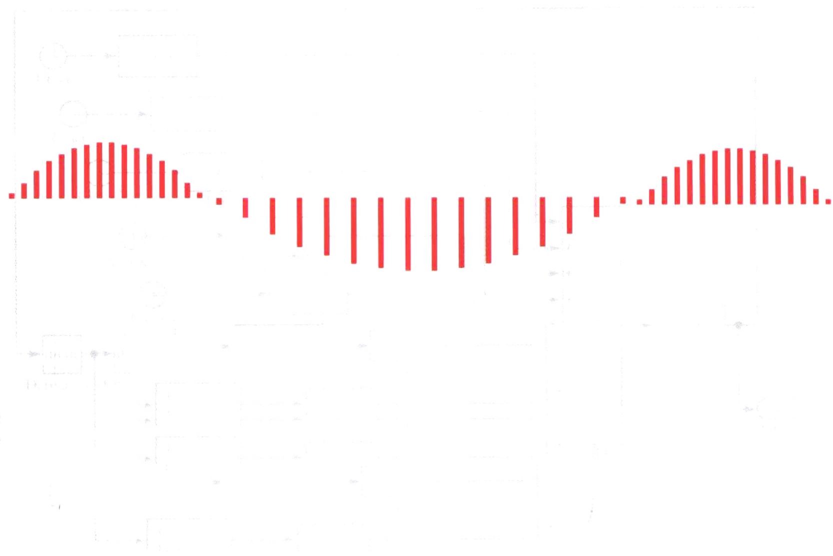
FENSHUJIE XITONG FENXI YU SHEJI

赵春娜 李英顺 陆涛 著

分数阶系统分析与设计



国防工业出版社
National Defense Industry Press

分数阶系统分析与设计

赵春娜 李英顺 陆涛 著

国防工业出版社

·北京·

前　言

现实的世界本质上是分数阶的。分数阶系统对于人们所能看到的，触摸到的，所能控制的自然界中的事物具有很大的影响。过去人们用整数阶微积分描述周围的事物，而自然界中许多现象依靠现有的传统微分方程是不能精确描述的，必须对传统的微积分学进行扩展才能更好地描述与研究这样的现象。分数阶微积分是扩展传统微积分学的一种直接方式，即允许微分方程中对函数的导数阶次选择分数，而不仅是现有的整数。

在科学发展的过程中，很多进展都来源于所谓“in between”的思想，例如模糊逻辑在传统的 Cantor 集合的[0,1]值之间引入了隶属度的概念，基于该理论的模糊控制理念无论在理论还是在实际应用中都有着重大的意义。分数阶微积分学理论也是基于这样的“in between”思想，它不仅为系统科学提供了一个新的数学工具，也表明了实际系统动态过程本质上是分数阶的。分数阶系统是建立在分数阶微积分以及分数阶微积分方程理论上实际系统的数学模型，它能更准确描述系统动态过程，将使得人们更好地理解客观世界，对科学与工程领域的进展将起着重要的作用。

本书阐述了分数阶系统的本质特征，介绍了分数阶系统近似、建模等分析方法。针对过程控制中应用最广泛的 PID 控制器进行分析，阐述了性能更好的分数阶 PID 控制器及整定方法，并进行了温度控制等实例分析。分数阶 PID 控制器的设计及整定方法，将对过程工业控制有重要的理论意义和巨大的应用前景。在自然灾

害和教育评估中应用分数阶模型来建立多因素间的复杂关系，充分体现分数阶系统的特点。本书在叙述上重点突出、条理清晰、语言精练流畅、通俗易懂，便于知识点的理解和进一步研究，具有较高的学术价值。

本书写作与出版得到北京市教育委员会科技计划项目《基于分数阶的教学质量建模仿真及评估方法研究》（项目编号KM201010028021）、辽宁省自然科学基金《最优分数阶PID控制器参数整定算法研究》（项目编号20062036）、辽宁省自然科学基金《汽车防抱制动参数自整定模糊PID控制器研究》（项目编号20082044）、辽宁省教育厅项目《新型纸机烘缸智能加热系统》（项目编号2008519）的资助。

本书第1章、第4章、第6章、第7章、第10章由赵春娜编写，第2章、第9章由陆涛编写，第3章、第5章、第8章由李英顺编写，全书由赵春娜统稿。在本书编写过程中，作者的一些师长、同事和朋友先后给予了很多帮助，包括东北大学薛定宇教授、张祥德教授、孙艳蕊教授和美国犹他州立大学陈阳泉教授，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指教。

作 者

2010年8月

目　　录

第1章　分数阶系统概述

现实的世界本质上是分数阶的。分数阶微积分对于人所能看到的、触摸到的、所能控制的自然界中的事物具有很大的影响。过去用整数阶微积分描述自然界中的事物。但自然界中许多现象依靠传统整数阶微分方程是不能精确描述的，必须对传统的微积分学进行扩展才能更好地描述与研究这样的现象。分数阶微分方程是扩展传统微积分学的一种直接方式，即允许微分方程中对函数的导数阶次选择分数，而不仅是现有的整数。图1.1和图1.2给出了Isabel飓风的影像与分数阶微分方程模型的计算结果，可见这样的现象是不能用整数阶微分方程模型进行建模和研究的，而分数阶微分方程则可以较好地描述这种现象。

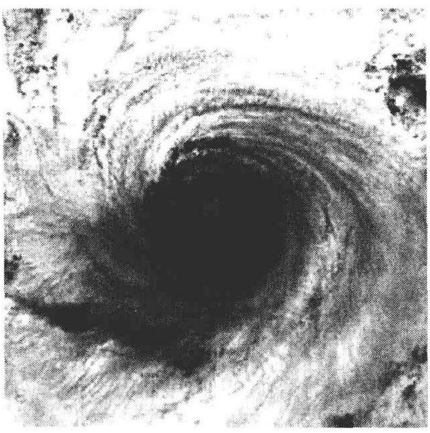


图1.1　飓风的自然现象

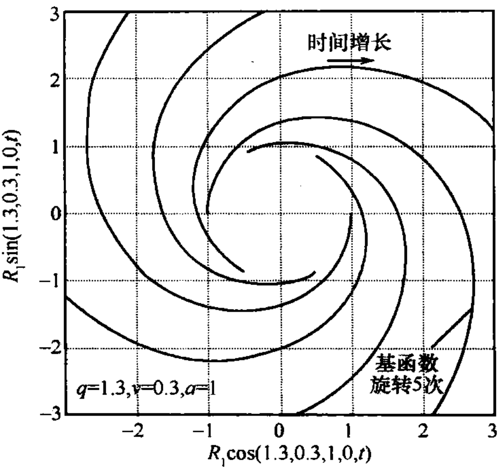


图 1.2 分数阶微分方程仿真

在科学发展的过程中,很多进展都来源于所谓"in between"的思想。例如模糊逻辑在传统的 Cantor 集合的[0,1]值之间引入了隶属度的概念,基于该理论的模糊控制理念无论在理论还是在实际应用中都有着重大的意义。分数阶微积分学理论也是基于这样的"in between"思想,该领域的研究将使得微积分学的研究范围进一步扩展。分数阶微积分学的引入将使得人们更好地理解客观世界,对科学与工程领域的进展将起着重要的作用。

描述自然界现象的数学模型都应该是分数阶的。很多系统由于采用集中参数方式的近似后效果很好,可以用整数阶系统模型近似描述,忽略分数阶因素,故分数阶现象并未引起足够的重视。但在一些实际的系统,如电气、机械、生物工程系统中,分数阶现象是不能忽略的,需要考虑分布参数系统,这类系统在以往研究中通常采用偏微分方程来近似描述,传统的建模仿真和控制设计方法不适合处理这样的偏微分系统,使其难于分析控制。引入分数阶微积分学的建模方法,则很多被偏微分方程描述的过程可以较好地用分数阶系统精确地描述,利用分数阶仿真和控制方法来准确研究分析。

分数阶微积分学的理论可以追溯到300年前微积分学创建者之一 Lebnitz 的工作，但分数阶微积分学在其他领域的应用是近十几年的事，较全面也是广为引用的描述分数阶微分方程的著作出版于 1999 年[1]，国内的书籍《高等应用数学问题的 MATLAB 求解》是较早介绍分数阶微积分学及其计算的著作[2]。

1.1 分数阶系统简介

分数阶系统是建立在分数阶微积分以及分数阶微分方程理论上的模型系统。分数阶微积分指微分、积分的阶次可以是任意的或者说是分数的，它扩展了人们所熟知的整数阶微积分的描述能力。整数阶微积分仅仅取决于函数的局部特征，而分数阶微积分以加权的形式考虑了函数的整体信息，在很多方面应用分数阶微积分的数学模型，可以更准确地描述实际系统的动态响应，提高对于动态系统的设计、表征和控制的能力。分数阶微积分积累了函数在一定范围内的整体信息，这也称作记忆性，它在物理、化学与工程中都有应用。分数阶微积分的发展为各个学科的发展提供了新的理论基础，在冶金、化工、电力、轻工和机械等工业过程中都有应用。分数阶微积分对于复杂的、成比例的系统过程和事件提供了更完善的数学模型，在物理、生物工程、控制理论等方面有很多应用。随着工业的发展，对于一些实际模型的建立提出了更高的要求，分数阶微分方程的引入，使得数学模型变得更加的简单准确，分数阶微积分的研究，也越来越受到关注。

分数阶微积分还没有广泛应用于系统工程领域，是由于在工程系统的数学模型中还没有广泛使用分数阶微积分，一般的偏微分方程对于动态系统的建立也提供了足够的自由度。近年来，这种情况开始发生变化，分数阶微积分不仅为工程系统提供了新的数学工具，而且特别适合描述动态系统的行为。最近，在漫射、光谱分析、电介质与黏弹性等行为中，一些数学家、物理学家和工程师等人已经开始应用分数阶微积分来解决问题。分数阶微积分对

于复杂的成比例的过程和事件提供了更完善的数学模型。在生物工程领域，以前生物工程师很少直接应用分数阶微积分这个数学工具解决当时的生物医学问题。在大多数情况下，他们用传统的整数阶微分方程为动态系统建模，并研究这些生物过程的控制系统。对于一些情况，这些工具方法是有效的。但是，在生物分子工程、细胞组织工程和神经网络工程的一些新兴领域，那些传统的方法就有一定局限性。分数阶动力学遵循分数阶幂函数暂态响应，一些传感神经元就显示这种活动，生物系统的暂态响应和频率响应数据表明这是一种潜在的分数阶动力学。这就迫使人们将传递函数的模型由整数阶扩展到分数阶，来更好地研究这些行为，分数阶微积分为其提供一种有效的运算模型。

随着对分数阶微积分理论研究的不断深入，它的应用也越来越广，在力学、物理学、生物工程、分形理论和地震分析等方面都有涉入。第一个用分数阶微积分解决的工程问题是等时曲线问题。1823 年，Abel 发现了一个微分方程的解，这个微分方程包含了当时分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义。由于当时分数阶微积分算子的不完善、定义的相互矛盾、缺乏统一的运算规则等，使得分数阶微积分在工程中的应用受到限制。直到 19 世纪中期 Liouville、Riemann、Grünwald 和 Letnikov 发展了分数阶微积分定义的一般表达式。今天，最常用的分数阶微积分定义就是 Riemann-Liouville 定义和 Grünwald-Letnikov 定义，这些定义在工程问题中的应用也经历了很长时间。

在将一些变换如拉普拉斯操作等应用到分数阶系统时，可以发现对于分数阶微积分的操作并不遵循那些整数阶微积分的规则。例如，对于一个时间常数 c 的 0.5 阶微分并不是零，而是 $c/\sqrt{\pi t}$。这个结果也显示了在分数阶微积分中即使是一个在整数阶微积分中简单的定义也是复杂的，这也表明要想获得这个新的数学工具并不能简单地套用传统的整数阶微积分的理论方法。分数阶微积分就像一门新的语言一样，对于人们熟悉的公式有自己不同的规则。在分数阶微积分领域里，为了更好地描述那些基本

原则需要开发新的定义与原理。在仔细分析的基础上,还要证明对于描述函数、系统的方法和操作是正确的。因此,分数阶微积分不仅是更好的建模工具,而且还可以从数学上精确证明系统的正确性。

分数阶控制系统既可以应用到整数阶系统中,也更适合分数阶受控系统模型。在复杂动态系统中,应用分数阶微积分方程建模要比整数阶系统模型更加准确,特别是在物理、生物医学等方面,分数阶系统模型可以准确描述动态系统的属性特征。分数阶模型,一般来说采用分数阶控制器才能起到很好的控制效果。分数阶控制器增加了可调参数,可以连续改变系统参数属性,其控制效果远远好于整数阶控制器。分数阶控制器不仅适用于分数阶系统模型,对于整数阶系统模型也能充分体现它的优越性。

越来越多的专家学者开始关注分数阶系统的研究。在 2003 年美国机械工程师协会上首次出现了关于分数阶微积分及其应用的座谈会,该会议接受了 29 篇关于分数阶微积分及其应用的文章,其中涉及建模、自动控制、热能系统和动态系统等多个领域。首次分数阶微积分及其应用的 IFAC 会议于2004 年夏天在法国波尔多召开,会议包括描述、分析、近似、仿真、建模、识别、可观、可控、模式识别、边缘检测等很多方面。对于分数阶系统的研究包罗万千,类似于整数阶系统的各个方面,分数阶系统有很多方面值得人们去研究分析。

1.2 分数阶系统求解

随着分数阶微积分定义的出现,分数阶微积分方程的求解方法就成为数学家至今仍在研究的主要课题。分数阶微积分方程的解析解不仅很难求得,而且在实际的工程中意义并不大,数值解在实际中的应用更广泛一些。数学家们给出了自己的解法,每种解法都随计算机技术的快速发展,得到了验证。

起初研究者们针对特定的分数阶微积分方程的求解作了大量

研究。对于分数阶 Black-Scholes 方程，Wyss 等人[3]给出了一个完整解。对于分数阶 Fokker - Planck 方程的求解问题，Liu 等人曾进行过深入研究[4]。Diethelm 等人[5]对于 Adams 类型的分数阶微分方程，提出用预测校正方法来得到微分方程的数值解。特别是在物理现象上，对于分数阶漫射方程，Wyss 等人[6]研究了其在特定函数下的解的形式，又进一步给出了分数阶漫射波方程，及其相关属性。Gorenflo 等人[7]用拉普拉斯变换法得到了分数阶漫射波方程的几何不变解。Mainardi 等人[8]在复平面内给出了分数阶漫射波一种关于格林函数的一般表达式。Anh 和 Leonenko[9]对于带有特定参数的分数阶漫射波方程提出了一些运算规则。Agrawal 等人[10]也在 Caputo 分数阶微积分定义的基础上，求解了分数阶漫射波方程。Benson 等人[11]经过大量研究，对于分数阶水平散射方程，给出了基于分数阶稳定误差函数的解析解。

研究者多数是针对分数阶微积分的 Caputo 定义来给出分数阶微积分方程的解。很多求解分数阶微积分方程的工作，都是对于单项的分数阶线性微积分方程来研究分析的，阶次小于 1 的分数阶微分方程是学者们研究的重点。在此基础上，将其扩展到高阶的多项的分数阶线性微积分方程，Edwards 等人[12]对此进行了研究，将分数阶微积分方程看作一个方程系。Miller 和 Ross[13]给出了一种分数阶微积分方程求解方法，他们将分数阶微积分方程描述为一系列相关的分数阶微分方程。Diethelm 和 Ford[14]在分数阶微积分的 Caputo 定义下给出了一种求解分数阶微积分的数值算法。Sayed 等人[15]对于线性分数阶微积分方程给出了一种计算其近似的数值解的算法，该方法需要很大的计算量来得到计算权数。大多数的研究还是针对分数阶线性微积分方程的。对于具有初值条件的分数阶非线性微积分方程的研究，也在逐渐得到学者们的关注。Ortigueira 等人[16]专门讨论了分数阶线性系统的初始条件问题。以上研究多是基于 Caputo 分数阶微积分定义，是相对于较低阶的分数阶微分方程的求解研究，很多方法都具有一定的局限性，不能推广到高阶或是任意阶的分数阶微积分方程。也

有研究者给出用分数多步法来求解高阶的微积分方程，经过大量研究证明该多步法理论上是有效的但在实际中并不可行。也有人提出用多项方程式来近似离散的分数阶微分方程。Tseng 等人[17]在最简洁的分数阶微积分 Cauchy 定义的基础上，利用傅里叶变换的属性，在频域内，用最小方差法来求解分数阶微积分方程。该方法是用信号处理的工具来求出分数阶微积分的信号输出，信号的零均值就是该方法的内在要求，因此考虑在分数阶微积分 Cauchy 定义上进行的。Diethelm 等人[18]讨论了分数阶非线性微积分方程的求解问题，在特定初值和分数阶微积分 Riemann-Liouville 定义的条件下求解分数阶微积分方程的数值解。陈阳泉教授利用 Lambert 函数，用解析表达式给出了一类分数阶延迟动态系统的稳定界。这些研究为今后分数阶系统理论的发展奠定了基础，为分数阶鲁棒控制的研究提供了必要条件。

分数阶微积分方程以及数值解的求解方法，为分数阶系统分析与控制提供了理论上的依据。对分数阶微积分方程进行一系列变换，可以将分数阶系统从时域扩展到频域。对于建立在分数阶微积分基础上的分数阶系统来说，这些变换把经典的控制理论扩展到了分数阶控制理论中来。分数阶系统问题的求解不能完全借用传统的微积分理论来实现，必须依据自己的理论体系。而很多分数阶微积分领域的计算，如一般非线性分数阶微分方程尚不具备一般的数值解法，实用解法的提出将为分数阶系统的研究奠定基础。

1.3 分数阶系统近似化

由于分数阶系统中微积分的阶次是分数的，不能直接应用整数阶的理论方法。对分数阶系统进行有理函数的近似化、离散化是研究分数阶系统的主要方法之一。这样就可以将分数阶系统转化为一般的控制系统来进行研究。分数阶系统的近似化方法一般来讲主要有两种：直接近似化和间接近似化。直接近似化是利用 Z 变换直接将分数阶系统转化为离散的整数阶系统。间接近似化

是利用拉普拉斯变换将分数阶系统转化为连续的整数阶系统。

直接近似化方法有欧拉算子的幂级数扩展、Tustin 操作算子的连分式扩展等。Tustin 操作算子的扩展法在高频部分存在很大的误差。随即产生了 Al-Alaoui 算子,它是融合了欧拉算子和 Tustin 操作算子而得到的,可以采用 Al-Alaoui 算子的连分式扩展的近似法。也有学者采用 Muir's 递归与 Tustin 操作算子相结合,连分式扩展与 Tustin 操作算子相结合的方法近似等。直接近似化主要采用级数展开或是连分式扩展等方法。利用级数展开的方法需要考虑级数收敛域的问题,在实际情况中,收敛速度较慢,收敛域有时是很难确定的,因此该方法在应用中有很大的局限性。应用连分式扩展来近似分数阶系统要比指数序列展开的收敛速度快,并且可以应用到频域中,但是连分式展开方法并不能确保离散化模型能保持原分数阶系统模型的稳定性,且在实现精度上不甚理想。

研究者们也考虑到借用信号处理的一些工具来近似分数阶系统。有些人采用 FIR(Finite Impulse Response)来近似分数阶系统,由于该方法得到的近似系统的阶次过高而失去有效性。也有学者考虑采用 IIR(Infinite Impulse Response)来近似分数阶系统,它以 Simpson 积分规则与梯形规则相结合的方法进行近似,该方法中对于权重的选取是一个有待进一步优化的问题。间接近似化过程也可以采用稳定最优有理函数拟合的方式来实现。最优有理函数拟合方法能克服连分式方法所带来的缺点,并且拟合的效果要比连分式更好。Carlson 利用牛顿法,通过迭代根来得到分数阶算子的近似。Matsuda 利用对数空间上的一系列点来逼近分数阶系统。A. Oustaloup、A. Chareff 等人分别提出了自己的方法,都取得了不错的拟合效果。效果较好的近似化方法是 Oustaloup 近似法,虽然在近似频段两端的效果不是很理想,但是总体的近似效果还是可以接受的,其近似的响应时间与实际的可行性使得该方法得到广泛使用。改进近似法通过提高近似频段两端的近似效果,提高了整体近似精度,成为目前最精确的间接近似法。