

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写

适合各种版本教材

点击专项

新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

主编：李永哲

高中数学

解三角形 数列

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

本册主编：刘晓菲
编委：王雪晶
尹微微
高琨
李叶英
石成娟
赵传义
兰风华
曲黎春

郑明琴
刘德广
张友欣
张雪瑛
张伟花
崔连明
韩晓强
鲍洪忠

郑明媚
郑明媚
刘金嵘
刘徐春
王秀杰
杨丽媛
周广文
滕飞
曹艳菊

高中数学

解三角形 数列

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·解三角形、数列/李永哲主编. —延吉:
延边大学出版社, 2009. 8

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2829 - 8

I. 点… II. 李… III. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130272 号

点击专项·高中数学·解三角形、数列

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号 邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail: ydcbs@ydcbs.com

电话:0433 - 2732435

传真:0433 - 2732434

发行部电话:0433 - 2133001

传真:0433 - 2733266

印刷:大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880 × 1230 1/32

印张:12.75 字数:218 千字

印数:1—12000

版次:2010 年 3 月第 1 版

印次:2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2829 - 8

定价:20.00 元



前言 Foreword

在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识都有自己的特点。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求,编写了本书《点击专项——高中数学 解三角形、数列》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢,并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成:

知识归纳

本版块将解三角形、数列的知识和规律进行总结和归纳,将其主要规律呈示出来,使学生们在学习中能最短的时间内掌握本章节的内容。

典型例题及训练题

本版块分为例题和训练题两部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容,对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。





提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练,不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容,而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇的题难度很大,但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的,因此,这些题是本章节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练,能够对本章节的内容有个明晰的认识。

参考答案

全书给出了标准答案,有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容,从而达到点击专项的目的。



目 录 Contents

第一章 解三角形(必修5)	1
1.1 正弦定理和余弦定理	2
1.1.1 正弦定理	2
参考答案	34
1.1.2 余弦定理	43
参考答案	80
1.2 应用举例	92
参考答案	132
第一章测试题	143
参考答案	145
第二章 数 列(必修5)	148
2.1 数列的概念与简单表示法	149
参考答案	194
2.2 等差数列	200
参考答案	232
2.3 等差数列的前 n 项和	241
参考答案	286
2.4 等比数列	296
参考答案	345
2.5 等比数列的前 n 项和	354
参考答案	388

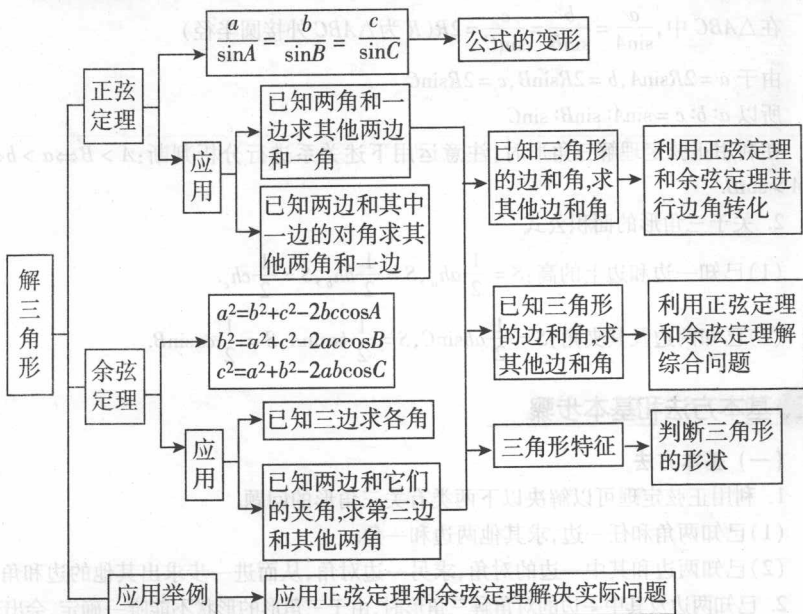


第一章 解三角形

本章教学目标及要求

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.
2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.
3. 能根据确定三角形的条件、三角形中边角间的大小关系确定解的个数.

知识结构框图



学法指导

1. 重视数学思想方法的运用,解三角形作为几何变量问题,要突出几何背景,注意数形结合思想的运用,具体解题时要注意函数与方程思想的运用.
2. 加强新旧知识的联系,本章知识与初中学习的三角形的边角关系有密切联系,





同时要注意与三角函数、平面向量等知识的联系,将新知识融入已有的知识体系,从而提高综合运用知识的能力。

3. 提高数学建模能力,利用解三角形解决相关的实际问题,关键是读懂题意,找出量与量之间的关系,根据题意作出示意图,将实际问题抽象成解三角形模型。

4. 通过本章学习,掌握正弦定理、余弦定理,并能够运用正弦定理和余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

一、知识归纳

1. 正弦定理

在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径)

由于 $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$

所以 $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

在利用正弦定理解三角形时,注意运用下述关系进行分析判断: $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B$.

2. 关于三角形的面积公式

(1) 已知一边和边上的高: $S = \frac{1}{2}ah_a, S = \frac{1}{2}bh_b, S = \frac{1}{2}ch_c$.

(2) 已知两边及其夹角: $S = \frac{1}{2}ab\sin C, S = \frac{1}{2}bc\sin A, S = \frac{1}{2}ca\sin B$.

二、基本方法和基本步骤

(一) 基本方法

1. 利用正弦定理可以解决以下两类有关三角形的问题。

(1) 已知两角和任一边,求其他两边和一角。

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,从而进一步求出其他的边和角。

2. 已知两边及其中一边的对角解三角形时,由于三角形的形状不能唯一确定,会出现两解、一解和无解三种情况,可以根据“三角形中大边对大角”的定理进行判断解的个数。

由于已知两边和其中一边的对角,不能唯一确定三角形的形状,因此解这类三角形问题将出现两解、一解、无解三种情况,已知 a, b 和角 A 时解三角形的各种情况为:

(1) A 为锐角时,情况如图 1.1.1-1 所示。

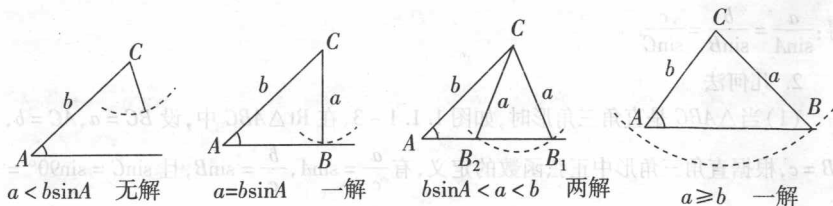


图 1.1.1-1

(2) A 为直角或钝角时,情况如图 1.1.1-2 所示.

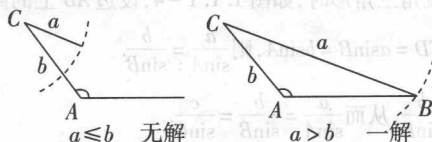


图 1.1.1-2

也就是说利用正弦定理解三角形,需要已知一个三角形的两个角和一条边;或者已知一个三角形的两条边和一边的对角.

①三角形有唯一解的条件:(i)已知三角形的两角和一条边;(ii)已知 a, b, A ,解三角形时,若 A 为钝角或直角,且 $a > b$ 时,有唯一解;若 A 为锐角,且 $a \geq b$ 时,有唯一解;若 A 为锐角,且 $a < b$,当 $a = b \sin A$ 时, B 为直角,有唯一解.

②三角形有两解的条件:已知 a, b, A ,解三角形时,若 A 为锐角,且 $b \sin A < a < b$ 时,有两解.

③三角形无解的条件:已知 a, b, A ,解三角形时,若 A 为锐角,且 $a < b \sin A$ 时无解;若 A 为钝角或直角,且 $a \leq b$ 时,无解.

3. 判断三角形的形状特征,必须从研究三角形的边与边的关系,角与角的关系入手,充分利用正弦定理,由三角形的边或角的代数运算或三角运算找出边与边或角与角的关系,从而作出正确判断.

(二)基本步骤

1. 根据题意画出示意图.
2. 确定实际问题所涉及的三角形,并搞清该三角形的已知元和未知元.
3. 应用正弦定理求解,并注意运算的正确性.
4. 给出答案.

解三角形问题列入了考试大纲的重要部分,是高考考查的新热点,正弦定理很少单独命题,往往与三角函数结合解三角形问题,以选择题、解答题形式出现,正弦定理多用于三角变换、立体几何等与三角形的边与角有关的应用问题之中.

(三)正弦定理的证明方法

1. 面积法

在任意斜 $\triangle ABC$ 中: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$, 两边同除以 $\frac{1}{2}abc$ 即



得: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

2. 几何法

(1) 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时, 如图 1.1.1-3, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 设 $BC = a, AC = b, AB = c$, 根据直角三角形中正弦函数的定义, 有 $\frac{a}{c} = \sin A, \frac{b}{c} = \sin B$, 且 $\sin C = \sin 90^\circ =$

1, 则 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = c$. 从而在直角三角形 ABC 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时, 如图 1.1.1-4, 设边 AB 上的高是 CD , 根据任意角三角函数的定义, 有 $CD = a \sin B = b \sin A$, 则 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

同理可得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 从而 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

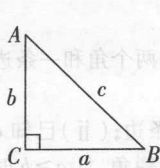


图 1.1.1-3

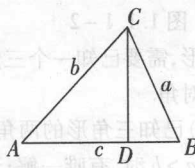


图 1.1.1-4

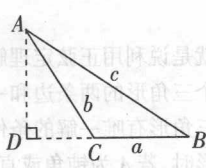


图 1.1.1-5

(3) 当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 如图 1.1.1-5, 角 C 是钝角, 设边 BC 上的高是 AD ,

则 $AD = c \sin B, AD = b \sin \angle ACD = b \sin C$, 所以 $c \sin B = b \sin C$, 即 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$,

同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 从而 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

3. 用向量证明

如图 1.1.1-6, 过 A 作单位向量 j 垂直于 $\overrightarrow{AC}$, 又 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, 两边同乘以单位向量 j , $j \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = j \cdot \overrightarrow{AB}$, 则 $j \cdot \overrightarrow{AC} + j \cdot \overrightarrow{CB} = j \cdot \overrightarrow{AB}$,

$$\therefore |j| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 90^\circ + |j| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos(90^\circ - C) = |j| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos(90^\circ - A),$$

$$\therefore a \sin C = c \sin A, \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理: 若过 C 作单位向量 j 垂直于 $\overrightarrow{CB}$ 得: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

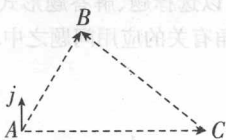


图 1.1.1-6

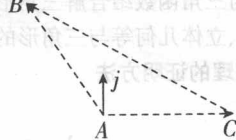


图 1.1.1-7



当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,设 $\angle A > 90^\circ$,过 A 作单位向量 j 垂直于向量 $\overrightarrow{AC}$ (如图1.1.1-7),证明同上.

$$a \sin B = b \sin A, c \sin B = b \sin C, c \sin A = a \sin C;$$

$$a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C;$$

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆半径});$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆半径}).$$

三、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:正弦定理的理解

例1 有关正弦定理的叙述:

①正弦定理只适用于锐角三角形;②正弦定理不适用于锐角三角形;③在某一确定的三角形中,各边与它所对角的正弦的比是一定值;④在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A:\sin B:\sin C = a:b:c$. 其中正确的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

分析: 正弦定理适用于任一三角形,故①②均不正确,由正弦定理知三角形一旦确定,则各边与其所对角的正弦的比就确定了,故③正确,由比例性质和正弦定理可推知④正确.

答案: B

题型二:已知两角和其中一角的对边解三角形

例2 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ, C=45^\circ, c=\sqrt{2}$,求边 b 的长.

分析: 已知两角和其中一角的对边,利用正弦定理求另一角的对边.

解: 已知 $B=60^\circ, C=45^\circ, c=\sqrt{2}$.

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 所以 } b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{3}.$$

点评

正弦定理揭示了三角形中边与角之间的关系,可进行三角形中边角关系的运算.



例3 在 $\triangle ABC$ 中, $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $b=1$. 求边 c 及三角形的外接圆的半径.

分析: 本题可通过三角形内角和为 180° 求出角 C , 然后根据已知两角及其中一角的对边利用正弦定理求另一边.

解: 已知 $A=30^\circ$, $B=45^\circ$ 得 $C=180^\circ-A-B=105^\circ$, 则由正弦定理得:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \therefore c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{1 \times \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, R = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

题型三: 三角形的面积

例4 求证: $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$.

分析: 利用 $S = \frac{1}{2}ah$, 想办法用三角函数表示各边上的高 h .

证明: 如图 1.1.1-8, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 BC 边上的高为 h , 则
 $h = c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$.

由 $S = \frac{1}{2}ah$, 得

$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

$$\text{又 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore b \cdot \sin A = a \cdot \sin B.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}c \cdot (a \cdot \sin B) = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A,$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B.$$

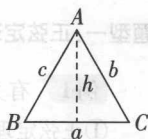


图 1.1.1-8

点评

利用三角函数定义表示各边上的高 h , 然后利用正弦定理变形证明.

例5 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B=30^\circ$, $c=2\sqrt{3}$, $b=2$, 求三角形的面积.

分析: 用正弦定理求角 C 是解本题的关键, 然后根据三角形面积公式求解.

$$\text{解: } \because c \sin B = 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3},$$

$\therefore c \sin B < b < c$, 三角形有两解, 根据正弦定理得:

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3} \sin 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore C = 60^\circ \text{ 或 } C = 120^\circ.$$

当 $C=60^\circ$ 时, $A=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$,



$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

当 $c = 120^\circ$ 时, $A = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

点评

本题的求解应注意解的情况,否则容易丢解.

题型四:已知三角形两角和任一边求其他边与角

例6 已知三角形的两角分别是 45° 、 60° ,它们所夹边的长是1,求最小边的长.

分析:给出了三角形的两角,可由三角形内角和定理求出第三个角,然后根据三角形中大边对大角,确定出最小边,再运用正弦定理求解.

解:设 $\triangle ABC$ 三内角 $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$,则 $C = 75^\circ$,

$\therefore C > B > A$, $\therefore$ 最小边的长为 a ,

$$\therefore c = 1, \therefore \text{由正弦定理,得 } a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{1 \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \sqrt{3} - 1.$$

$\therefore$ 最小边的长为 $\sqrt{3} - 1$.

点评

注意三角形中大边对大角是确定本题中最小边的关键.

三角形的三个内角和是 180° ,已知两角时,可先求出第三个角,然后利用正弦定理求边.

题型五:已知三角形的任意两边与其中一边的对角,可以求其他边与角

利用正弦定理解“已知三角形的任意两边与其中一边的对角求其他边与角”的问题时,由于在某些情况下不能确定三角形可能出现一解、两解或无解,应结合“三角形中大边对大角”来判断解的情况,做到正确取舍,我们可通过以下示例加以说明.

例7 满足 $a = 4$, $b = 3$ 和 $A = 45^\circ$ 的 $\triangle ABC$ 的个数为

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 无数多个

分析:因为 $A = 45^\circ < 90^\circ$, $a = 4 > 3 = b$, $B < 45^\circ$,所以 $\triangle ABC$ 解的个数为1,故选 B.

答案:B

例8 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A = 45^\circ$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$,求 B .

$$\text{解:} \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \sin 45^\circ}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore a > b$, $\therefore A > B$,即 B 为锐角, $\therefore B = 30^\circ$.



点评

在判定三角形解的个数时,要注意运用大边对大角的性质.

例9 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$,解此三角形.

分析:已知两边及一边所对的角来解此三角形,可运用正弦定理来求解.

解:由正弦定理得:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \because a > b, \therefore A > B = 45^\circ, \therefore A = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

$$\text{当 } A = 60^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{综上所述: } A = 60^\circ, C = 75^\circ, c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \text{ 或 } A = 120^\circ, C = 15^\circ, c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

点评

已知两边及一边所对的角来解三角形时,可以运用正弦定理,但要注意判定解的情况,并注意灵活运用三角公式及正弦定理的变形.

例10 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $A = 60^\circ, a = \sqrt{3}, b = 1$, 则 $c =$ ()

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\sqrt{3}$

分析:本题主要考查正弦定理的应用及解三角形问题.

解:由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,可得: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sin B}, \therefore \sin B = \frac{1}{2}$,

故 $\angle B = 30^\circ$ 或 150° ,由 $a > b$ 得 $\angle A > \angle B, \therefore \angle B = 30^\circ$,故 $\angle C = 90^\circ$,

由勾股定理 $c = 2$.

答案:B

点评

由 $a > b$ 得出 $\angle A > \angle B$ 是关键.

题型六:正弦定理与外接圆的半径

例11 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b = 2a \sin B$,求 A .

分析:根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$ (R 为外接圆的半径,可把条件中的边化为



角计算)

解: 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 根据正弦定理, 得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R, \therefore a = 2R\sin A, b = 2R\sin B.$$

$$\therefore b = 2a\sin B, \therefore 2R\sin B = 4R\sin A\sin B,$$

$$\therefore 2\sin B = 2\sin A\sin B, \therefore \sin B(2\sin A - 1) = 0.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \sin B \neq 0, \therefore 2\sin A - 1 = 0,$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2}, \therefore A = 30^\circ \text{ 或 } A = 150^\circ.$$

点评

正弦定理揭示了三角形中的边角关系, 以 $2R$ 为桥梁, 可化边为角或化角为边.

题型七: 判断三角形形状

例 12 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是

()

A. 锐角三角形

B. 等腰三角形

C. 直角三角形

D. 以上都不对

分析: 联想诱导公式 $\sin(\pi - 2B) = \sin 2B$, 应考虑有多种情况.

解: $\because 0 < A < \pi, 0 < B < \pi$, 由 $\sin 2A = \sin 2B$ 可得 $2A = 2B$, 或由 $\sin 2A = \sin(\pi - 2B)$ 可得 $A + B = \frac{\pi}{2}$. $\therefore A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

答案: D

点评

正弦函数在 $(0, \pi)$ 内不严格单调, 在利用正弦定理求三角形的内角或判定形状时, 容易丢解而出错. 为防止出错, 要充分借助诱导公式.

例 13 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, 试判断三角形的形状.

分析: 利用正弦定理将边化为角.

解: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$, 代入已知式子中, 得 $\frac{\cos A}{\sin A} =$

$$\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos C}{\sin C}, \text{ 即 } \cos A\sin B = \sin A\cos B, \sin C\cos B = \sin B\cos C,$$

$$\therefore \sin(A - B) = 0 \text{ 且 } \sin(B - C) = 0.$$

$$\therefore -\pi < A - B < \pi, -\pi < B - C < \pi.$$

$$\therefore A - B = 0 \text{ 且 } B - C = 0. \therefore A = B = C. \therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形.}$$

**点评**

涉及边角之间的关系时,一般可以考虑使用正弦定理将边化为角.

例 14 在 $\triangle ABC$ 中, $a\cos A = b\cos B$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

分析: 可用正弦定理化边为角来寻找角的关系, 从而判断三角形的形状.

解: 由正弦定理得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, 又 $a\cos A = b\cos B$,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\cos B}{\cos A}, \therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos A}, \therefore \sin A \cos A = \sin B \cos B, \therefore \sin 2A = \sin 2B,$$

$$\therefore 2A = 2B, \text{ 或 } 2A = \pi - 2B, \therefore A = B, \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

点评

已知三角形中的边角关系式, 判断三角形的形状, 可考虑用正弦定理化边为角, 再进行三角恒等变换求出三个角之间的关系式, 然后给予判定, 在正弦定理的推广中, $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ 是化边为角的主要工具.

例 15 (2007 · 福建) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A = \frac{1}{4}, \tan B = \frac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 最大边的边长为 $\sqrt{17}$, 求最小边的边长.

分析: 利用两角和的正切公式求 $\angle C$, 利用正弦定理求边长.

$$\text{解: (1)} \because C = \pi - (A + B), \therefore \tan C = -\tan(A + B) = -\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}} = -1.$$

$$\text{又} \because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{3}{4}\pi.$$

$$(2) \because C = \frac{3}{4}\pi, \therefore AB \text{ 边最大, 即 } AB = \sqrt{17}.$$

$$\text{又} \because \tan A < \tan B, A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 得 } \sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{由 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \text{ 得 } BC = AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{最小边 } BC = \sqrt{2}.$$



点评

本小题主要考查两角和与差公式,用同角三角函数关系等解斜三角形的基本知识以及推理和运算能力.

基础训练

- 在 $\triangle ABC$ 中,下列关系一定成立的是 ()
A. $a > b \sin A$ B. $a = b \sin A$ C. $a < b \sin A$ D. $a \geq b \sin A$
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=6, b=6\sqrt{3}, A=30^\circ$,则边 c 的长为 ()
A. 6 B. 12 C. 6 或 12 D. $6\sqrt{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin C$,则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形
- 不解三角形,确定下列判断中正确的是 ()
A. $a=4, b=5, A=30^\circ$,有一解 B. $a=5, b=4, A=60^\circ$,有两解
C. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=120^\circ$,有一解 D. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{6}, A=60^\circ$,无解
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a=2, A=30^\circ, C=45^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ, C=45^\circ, b=2$,则此三角形的最小边长为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边,若 $A=105^\circ, B=45^\circ, b=2\sqrt{2}$,则 $c=$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A: \tan B = a^2: b^2$,判断三角形形状.
- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $S_{\triangle ABC}=1, C=30^\circ$,求 $a+b$ 的最小值.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $c=\sqrt{8}, a > b, \tan A + \tan B = 5, \tan A \cdot \tan B = 6$,求 a, b .
- 已知 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 为角 A, B, C 的对边,且 $a+c=2b, A-C=\frac{\pi}{3}$,求 $\sin B$ 的值.
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=2\sqrt{3}, A=30^\circ$,讨论当 b 为何值时(或在什么范围内)三角形有一解,有两解,无解?
- 已知 $|a|=8, |b|=7, a$ 与 $a+b$ 的夹角为 60° ,求 a 与 b 的夹角.

(二)提高篇

典例分析

题型一:已知三角形的两角和其中一角的对边,求三角形的其他边和角

例1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=45^\circ, B=30^\circ, c=10$,求 b .