

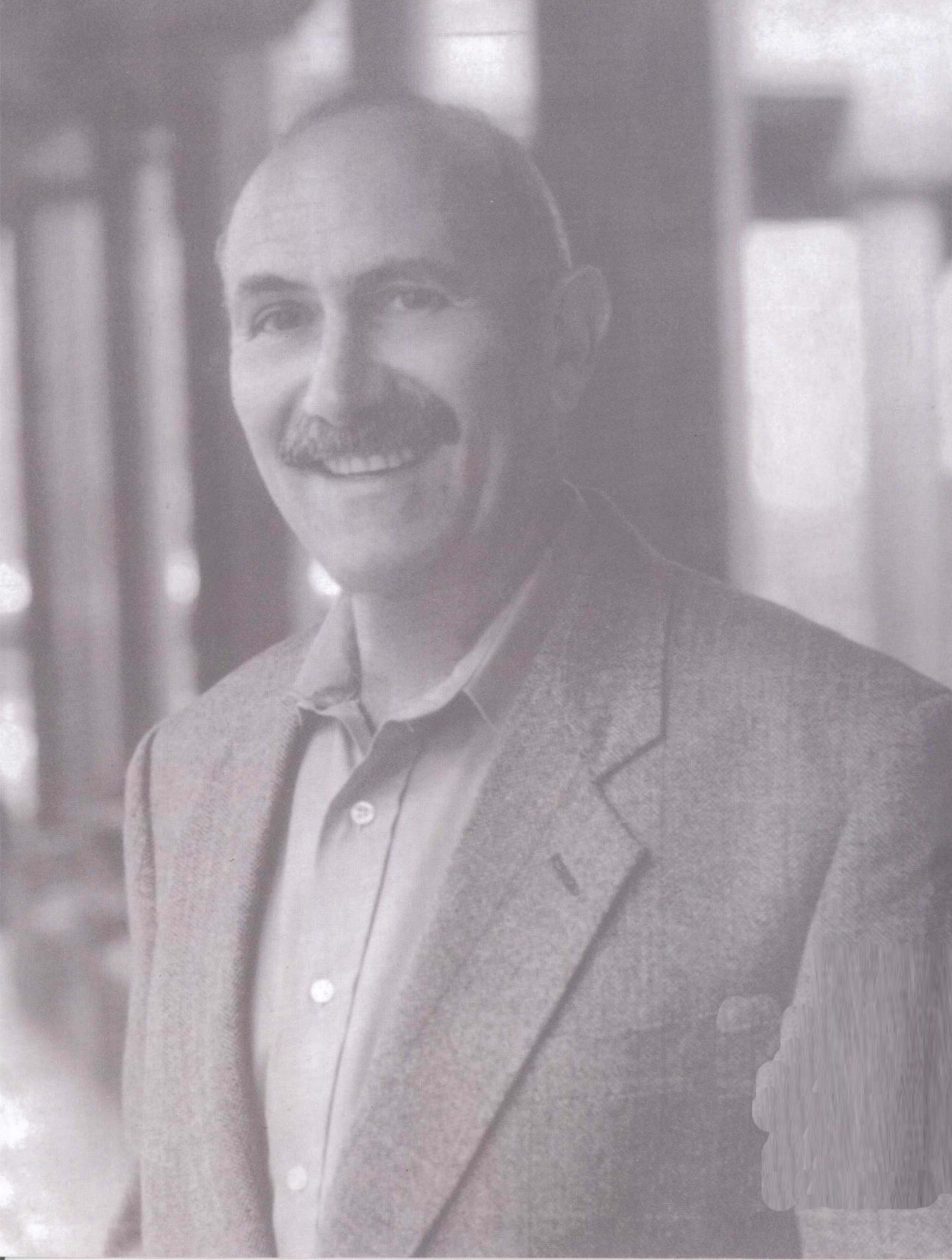
神秘的阿列夫 *The plystery of the Aleph*

数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻

Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity

[美]阿米尔·艾克塞尔 (Amir D. Aczel) 著 左平译





科学图书馆

科学新文献

神秘的阿列夫 *The mystery of the Aleph*

数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻

Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity

[美]阿米尔·艾克塞尔(Amir D. Aczel) 著 左·平 译



上海科学技术文献出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

神秘的阿列夫  / (美) 阿米尔·艾克塞尔著; 左平译.
--上海: 上海科学技术文献出版社, 2011. 1
ISBN 978-7-5439-4648-4

I. ①神… II ①阿… ②左… III. ①数学-普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第255629号

The Mystery of the Aleph

Copyright © 2000 Amir D. Aczel

Copyright licensed by Four Walls Eight Windows, part of the Avalon Publishing Group

This edition arranged with Andrew Nurnberg Associates International Limited

Copyright in the Chinese language translation (Simplified character rights only) ©

2008 Shanghai Scientific & Technological Literature Publishing House

All Rights Reserved

版权所有, 翻印必究

图字: 09-2006-783

责任编辑: 张 树 李 莺

美术编辑: 徐 利

**神秘的阿列夫 **

[美] 阿米尔·艾克塞尔 (Amir D. Aczel) 著

左 平 译

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市长乐路746号 邮政编码200040)

全国新华书店经销

江苏常熟市人民印刷厂印刷

*

开本740X970 1/16 印张8.5 字数156 000

2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5439-4648-4

定价: 20.00元

<http://www.sstlp.com>

献给 6 岁的米略姆(Miriam), 他已能理解
 χ_0 与连续统的势之间的某些差别。

目 录

1 德国工业城市哈雷	1
2 古代起源	7
3 喀巴拉——中世纪犹太神秘主义教派	15
4 伽利略和波尔查诺	27
5 柏林	36
6 化圆为方	45
7 学生	50
8 集合论的诞生	54
9 第一个圆圈	60
10 “我看着它,但我不相信它”	64
11 粗暴的攻击	70
12 超限数	74
13 连续统假设	79
14 莎士比亚和精神病	83
15 选择公理	89
16 罗素悖论	93
17 少年哥德尔	97
18 维也纳的咖啡馆	101
19 1937年6月14—15日之夜	106
20 莱布尼茨,相对论和美国宪法	109
21 科恩的证明和集合论的未来	112
22 上帝无限光亮的外袍	117
附录	121
后记	123
注释	125

1. 德国工业城市哈雷

1918年1月6日，一位憔悴虚弱的老人因心脏衰竭在德国工业城市哈雷的一所大学精神病院去世。他的遗体安静地经过市区被运送到墓地，接着举行了小型葬礼。只有少数人参加了这一路德教葬礼，其中有他的妻子和遗下的5个孩子。

墓地已不再存在；那里为建私人住宅已被夷为平地。但有人把墓碑保存下来了，并且几年后在哈雷另找地方建起一个没有遗体的墓地，竖立起原来的墓碑，我们现在见到的就是它。墓碑上所刻碑文是：

乔治·康托 博士

数学教授

1845. 3. 3—1918. 1. 6

在去世前，乔治·康托在哈雷精神病院(Halle Nervenlinik)治疗了7个月。但这不是他第一次住院。乔治·康托曾经在此医院治疗、休养、读书有好几次。在1891年该院建立前，他的精神已有问题若干年了。

1869年乔治·康托在柏林大学获得数学博士学位，在该大学他在当时一些最伟大的数学家的指导下学习，并被很多重要的数学思想吸引。他渴望能把自己的才智用在发展数学分析领域里的新理论上。24岁的他为获得一个德国大学的教师职位而努力，希望这将使他有更多的时间继续他的研究。但提供给他的只是哈雷大学的职位，哈雷位于柏林西南约113千米处。

哈雷是一座有着迷人的中世纪鹅卵石街道的古老城市。它作为塞勒(Saale)河上的盐业中心建立于10世纪中叶。这个城市经历了世界大战的洗礼，有许多古建

筑挺立在市中心，在市中心人们悠闲地购物或乘坐机动车来喝咖啡。哈雷也叫做五塔市。一座中世纪大厦的4个塔尖傲视着市中心其他的低矮建筑，附近耸立着第五座塔，这是1418年的红塔，是为纪念市民反对统治者的压迫，争取自由的斗争的一座建筑物。

1685年，作曲家乔治·弗里德里希·汉德尔(Georg Friedrich Handel)诞生在哈雷的一所房子里，这所房子里最古老的墙是12世纪的。汉德尔在这所房里生活了将近18年。这所房子是现在仍能参观的展示这位作曲家生活的博览会。哈雷市一直是一座音乐会、歌剧和歌舞之城。

可以说，哈雷对于康托应该是有某些吸引力的，因为他父母双方的家庭成员中有些是很有天赋的音乐家。他们中的某些人在故乡俄罗斯已很有名望。但康托对哈雷的这种魅力并不很感兴趣。他来自一个移民的家庭——从古代亚平宁(Ibrian)半岛经丹麦和俄罗斯，这个家庭对年青的康托期望很高。特别是他的父亲全年都给康托寄信，敦促他在学校要做得更好，不要辜负家庭的巨大期望。

哈雷在两座伟大的大学城之间：柏林在东北而哥廷根在西边。19世纪末，柏林大学在数学方面是世界上最好的，而柏林是全欧洲最活跃最令人激动的城市之一，哥廷根则是另一个科学的吸引点。像哈雷一样，哥廷根也是一个古老的中世纪城市。市中心的许多房子装饰着以前住过的著名人物名字的小匾，这些人物有诗人海涅、化学家本森(Bunsen)、天文学家奥伯斯(Olbers)等等，他们当中最著名的是C. F. 高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)，他是那个时代无可争议的最伟大的数学家。哈雷同时受到柏林和哥廷根的影响和推动。

但康托一直住在哈雷，等待着从未到来的邀请。多年来，只要在柏林或哥廷根有公开需要的数学工作职位，他都抱着很大希望，每当他没有获得这种职位时，他都会感到愤愤不平。他有强烈的个人欲望和疯狂的特性。这种态度使他在一生中树立了不少敌人，失去了许多朋友。对照他与其他数学家的状态，他与他的家庭成员有着亲密的关系。在与同事们交谈时他总是处于主导地位，但在家中，他则充当一个较为轻松的角色，他让妻子和孩子更接近他并引导启发在餐桌上的交谈。每次餐毕他总是问妻子：“你今天和我在一起过得愉快吗？你爱我吗？”

康托的学术生涯是从当私人讲师开始的，那也是当时进入德国的大学做研究的入门式的工作。经少许几年的努力工作，他被提升为副教授，不久成为一位数学教授。但是在他的最多产的时期中，发生了某件奇怪的事情，他暂时终止了他的工作。1884年夏，康托受到深深压抑感的打击。这年从5月到6月他完全处于停顿状态——不能工作或做任何事。他的情况使他的妻子和孩子们苦恼，使他的同事们感到遗憾，他们



大约 1900 年哈雷市的一个市场

(摄影:德国人穆勒(Moeller)、汉斯·格洛特(Hanns H. Grote)提供)

知道他是热切渴望攀登绝顶的数学家。然而,没有经过任何的医治或专业帮助,康托克服了他的疾病并恢复了正常生活。此后,他给他的挚友,瑞典数学家 G·米塔-莱夫勒(Gosta Mittag-Leffler, 1846—1927)写了一封信,信中描述了他的疾病并提到患精神疾患前他一直在研究“连续统问题”。

在随后的 1885 年,康托为他的家庭建起一座华丽的住宅,坐落在以哈雷的大作曲家之名汉德尔雀塞(Handelstrasse)命名的一条街道上。这房子现仍属于康托的孙子所有。这是一座 2 层楼房,有较高的屋顶和很大的窗户。乔治·康托的父亲,一位商人兼股票经纪人,去世后留给其后代几千万马克。这些遗产的一部分建起了这座新房和购置了家具,使康托一家过得很舒适。如今,汉德尔雀塞街是一条宁静的林阴道,街两旁有许多富丽堂皇的住宅,这些房子距大学和咖啡厅、餐馆以及文化机构都只有十几分钟的步行路程。但是,在这个新家,康托与他的家人一起住不多久,尚没有很好地享用这新住宅,不久,他的病再次复发。发病前他一直在研究连续统问题。

哈雷大学有一个非常好的心理病学系。康托能得到那时最好的治疗——并且是免费的,因为他是大学教授。他的大学和柏林的文化部授权作出这样的决定,即要慷慨地保证康托可以从教学岗位反复离开。但他进医院的次数随着时光流去变得更加频繁。柏林的普鲁士国家档案馆里保存有一封文化部致法国财政部的信,日期标为 1902 年 8 月 29 日。在此信中,文化部要求一笔 6 600 马克的资金,用来支持当康托教授病得太重时,哈雷大学为使教学得以顺利进行的数学教授替换协定。但康托再次康复并回到教学岗位。

下一年他再次发病,1904 年 9 月 17 日被送进精神病院,一直住到 1905 年 3 月 1 日。之后在那年的秋天,康托再次进入医院。

哈雷精神病院有 11 座大楼,这些大楼是由吸引人的黄色研磨砖构成的,周围有很长的围墙。建筑质量是如此的精良,即使现今看起来几乎仍与百年前建立时完全一样。主要大厦有一尖塔,说它是精神病院,倒不如说更像是一个军事司令部。内部的房间宽敞明亮,窗户很大并带有私人浴室。这不是限制那些穿紧身衣的疯子自由的地方。它是——并且仍然是——一个富人们为了个人健康在此暂住几个月的医院,而这些人家庭是能缴付房租、伙食和治疗费用的。乔治·康托,一位大学教授,被安排在一间有很好视野的单间里,并且可自由地继续他的研究。他的治疗主要是浸泡在热水澡盆里一段时间。

虽然他确实是在医院治疗中死去的,但人们不能对后来罗素(Bertrand Russell)所说的关于康托(参考康托已写的一封信)的话作出肯定的判断,即,读到他的信的人听到他死在一个精神病院里的消息是不会感到惊讶的。



康托的住宅

(摄影:阿米尔·艾克塞尔(Amir D. Aczel))

我们不知道康托所患病的确切状况。某些报告所说的症状像是双极紊乱或极度郁闷。但这精神疾病的原因现在逐渐被归结为遗传因素,而在康托的祖先中存在我们不知道的此种病病例。

我们已经知道关于康托的病的一个事实。压抑感对他的攻击是与这样一个时期联系在一起的,在此时期内他正在思考关于现在叫做“康托的连续统假设”的问题。他也正在苦思冥想着一个单独的数学表达式,即利用希伯来字母阿列夫的一个方程:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

这个方程是关于无穷的性质的一个表述。在康托写出它以后的一个多世纪,这个方程——连同它的性质和蕴涵——仍然在数学中保留着最不可思议的神秘性。

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + \dots = 2 \quad \begin{array}{c} 0 \qquad 1 \quad 1\frac{1}{2} \quad 2 \\ \text{-----} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \qquad \qquad \qquad 1\frac{3}{4} \end{array}$$

芝诺利用这个悖论争辩说,在空间和时间可被细分为无穷多的假设下,运动甚至绝不能开始。

这些悖论是历史上利用无穷概念的最初例子。令人惊讶的结果是,进行无穷多步仍能有一个有限和,这种情形叫做“收敛”。

人们试图通过放弃这概念来解决阿其里的悖论,或一个人打算离开房间的悖论,那么必须采取少之又少的次数。怀疑依然存在,因为如果阿其里追赶的次数必须少之又少的话,那么他绝不能赢。这些悖论突出了无穷概念令人费解的性质,以及当我们试图理解无穷过程或现象时我们面临的陷阱。但无穷的思想在芝诺前一世纪的毕达哥拉斯(前 569—前 500)的著作中已经有了,毕达哥拉斯是古代最重要的数学家之一。

毕达哥拉斯生于阿纳托利(Anatolian)海湾内的萨摩斯(Samos)岛上。他年轻时广泛游览了整个古代世界。按照传统惯例,他访问了巴比伦,几次到埃及旅行并会见教士们——从文明初期起埃及历史纪录的保存者——并和他们一起讨论埃及人对于数的研究。他回来后,搬到意大利的克罗顿(Crotona),并创立了一个致力于数的研究的哲学学派。在那里,他和他的同伴推导出著名的毕达哥拉斯定理。

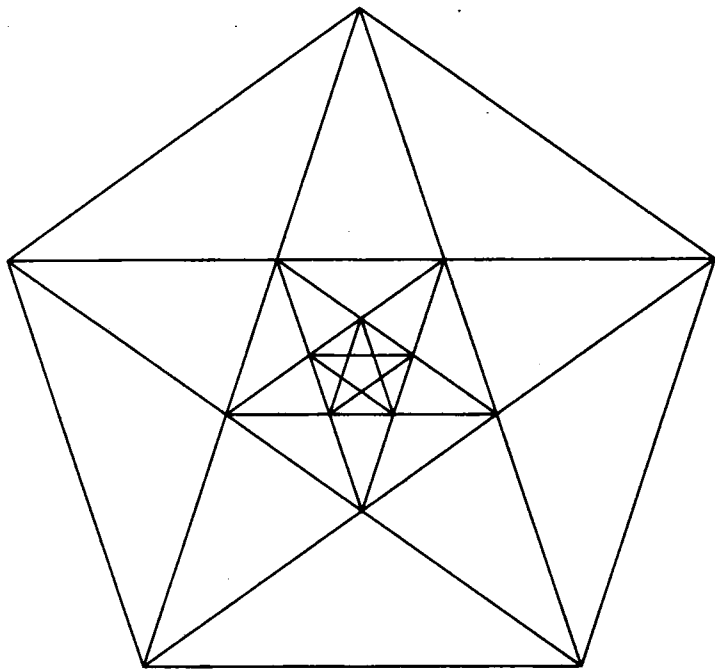
在毕达哥拉斯前,数学家们并不理解现在称为定理的那些结果,是必须证明的。毕达哥拉斯和他的学派,以及古希腊的其他数学家把我们引入到严密的数学世界——一个从最初的少数原理利用公理化和逻辑推理逐级建立起来的体系。毕达哥拉斯以前,几何学是通过经验量度得来的一些规则的集合体。毕达哥拉斯发现,一个完整的数学体系是能够建立起来的,该体系中的几何元素是与数对应的,而整数和它们的比对于建立一个合乎逻辑和真实的完整体系都是必要的。但是某些事情粉碎了毕达哥拉斯及其同伴所建立的优美的数学体系。这就是无理数的发现。

在克罗顿的毕达哥拉斯学派遵从严格的管理规定。成员们相信轮回,即灵魂的转世。所以,为了保护死去朋友的灵魂而不能宰杀野兽。毕达哥拉斯派是素食主义者并遵守对额外食物的限制。

毕达哥拉斯派对数学和哲学的坚持不懈的研究是他们道德生活的基础。相信毕达哥拉斯派已经制造了两个词语,哲学(智慧的爱)和数学(学习到的东西)。毕达哥拉斯派有两类讲演:一类是给他们的学派成员的;另一类是为广泛交流通信用的。发现存在捣乱的无理数是在第一类讲演中提到的,对这类讲演成员们要宣誓完全保守秘密。

毕达哥拉斯派有一个符号——内接于一个五边形的一个五角星,这个五角星

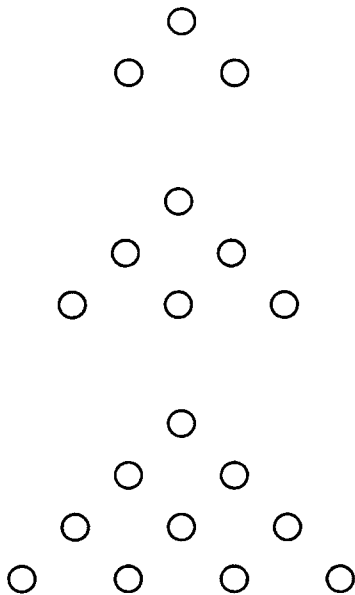
内部是另一个五边形,其内部是另一个五角星,如此等等直至无穷。在此图形中,每一条对角线被交线分成不等的两部分。较大线段与较小一段的比是黄金分割,是在自然界和艺术中出现的那个神秘的比例。中世纪有个斐波那契(Fibonacci)数列:1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ……其中从第3项起每个数是它前两个数的和,黄金分割是这个数列中相邻两个数的比所组成的数列的极限。每相邻两个数的比接近于黄金分割:1.618……,这是一个无理数。它是一个无限不循环10进小数。无理数在毕达哥拉斯以后的2500年中对无穷概念的发展起着决定性作用。



数神秘主义不是起始自毕达哥拉斯学派。但毕达哥拉斯派举行的对于数的顶礼膜拜的仪式,不论是从数学还是从宗教方面来看其规格都很高。毕达哥拉斯们认为1是所有数的生成元。这样的认识使他们能对无穷概念有些理解,因为给定任何一个数——不论多么大——他们都可以在此数上加1而得到一个更大的数。毕达哥拉斯们认为偶数是阴性,奇数是阳性。3是代表和谐的第一个真正的奇数,4是第一个平方,看作是公正和恰当计算的符号。5表示婚姻:第一个阴性数与第一个阳性数的结合。6是创造的数。毕达哥拉斯们特别敬畏数7:它是七个行星或“奇妙星体”的数。

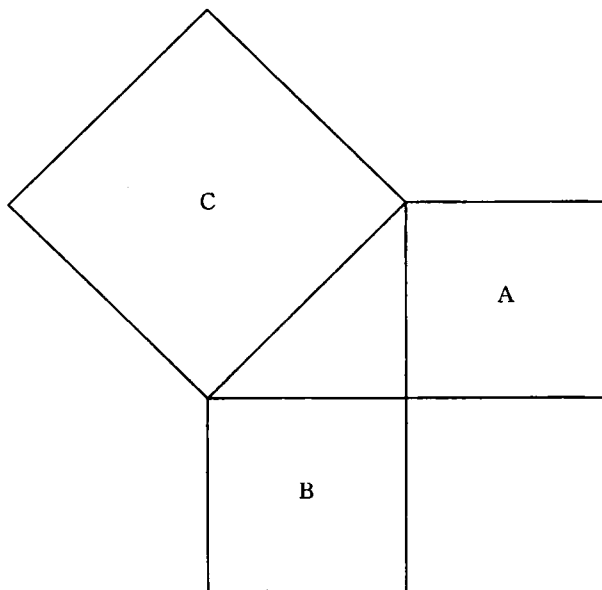
最神圣的数是 10。它是表示宇宙的数,并是所有生成几何维数的元素之和: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, 其中元素 1 决定的是点(0 维), 元素 2 决定的是线(1 维), 元素 3 决定的是面(2 维), 元素 4 决定的是四面体(3 维)。毕达哥拉斯派智力成就的最大贡献是: 他们从抽象数学推演论证数 10 的方法远胜于计算两只手的手指。与此相同, 数 20 是所有手指和脚趾的和, 在它们的世界中没有什么特别之处, 而基于 20 的一个计算系统的遗迹在法语里仍可见到。毕达哥拉斯派基于抽象数学推理的论证远远优于通常的具体实物的计算。

10 是一个三角形数。这里我们再次看到毕达哥拉斯派所知道的几何与算术之间的联系。三角形数是这样的一些数, 把它们的数画下来时形成一个三角形。类似的三角形数是 3 和 6。10 的下一个三角形数是 15。



一个稍后的毕达哥拉斯派学者——菲洛罗斯(Philolaos, 公元前 4 世纪)写到了关于对三角形数特别是对 10 的崇拜。菲洛罗斯描述的神圣的 10 如同全能的创始者, 指导着天上和地上的生活¹。我们知道的有关毕达哥拉斯派的许多事情都来自菲洛罗斯和生活在毕达格拉斯以后的学者的著作。

毕达哥拉斯派发现, 有不能表示成两个整数之比的数, 这种数叫做无理数。毕达哥拉斯派是从他们著名的定理推导出无理数的存在的, 该定理说的是直角三角形斜边的平方等于其他两边的平方之和, $a^2 + b^2 = c^2$ 。这可由图形证实如下:



当这毕达哥拉斯定理应用到两边都是 1 的直角三角形时,斜边的长就应由方程 $c^2 = 1^2 + 1^2$ 得到,即 $c = \sqrt{2}$ 。毕达哥拉斯派认识到这个数是不能被写为两个整数之比的²。有理数是形为 a/b 的数,其中 a 和 b 都是整数,它们的十进小数位或变成全是零,或有一部分是无限循环的。例如, $1/2 = 0.500\ 00\dots\dots$; $2/3 = 0.666\ 666\ 6\dots\dots$; $6/11 = 0.545\ 454\ 54\dots\dots$ 。另一方面,无理数是无限不循环小数。因而无理数是需要写出无限多个十进小数位的。³

对于毕达哥拉斯派和追随者来说,发现无理数是不能接受的,因为数已变成毕达哥拉斯派的宗教信仰。数是他们崇拜的偶像。而数只意味着整数和分数。2 的平方根是一个不可能用上帝所创立的两个数的比来表示的,它的存在危及他们的整个信仰体系。这个捣乱的发现到来的时候,毕达哥拉斯派已经献身于研究数的威力和神秘性的秘密盟会。

希帕苏斯(Hippasus),毕达哥拉斯派的一个成员,由于他把无理数的存在泄露给外部世界而被认为犯了重罪。有一些有关这一事件余波的传说。应某些人的要求希帕苏斯被盟会开除了。还有一些传说谈到他是怎样死的。有一个故事说毕达哥拉斯本人勒死或溺死了这个叛徒,而另一些则描写了毕达哥拉斯派如何在希帕苏斯还活着时为他挖掘坟墓,然后秘密地将他处死。还有一个说法是希帕苏斯被盟会其他成员放进一叶漂浮在海面的小舟里,接着把它沉入海底。