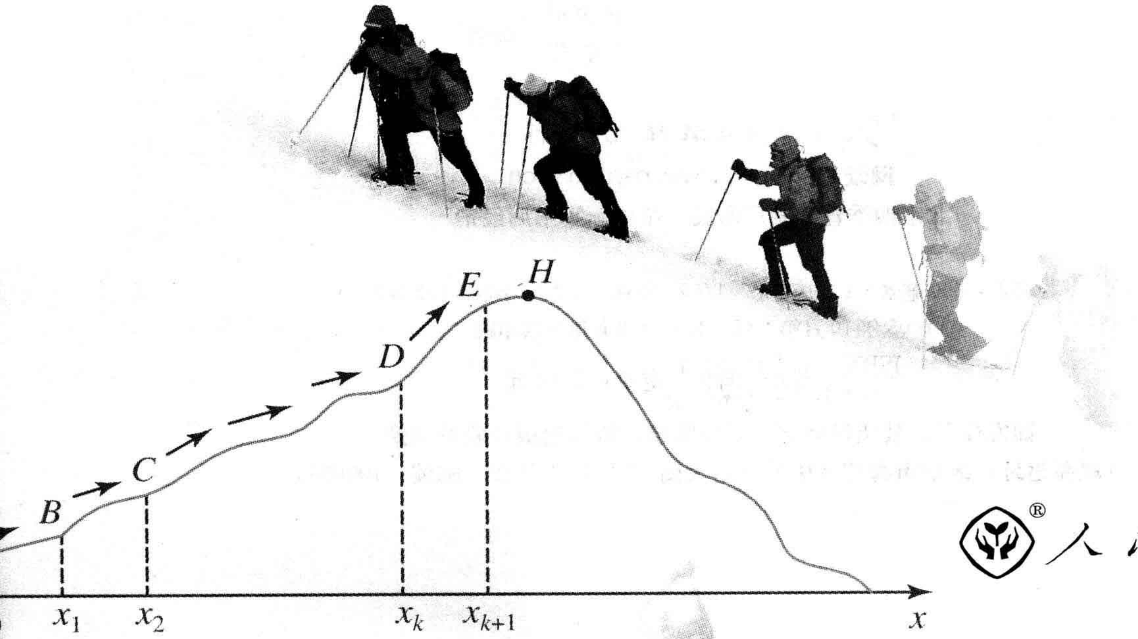
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明　韩际清

本册主编　　罗声雄　杨长智
审　　定　　李建才
编　　者　　房新宝　胡立玉　陈同福　王安拓　刘　莉
　　　　　　韩际清　祝广文　张成钢　孙光泽　高明岩
责任编辑　　刘长明
版式设计　　王　喆
封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书
数学　选修 2-2（B 版）
教师教学用书
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
编著
*
人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：5.25　字数：123 000
2005 年 10 月第 1 版　2006 年 3 月第 2 次印刷
ISBN 7-107-19137-3
G・12227（课）　定价：5.40 元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

说　　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书·数学选修2-2（B版）》的使用编写的教师教学用书. 本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写.

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“课程标准”中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务.

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价.

教材的课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求. 考虑到教学内容要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整. 教材编写时，把练习、习题分为A、B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求. 以满足条件较好学校的教学需要.

在教材分析中，首先分析内容结构、作用和地位，指出本节知识的重点和难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议.

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考.

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用做课堂测试，以检查学生学习本章内容的效果.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修2-2中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材.

一、导数及其应用

这一章编写时的主要想法是，充分借助于直观研究导数的性质和应用. 全章自始至终通过设置的“爬山情景”，让学生体会“以直代曲”及“化曲为直”重要的微积分思想. 导数可近似的看成“差商”和“微小直角三角形中两直角边的比”. 尽量让学生了解导数的直观内含. 同文科必选的这一内容相比，理科内容加强了求导运算及导数在研究函数中的应用.

二、推理与证明

推理与证明设一章，在我国高中教材中还是首次. 没有实际的教学经验供参考. 但推理与证明已是学生熟悉的词语，因此，在编写时主要通过实例引起学生对“推理”的兴趣，并引导学生理解各种推理的作用. 能够运用合情推理去探索、猜测和归纳出一些数学结论，并能证明结论的正确性. 在编写中，

重点是通过分析一些定理的证明过程，总结并让学生掌握数学证明的一些基本方法.

三、数系的扩充与复数

这一章，由于教学时间只有4课时，编写时，主要是通过方程的求根，让学生了解引进复数的意义和作用，了解数学中的内部矛盾如何推动数系的扩充，了解数学中理性思维的重要性.

在教学中一定要贯彻“温故而知新”的原则.基础不好难以继续学习，这是数学学习的重要特点，在教材编写中，主要知识点都采取循环方式编写，以达到牢固掌握所学的数学知识的目的.

数形结合是本套教材的重要特色.华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞.数缺形时少直观，形少数时难入微.形数结合百般好，隔裂分家万事非.切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离!”

这段分析精辟地阐述了数形之间的密切关系和相互作用.教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

本册教师教学用书，得到山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室、山东省实验中学和山东师大附中等单位的大力协助，在此深表谢意.

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
2005年10月

目录

第三章 数系的扩充与复数

第一章 导数及其应用

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数.

2. 理解导数的概念及符号记法，体会导数的思想及其内涵.

3. 通过函数图象，直观地理解导数的几何意义，并能应用其解决简单的单调问题和极值问题.

4. 能根据导数定义求函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数. 能利用公式求简单函数的导数及简单复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

5. 利用导数的知识解决一些最优化问题.

6. 通过实例，从问题情景中了解定积分的实际背景，借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念，直观了解微积分基本定理的含义.

（二）过程与方法目标

1. 通过实例，体会化曲为直的极限思想.

2. 利用导数定义推导简单函数的导数公式，类推一般多项式函数的导数公式，体会由特殊到一般的思想.

3. 利用导数，解决实际问题，体会建模思想.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过具体实例，认识导数的工具性及其与实际问题的联系，感受和体会导数在解决实际问题中

的作用，培养学习兴趣.

2. 感受导数在解题中的作用，自觉形成将数学理论与实际问题相结合的思想.

3. 在解题过程中，逐步养成扎实严格，实事求是的科学态度.

二、教材分析

（一）内容结构

1. 内容编排

本章内容分为两部分：一是导数的概念、运算及其应用；二是定积分的概念和微积分基本定理.

本章先让学生通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念及其几何意义，然后通过定义求几个简单函数的导数，从而得出导数公式及四则运算法则，最后利用导数的知识解决实际问题. 本章的第二部分，通过实例了解定积分的实际背景，了解定积分概念和微积分基本定理的含义.

2. 地位和作用

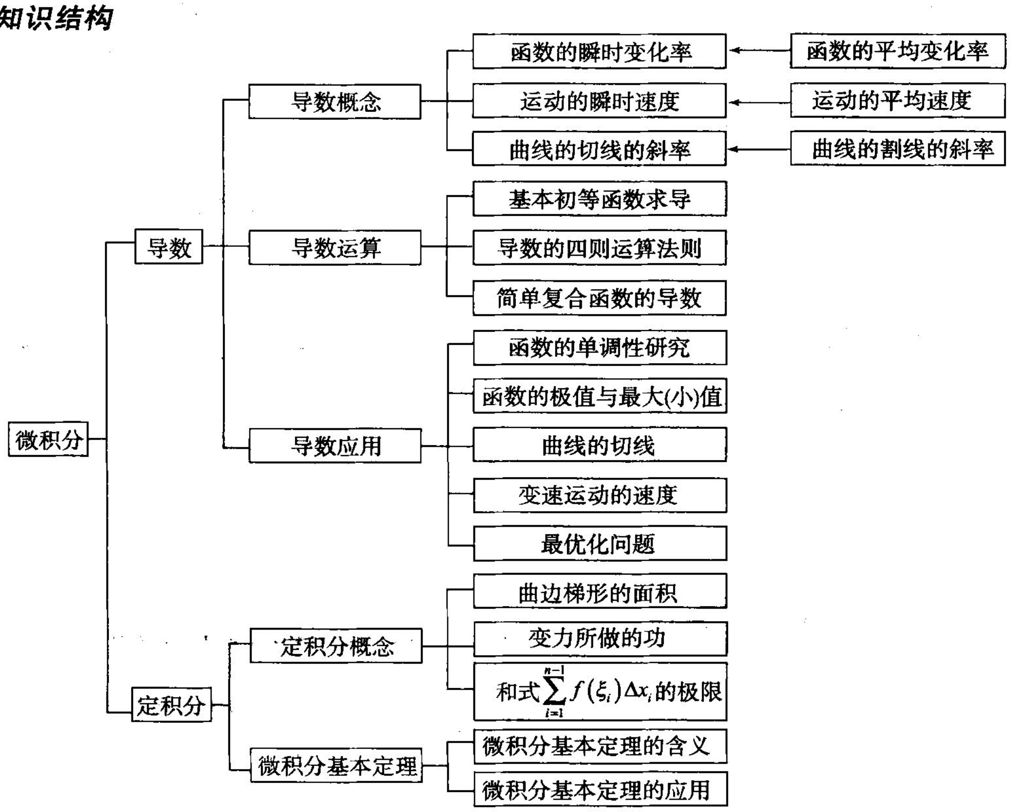
微积分的创立是数学发展中的里程碑. 它的发展和广泛应用，开创了近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，具有丰富的实际背景和广泛的应用.

3. 重点和难点

本章的重点是导数的运算和利用导数解决实际问题.

本章的难点是导数概念和定积分概念的理解.

4. 本章知识结构



（二）课时分配

本章教学时间约需 24 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 导数	
1.1.1 函数的平均变化率	2 课时
1.1.2 瞬时变化率与导数	2 课时
1.1.3 导数的几何意义	2 课时
1.2 导数的运算	
1.2.1 常数函数与幂函数的导数	2 课时
1.2.2 导数公式表及数学软件的应用	1 课时
1.2.3 导数的四则运算法则	2 课时
1.3 导数的应用	
1.3.1 利用导数判断函数的单调性	2 课时
1.3.2 利用导数研究函数的极值	2 课时
1.3.3 导数的实际应用	3 课时
1.4 定积分与微积分基本定理	
1.4.1 曲边梯形面积与定积分	2 课时
1.4.2 微积分基本定理	2 课时
本章小结	2 课时

（三）教法与学法建议

1.1 导 数

1.1.1 函数的平均变化率

1. 本节重点是函数在某一点的平均变化率.

2. 教材从人们的普遍感受——爬山过程中，山坡平缓，则步履轻盈；山坡陡峭，则气喘吁吁——出发，引入函数的平均变化率，一方面便于学生理解接受，另一方面也体现了数学与生活之间的联系.

3. 在定义引入过程中，涉及到了必修课程中学习的向量、倾斜角和斜率的概念，可在教学中适当复习.

4. 在函数的平均变化率的教学中，注意以下几点：

(1) 函数 $f(x)$在 x_0 处有定义；

(2) x_1 是 x_0 附近的任意一点，即 $\Delta x=x_1-x_0\neq 0$，但可正可负；

（3）改变量的对应：若 $\Delta x=x_1-x_0$，则 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$，而不是 $\Delta y=f(x_0)-f(x_1)$；

（4）平均变化率可正可负也可为零.

5. 在理解函数的平均变化率定义的基础上，可由学生独立完成例 1，教师指导分析：（1）Δx 与 x_0 对平均变化率的影响，（2）平均变化率的绝对值越大，曲线"越陡"——递增或递减的幅度越大. 例 2 可由教师引导学生完成. 另外可以适当补充练习，如：求函数 $f(x)=\sqrt{x}$在 $x=x_0(x_0>0)$附近的平均变化率.

1.1.2 瞬时变化率与导数

1. 本节的重点是瞬时变化率、导数的概念，难点是对导数的理解及利用导数解决实际问题.

2. 复习函数的平均变化率，明确物体做变速运动时，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的过程中，物体运动的平均速度实质就是函数 $s=f(t)$在 $t=t_0$ 处的平均变化率.

3. 教材通过具体实例和给定时间变化量 Δt 的具体值分析了瞬时速度（或瞬时变化率）与平均速度（或平均变化率）的关系：瞬时速度是当 Δt 趋近于 0 时，平均速度所趋近的常数值. 这一分析过程所体现的无限逼近思想，又称极限思想.

4. 函数 $f(x)$在 x_0 处的瞬时变化率，通常称作函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 即

"$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$"或"$\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)$".

5. 讲解导数概念时，需要讲清以下两点：

（1）"$\Delta x\to 0$"的意义：Δx 与 0 的距离要多近有多近，即 $|\Delta x-0|$ 可以小于给定的任意小的正数，但始终 $\Delta x\neq 0$；

（2）当 $\Delta x\to 0$ 时，存在一个常数与$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限地接近.

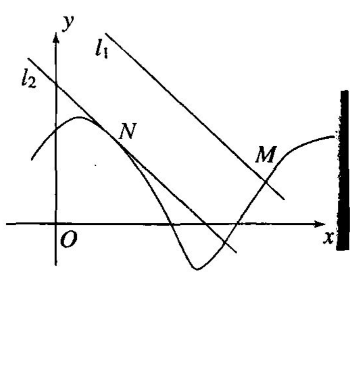
6. $f(x)$在开区间 (a,b) 内每一点 x 都是可导的，具体是指：任给 $x_0\in(a,b)$，总有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$. 从而对开区间 (a,b) 内的每一个值 x_0，都有惟一的函数值 $f'(x_0)$ 与 x_0 对应，所以在开区间 (a,b) 内，$f'(x)$ 构成一个新函数，此新函数称为导函数，通常简称导数，记作 $f'(x)$ 或 y'_x. 注意将其与 $f(x)$ 在某点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 区分开来.

7. 教材的两个例题，教师要帮助学生分析题意. 对于例 1，学生一般直接用物理知识解答，为应用新知识，可引导学生用导数求解.

1.1.3 导数的几何意义

1. 本节的重点和难点是导数的几何意义：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率等于函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

2. 在初中学习过圆的切线：直线和圆有惟一公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫圆的切线，惟一的公共点叫做切点.



圆是一种特殊的曲线. 能否将圆的切线推广为一般曲线的切线：直线与曲线有惟一公共点时，这条直线叫做曲线过该点的切线. 显然这种推广是不妥当的.

如图所示的曲线，直线 l_1 虽然与曲线有惟一公共点 M，但不能说直线

l_1 与曲线相切；而直线 l_2 尽管与曲线有不止一个公共点，我们还是说直线 l_2 是这条曲线在点 N 处的切线．因此，对于一般曲线，必须重新寻求曲线切线的定义．

3．曲线 $y=f(x)$ 的割线 AB 的斜率是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的平均变化率，当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的最终位置为直线 AD 即曲线过点 A 的切线．即用割线的极限位置上的直线来定义切线（有条件的学校，可借助多媒体动态演示上述变化）．

4．在理解导数的几何意义的基础上，会求简单曲线在某点的切线斜率及切线方程．

1.2　导数的运算

1.2.1　常数函数与幂函数的导数

1．本节重点是常数函数、幂函数的导数及其应用，难点是由常见幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$ 的求导公式发现规律，从而得到幂函数的求导公式．

2．函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数可由学生依据定义独立推导，函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数可由教师指导推出．

3．由几个常见幂函数的导数能否发现幂函数的求导公式，可先让学生思考交流，针对学生实际，教师再做一定的启发引导．知识所限，不要求证明．

1.2.2　导数公式表及数学软件的应用

会使用导数公式表，会应用数学软件求函数的导数．

1.2.3　导数的四则运算法则

1．本节重点是导数的四则运算的应用，难点是导数的四则运算法则的推导及形如 $f(ax+b)$ 的复合的求导．

2．教材根据定义给出了两函数和的导数的推导过程，其中用到了极限的四则运算，不必向学生介两函数差的导数的推导可要求学生作为练习完成．

3．（1）关于函数积的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=f(x)g(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]\\&=f(x+\Delta x)\Delta g+g(x)\Delta f.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

因为 $f(x)$ 在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)\to f(x)$．

因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$

即 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

由函数积的导数公式得到$[Cf(x)]'=Cf'(x)$，表明在求导时可以把函数的常数因子直接提出来.

(2) 关于函数商的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\&=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

因为 $g(x)$在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$g(x+\Delta x)\to g(x)$.

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

即 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

要求学生牢记四则运算法则，特别是积、商的导数公式不要弄错.

4. 例 1、例 2 是运算法则的直接运用，例 3 中 $y=\sin 2x$ 是一复合函数，暂不能直接求解，可运用倍角公式化为积的导数求解，例 4 中 $y=\tan x$ 虽是基本初等函数，但公式表中未给出，可将其用正弦函数和余弦函数表示，化为商的导数求解.

5. 例 5 是复合函数求导问题，题目比较抽象. 建议教学时，首先通过实例讲解，让学生对求导法则有一个直观地了解，然后讲解例 5. 至于对求导法则的证明，不做要求. 对复合函数求导问题需要强调两点：(1) 选定中间变量要适当；(2) 要弄清每一步求导是哪个变量对哪个变量求导，不要混淆.

1.3 导数的应用

1.3.1 利用导数判断函数的单调性

1. 本节的重点是利用求导的方法判断函数的单调性.

2. 教材从函数图象出发给出了用导数的符号判别函数增减性的方法，比较直观，且容易理解接受.

3. 学生在学习数学 1 中的函数时，已经知道了单调函数的定义，并会用定义判断或证明函数在给定区间的单调性. 学习本节后，会发现用导数判断函数在给定区间的单调性要简捷得多，也可以求单调区间. 在教学时，要注意从学生已有知识出发，引导学生对两种方法进行比较.

4. 函数单调性判别法的证明要用到中值定理，中值定理不属于高中阶段的学习范围，故略去了函数单调性判别法的证明过程.

1.3.2 利用导数研究函数的极值

1. 本节的重点是利用导数知识求函数的极值.

2. 教材由山峰、山谷的实例，引入极大值、极小值、极值、极值点. 在此基础上，借助函数图象，介绍了利用函数的导数求极值和最值的方法.

3. 利用函数的导数求极值时，首先要确定函数的定义区间；其次，为了清楚起见，可用导数为零的点，将函数的定义区间分成若干小开区间，并列成表格，判断导函数在各个小开区间的符号，如例题.

4. 求函数的最大值和最小值，需要先确定函数的极大值和极小值，因此，如何求函数的极大值和极小值是关键.

5. 注意区分函数的极值和最值：函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的，若有最大值或最小值，则只能有一个；函数的极值是就函数在某一点附近的小区间而言的，在函数的整个定义区间内可能有多个极大值或极小值.

6. 我们所讨论的函数是在闭区间上连续，在开区间内可导的函数. 在闭区间上连续保证有最大值和最小值；在开区间内可导，才能用导数求解.

7. 对于可导函数，其定义域内的一点是极值点的必要条件是该点的导数值为零；其定义域内的一点是极值点的充分条件是该点两侧的导数值异号. 另外，应注意：函数的不可导点也可能是极值点，例如函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 是函数的极小值点.

1.3.3 导数的实际应用

1. 本节的重点是利用导数知识解决实际生活中的最优化问题.

2. 解决最优化问题的关键是建立函数模型，因此需先审清题意，明确常量与变量及其关系，再写出实际问题的函数关系式. 一般来说，对于实际问题还需要注明变量的取值范围.

1.4 定积分与微积分基本定理

1.4.1 曲边梯形面积与定积分

1. 本节重点是定积分的概念，体会如何把曲线围成区域的面积转化成矩形面积的和.

2. 例 1 把区间 [0, 1] 等分为 n 个小区间，以矩形的左端点为纵坐标，求面积. 让学生思考以右端点为纵坐标求面积，两者作比较.

3. 例 2 是一个物理问题，体会如何用积分解决实际问题，体会积分的工具性.

4. 定义的讲解应注意求和之后的极限要存在，此外应注意数学符号的特点.

1.4.2 微积分基本定理

1. 本节重点是微积分的基本定理.

2. 通过实际问题，引出微积分基本定理，推导的难度比较大，可以让学生只作了解.

3. 例 1、例 2 是根据定理求面积，注意例 2 中在 $[\pi, 2\pi]$ 上的积分为负值，在 $[0, 2\pi]$ 上的积分为 0，不等于我们所求的阴影部分的面积.

4. 求定积分计算过程中，主要是要找到被积函数的原函数.

三、拓展资源

（一）谈谈微积分学

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着. 在数学中引入了变量的概念后，就有可能把运动现象用数学加以描述了. 由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，一门新的数学分支继解析几何之后产生了，这就是微积分学. 微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中最大的一个创造.

微积分学的建立

从微积分成为一门学科来说，是在十七世纪，但是，微分和积分的思想在古代就已经产生了.

公元前 3 世纪，古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着近代积分学的思想. 作为微分学基础的极限理论，早在古代已有比较清楚的论述. 比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”. 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周和体而无所失矣”. 这些都是朴素的、也是很典型的极限概念.

到了 17 世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素. 归结起来，大约有四种主要类型的问题：第一类是研究运动的时候直接出现的，也就是求即时速度的问题. 第二类问题是求曲线的切线的问题. 第三类问题是求函数的最大值和最小值问题. 第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力.

17 世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作，如法国的费尔玛、笛卡尔、罗伯瓦、笛沙格；英国的巴罗、瓦里士；德国的开普勒；意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论，为微积分的创立作出了贡献.

17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作. 他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）.

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这

正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源．牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的．牛顿在 1671 年写了《流数法和无穷级数》，这本书直到 1736 年才出版，它在这本书里指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合．他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数．牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度求给定时间内经过的路程（积分法）．

德国的莱布尼茨是一个博学多才的学者，1684 年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》．就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义．它已含有现代的微分符号和基本微分法则．1686 年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献．他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响．现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的．微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力．

前面已经提到，一门科学的创立决不是某一个人的业绩，它必定是经过多少人的努力后，在积累了大量成果的基础上，最后由某个人或几个人总结完成的．微积分也是这样．不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立．英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百年．其实，牛顿和莱布尼茨分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的．比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼茨早 10 年左右，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿早三年．他们的研究各有长处，也都各有短处．那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论从 1699 年始延续了一百多年．应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的．他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊．牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的也不能自圆其说．这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生．直到 19 世纪初，法国科学学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚实基础．才使微积分进一步的发展开来．任何新兴的、具有无量前途的科学成就都吸引着广大的科学工作者．在微积分的历史上也闪烁着这样的一些明星：瑞士的雅科布·贝努利和他的兄弟约翰·贝努利、欧拉、法国的拉格朗日、柯西……

欧氏几何也好，上古和中世纪的代数学也好，都是一种常量数学，微积分才是真正的变量数学，是数学中的大革命．微积分是高等数学的主要分支，不只是局限在解决力学中的变速问题，它驰骋在近代和现代科学技术园地里，建立了数不清的丰功伟绩．

微积分的基本内容

研究函数，从量的方面研究事物的运动变化是微积分的基本方法．这种方法叫做数学分析．

本来从广义上说，数学分析包括微积分、函数论等许多分支学科，但是现在一般已习惯于把数学分析和微积分等同起来，数学分析成了微积分的同义词，一提数学分析就知道是指微积分．微积分的基本概念和内容包括微分学和积分学．微分学的主要内容包括：极限理论、导数、微分等．积分学的主要内容包括：定积分、不定积分等．

微积分是与应用联系着发展起来的，最初牛顿应用微积分学及微分方程从万有引力定律导出了开普勒行星运动三定律. 此后，微积分学极大地推动了数学的发展，同时也极大地推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展. 并在这些学科中有越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展.

（二）高中数学新课程中微积分内容与传统内容的区别

高中数学新课程中微积分的内容与传统内容有很大的区别，首先是从结构上，不再是以往的“数列—数列的极限—函数的极限—函数的连续—导数—导数的应用—不定积分—定积分”这样的顺序，略去了对一般极限的学习. 其次是在内容的选择上，把重点放在导数及其应用上. 对于希望在理工（包括部分经济类）方面发展的学生，相对于希望在人文、社会方面发展的学生来说，提高了导数计算方面的要求. 还增加了定积分的背景和微积分基本定理的直观意义等内容，这是因为导数是微积分的核心概念，变化率的思想在现实世界中随处可见. 再次是在内容的安排上，更加关注微积分的现实背景及其应用、微积分的基本思想、微积分与其他学科的联系.

微积分是人类智慧的最高成就之一，微积分的方法是数学中一个强有力的工具、精美的范例；在众多领域和现实社会中有着广泛的应用；对于辩证思维、崇尚数学的理性精神的培育具有独到的教育意义；等等. 因此，在高中数学课程中设置微积分有其独特的价值和作用. 也正因为如此，迄今为止，无论是发达国家，还是发展中国家，都在中学数学中设置了这一内容. 关键是如何针对中学生的认知水平，改变以往微积分内容的设置模式，设计出既能体现数学本质，又能适合高中学生学习和有利于其未来发展的微积分课程.

但由于长期以来受大学微积分课程设置模式的影响，高中数学课程中设置微积分内容始终是“数列→数列的极限→函数的极限→函数的连续→导数→导数的应用→不定积分→定积分”的模式. 事实上是大学微积分的一种缩编和简单下放，对于在中学设置微积分的意义和作用缺乏深入的思考和研究. 这就导致了不容忽视的问题：由于过度关注一般极限的定义，直接影响了对微积分思想方法的认识和理解；由于中学生的认知水平和其他一些原因，教学中大都将微积分作为一种规则来学习，更是影响了对微积分思想方法的认识和理解；课程中缺乏微积分的背景材料、应用问题，以及与现实社会联系的实例，导致了学生学得盲目、学得枯燥乏味，还加重了负担，教师和学生都觉得不受用；到了大学，大学教师还抱怨微积分学习炒了“夹生饭”.

总之，一方面是社会的发展、数学的发展，需要在中学学习微积分，另一方面是中学数学微积分的教与学存在着种种问题. 为此，在反复思考、研究的基础上，新课程在微积分的内容、处理和要求上，都有了很大的变化. 我们期待着在新课程的实施中去认识、实践它，不断地完善它. 通过微积分的学习，真正达到其教育目标，提高现代社会中未来人才应该具备的素质.

（三）数学新课程对微积分内容处理的变化

为了更好地体现课程改革“进一步提高未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会的需要”的总目标，针对传统微积分处理方式带来的一些问题，例如：

把微积分作为大学微积分内容的一种缩编和简单下放，先讲一般极限概念，把导数作为一种特殊极