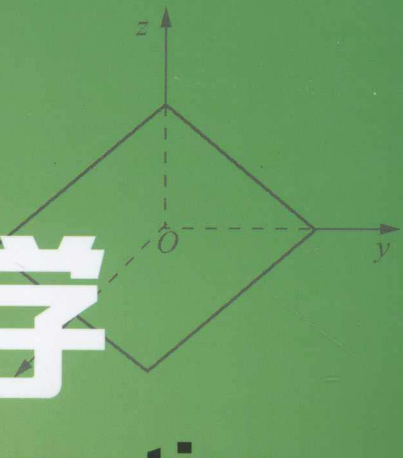
21世纪高等学校教材

上海交通大学数学系 编

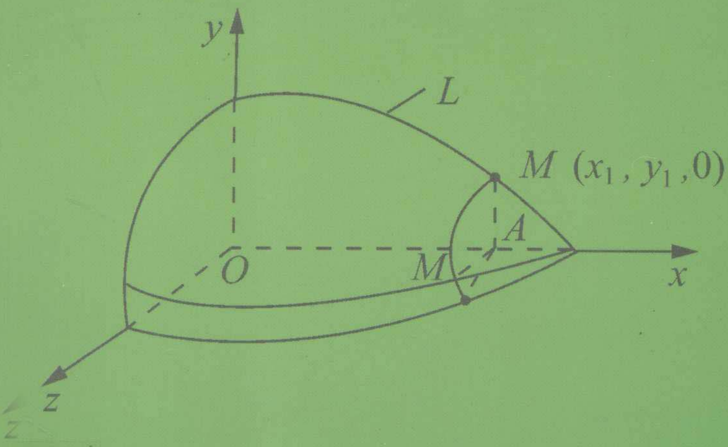
第二版

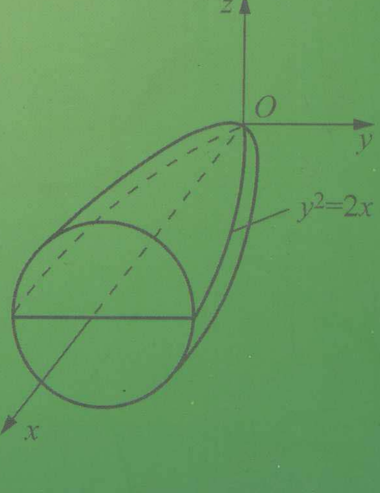


高等数学

Advanced Mathematics

（下册）





上海交通大学出版社

21 世纪高等学校教材

高等数学（下册）

（第二版）

上海交通大学数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括：多元函数的微分法及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程.

本书着重对基本概念、基本理论、基本方法的准确阐述，不过于强调技巧，更有利于提高读者的分析问题和解决问题的能力. 这次再版，删减了传统的繁琐、冗长的推导内容，不再列举繁杂的、特殊技巧的例题.

书中文字叙述力求通俗易懂、可读性强、使用面更广，可作为一般本科高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/上海交通大学数学教研室编. —2版. 上海：上海交通大学出版社，2009(2010重印)

ISBN 978-7-313-00066-8

I. 高... II. 上... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第071927号

高等数学(下册)
(第二版)
上海交通大学数学系 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
常熟市华通印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787mm×960mm 1/16 印张：20 字数：377千字
1988年4月第1版 2009年5月第2版 2010年1月第10次印刷
ISBN 978-7-313-00066-8/O 定价：27.00元

再版前言

高等数学是高等院校一门传统的基础理论课，在传授学生知识、启发学生思维和培养学生能力等方面都具有重要的作用. 1987 年，为了继承和发扬交通大学“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的优良办学传统，上海交通大学应用数学系组织部分教授、副教授参照 1980 年教育部颁发的《高等工业学校高等数学教学大纲(草案)》的要求，在长期教学实践的基础上编写出版了《高等数学》一书(上、下册). 该教材以及与之配套的《高等数学习题集》不仅使上海交通大学的学生受益匪浅，而且受到其他高校师生的欢迎.

近年来，我国的高等教育事业发生了很大的变化，一方面随着招生规模的扩大，高等教育趋向于大众化，为了提高学生综合素质，各高校相继增加了一些课程，使得高等数学的课时相对减少；另一方面由于科学技术的飞快发展和数学在各领域中的广泛应用，人们越来越认识到，高等数学不仅是学好其他基础课程的基础，是学好专业课程的工具，更主要的是它能培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，从而获得发展的基础，创造的源泉，受益终生，于是对高等数学这门课程提出提高学生数学素养和应用能力的要求. 为了适应这些变化，我们采纳了一些教师的建议，对 1987 年版的《高等数学》进行了重新编写，出版了本教材.

本书并未改变原《高等数学》的框架结构，而是在保持原书特点的基础上对一些具体的内容进行了处理. 目的是在保证教学要求的同时，不但便于教师组织教学，而且使学生比较容易理解接受，从而在知识、能力和素质方面都有较大的提高.

1. 本书在内容的阐述方面进行了推敲，在力求语言简洁明了、通俗易懂的同时，内容的叙述也尽量由浅入深，循序渐进，定理和例题的表述尽可能严谨规范.

2. 本书注重高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的描述，删去了原书中一些繁琐、冗长的推导内容.

3. 本书保持了原教材中例题丰富的特点，在删去一些繁杂和需要特殊技巧的例题的同时，适当补充一些基本的和应用方面的例题.

4. 本书的习题按章配置，既注意基本概念、基本理论和基本方法，又注意加强应用，循序渐进. 习题主要选自上海交通大学数学系 40 余年来不断使用、不断修改的《高等数学习题集》，同时增添了一些新的题目.

5. 本书删除了原书每章后面的附注，原因是这些内容超出教学的要求，学生在本书的学习过程中或学习结束后可根据需要和自己的能力阅读有关参考书获取

这方面的知识.

本书分上、下两册，上册内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数；下册内容包括多元函数微积分、微分方程、级数. 本书可作为广大高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或参考书.

参加本书编写工作的有李重华、孙薇荣、景继良、贺才兴教授和王承国副教授，虽然编者在长期《高等数学》教学中积累了不少经验，又先后参加 1987 年版《高等数学》、《高等数学习题集》的编写，但深感编写一本好的《高等数学》教材并非易事，限于水平，书中有不妥之处，敬请专家、同仁和读者批评指正.

编　者

2008 年 4 月于上海交通大学

目　录

8 多元函数的微分法及其应用

前面介绍了一元函数的微积分及其应用. 下面几章要介绍多于一个自变量的函数即所谓多元函数的微积分以及它们的应用. 本章介绍多元函数的微分法及其应用. 在许多方面,多元函数的概念和结论是一元函数相应的概念和结论的直接推广. 但是,需要特别注意的是研究二元函数时,会出现一些在本质上不同于一元函数的特殊的结论,至于一般多元函数的情形则与二元函数相类似,因此本章将较多地研究二元函数.

8.1 多元函数的概念

8.1.1 多元函数的定义

在实际问题中,经常会遇到多于两个变量之间存在着依赖关系. 先观察一些例题.

例 1 设圆柱体的底半径为 r,高为 h,则其体积为

$$V = \pi r^2 h.$$

对于变量 r 和 h 的每一对数值,对应着 V 的一个确定的数值. V 是 r 和 h 的函数.

例 2 设炮筒与水平面的倾角为 α,假定空气阻力不计,则以初速度为 v 发射的炮弹的射程

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

其中 g 是重力加速度.

对于变量 α 和 v 的每一对数值,对应着 s 的一个确定的数值. s 是 α 和 v 的函数.

例 3 理想气体的体积 V 与绝对温度 T 成正比,与压强 p 成反比,故有

$$V = \frac{RT}{p},$$

其中 R 是常数.

对于变量 T 和 p 的每一对数值,对应着 V 的一个确定的数值. V 是 T 和 p 的函数.

例 4 单摆的长度 l、周期 T 和重力加速度 g 三者之间的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

通过对单摆长度 l 及周期 T 的测定，利用上式可求得重力加速度

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

对于变量 l 和 T 的每一对数值，对应着 g 的一个确定的数值. g 是 l 和 T 的函数.

从上面这些例子抽出它们的共性，去掉变量的具体意义，就得到以下二元函数的定义.

定义 设有一平面点集 E①. 如果对于 E 中每一点 $P(x,y)$所对应的一对有次序的数 x、y，根据一个确定的法则 f，有另一个变量 z 的唯一确定的值和它们对应，则称变量 z 为变量 x 和 y 的**二元函数**，或称变量 z 为点 $P(x,y)$的函数，记作

$$z = f(x,y) \quad 或 \quad z = f(P).$$

其中，x、y 称为自变量，z 称为因变量. 点集 E 称为函数的**定义域**. 函数值构成的数集 Z 称为函数 $z=f(x,y)$的**值域**.

当 $x=a$ 及 $y=b$ 时，函数 z 的对应值记为

$$z\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \quad 或 \quad f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \quad 或 \quad f(a,b).$$

如果不考虑函数解析式子中变量所表示的实际意义时，那么它的定义域就由解析式子本身来确定. 在实际问题中函数的定义域还要考虑到变量的具体意义. 一般说来，实际问题的定义域通常比函数解析式的定义域小.

容易把二元函数的定义推广到 **n 元函数**，这只要把平面点集换成 n 维空间的点集. n 维空间是二维空间和三维空间的一种推广与抽象. 把 n 个有序的数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间的点 P 的 n 个(直角)坐标，记作 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

仿照平面及空间直角坐标系中两点之间的距离，n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的距离为

$$d = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

把 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数 u 记作

$$u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad 或 \quad u = f(p).$$

下面再举几个多元函数的例子.

例 5 设三角形的三边为 a、b、c，则其内角 A 可表示为

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

① 这里点集 E 的元素是平面上的点.

这里 $\cos A$ 是三个变量 a、b、c 的函数.

由于 $|\cos A|\leqslant 1$,故应有

$$|b^2+c^2-a^2|\leqslant|2bc|.$$

又因为 a、b、c 为三角形的边长,故 $a>0,b>0,c>0$,于是上式化为

$$-2bc\leqslant b^2+c^2-a^2\leqslant 2bc,$$

由此得 $$a^2\leqslant(b+c)^2 \quad 及 \quad (b-c)^2\leqslant a^2,$$

故得 $$a\leqslant b+c, \quad -a\leqslant b-c\leqslant a,$$

即 $$a\leqslant b+c, \quad b\leqslant c+a \quad c\leqslant a+b,$$

故知 $\cos A$ 的定义域为 $a\leqslant b+c,b\leqslant c+a,c\leqslant a+b$.

例 6 设 n 为正整数,则 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均数

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

是一个 n 元函数,它的定义域为 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$.

可以用不同的符号来表示不同的函数. 例如 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$v=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $w=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示三个不同的 n 元函数.

8.1.2 平面区域的有关概念

二元函数 $z=f(x,y)$的定义域通常是平面上的一个"区域". 而区域的概念又是以邻域、内点、边界点等概念为基础的.

设 $P_0(x_0,y_0)$是平面上一点. 凡满足不等式 $|PP_0|<\delta$ 的点 P 的集合称为 P_0 的 δ **邻域**,用 $U(P_0,\delta)$来表示,即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\|\,PP_0|<\delta\}.$$

不包含点 P_0 在内的邻域称为**去心邻域**,记作

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

用坐标来表示,则为

$$U((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\},$$

$$\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

从几何上看,点 P_0 的 δ 邻域就是以 P_0 为圆心,δ 为半径的圆周内(而不包括圆周本身)的点的全体. 这种邻域称为圆邻域.

设有平面点集 E,又 $P_0\in E$. 如果 $\exists\,\delta>0$,使 $U(P_0,\delta)\subset E$,则称 P_0 是集 E 的一个**内点**.

如果集 E 的每一点都是它的内点,则称 E 为**开集**.

设 P_0 不属于 E,记作 $P_0\overline{\in}E$,如果 $\exists\,\delta>0$,使 $\mathring{U}(P_0,\delta)$不再含有 E 中的点,则称 P_0 为 E 的**外点**.

设 P_0 为平面上一点，$P_0 \in E$ 或 $P_0 \overline{\in} E$. 如果 $\forall \delta > 0$，P_0 的 δ 邻域既含有 E 中的点又含有不属于 E 中的点，则称 P_0 是 E 的**边界点**.

E 的边界点组成的集称为集 E 的**边界**.

例如，设集 E 为

$$E = \{P(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$

则点(0,0)及圆周 $x^2+y^2=1$ 组成了集 E 的边界.

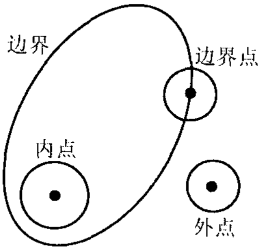


图 8-1

对集 E 的内点、外点、边界点、边界等概念的直观理解如图 8-1 所示.

现在给出区域的定义. 设 E 是一个开集，又 E 的任意两点都可以用有限条直线所组成的折线连接起来，而这条折线全部包含在 E 内，则称 E 为**开区域**，或简称**区域**. 这种可以用全部包含在 E 内的折线把 E 中任意两点连接起来的性质称为**连通性**，因此区域是只含有内点的连通集. 一个区域和它的边界构成的集称为**闭区域**. 例如，集 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 是开区域，又集 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 是闭区域，而由不等式 $xy>0$ 确定的点集就不是区域.

区域通常用 D 来表示，闭区域用 $\overline{D}$ 来表示. 有时，在不需要区分是开域还是闭区域时，仍用 D 表示它们.

如果 $\exists K>0$，使集 E 全部包含在原点的 K 的邻域内，即若 $E \subset U(O,K)$，则称 E 为**有界集**. 当 E 为区域时称为**有界(区)域**；当 E 为闭区域时称为**有界闭(区)域**. 如果不存在这样的正数 K，则称 E 为**无界集**、**无界(区)域**.

一般说来，二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域通常是平面上的一个或几个区域. 这些区域经常是由一条或若干条简单连续曲线所围成的. 设曲线用参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

给出，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 t 的连续函数. 如果又有以下性质：

属于区间 $[a,b]$ 内的任意两个不同的 t 值 t_1 及 t_2，对应着曲线上不同的两个点，则此曲线称为**简单连续曲线**.

例如，椭圆 $x=a\cos t,\ y=b\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，星形线 $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 都是简单连续曲线，但是曲线(称为环索线) $x=a\cos 2t, y=a\cos 2t\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 就不是简单连续曲线，因为当 $t=-\frac{\pi}{4}$ 及 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，对应着同一点 (0,0)(图 8-2). 它的直角坐标方程为

$$y^2 = x^2\,\frac{a-x}{a+x}.$$

对于三维空间以及 n 维空间来说，也有类似于平面上的"邻域、内点、外点、边界点、开集、(开)区域、闭区域、有界域、无界域"等概念.

一般说来，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是空间的一张曲面(图 8－3)，它在 xOy 平面的投影就是函数的定义域.

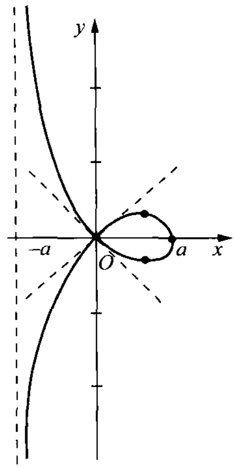


图 8－2

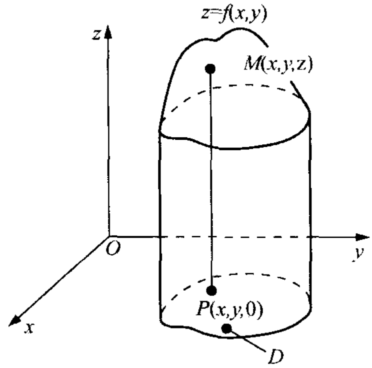


图 8－3

例 7 函数 $z=ax+by+c$(其中 a、b、c 是常数)的图形是不平行于 z 轴的一张平面.

例 8 函数 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$(其中 a、b 是正常数)的图形是顶点在原点，开口向上的椭圆抛物面.

8.2 二元函数的极限与连续

8.2.1 二元函数的极限

所谓二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限，按通俗的讲法，就是当自变量 x 趋于 x_0 和 y 趋于 y_0 时，或者说，当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 趋于定常数 A. 精确地说，设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义(点 P_0 本身可以除外). 如果存在定常数 A，对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，当

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

时，恒有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,或者用逻辑符号表示为

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta):|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时(或 $P\to P_0$ 时)的**(二重)极限**,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \tag{1}$$

或

$$\lim_{p\to p_0}f(P)=A. \tag{2}$$

二元函数 $z=f(x,y)$,当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时的极限为 A 的几何意义是:在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心邻域内的曲面 $z=f(x,y)$ 介于两平面 $z=A-\varepsilon$ 与 $z=A+\varepsilon$ 之间.

例 1 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

证 由于 $\left|\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\left|\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$$\leqslant\frac{|x|^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}<\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(\text{当}|x|<1,|y|<1).$$

因此,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(1,\varepsilon),\forall(x,y):0<x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2<\delta^2$:

$$\left|\sin\frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,$$

故知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

例 2 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=5.$

证 $|x^2+y^2-5|=|(x^2-1)+(y^2-4)|\leqslant|x+1||x-1|+|y+2||y-2|.$

由于 $x\to 1,y\to 2$,故不妨设 $|x-1|<1,|y-2|<1$,从而知 $|x+1|<3,|y+2|<5$,故

$$|x^2+y^2-5|<3|x-1|+5|y-2|<5[|x-1|+|y-2|].$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{10}\right),\forall P(x,y):|x-1|<\delta,|y-2|<\delta,(x,y)\neq(1,2)$:

$|x^2+y^2-5|<\varepsilon,$

由此得 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=5.$

例 3 试问当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 是否有极限?

解 函数 $f(x,y)$ 除点 $(0,0)$ 外都有定义. 考察点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

这个极限与直线的斜率 k 有关，它随着 k 取不同值而改变，因此$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.

从上述例题可知：当点 $P(x,y)$沿着不同的直线趋于点 $P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$有不同的极限，从而断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在. 如果沿着任何方向的直线由 $P(x,y)$趋于 $P_0(x_0,y_0)$时，函数 $f(x,y)$都有相同的极限，那么能否由此断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$必定存在？试看下面的函数：

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

先让点(x,y)沿直线 $y=kx$ 以及直线 $x=0$ 趋于点$(0,0)$，然后再让点(x,y)沿抛物线 $y=x^2$ 趋于点$(0,0)$. 你能得出怎样的结论？

8.2.2 二元函数的连续性

与一元函数的情形一样，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

或写成点函数的形式

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$**连续**，即 $z=f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$处的极限值等于 $f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$处的函数值 $f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$处连续.

倘若要用 $\varepsilon-\delta$ 的术语来描述 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的连续性，那就是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2:$$
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

或 $$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall|PP_0|<\delta:|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon.$$

如果函数在点 P_0 不连续，则称 P_0 为函数的**间断点**. 与一元函数的情形相仿，多元函数也有所谓可去间断点及无穷间断点.

如果函数 $f(x,y)$在区域 D 的每一点连续，则称函数在区域 D 连续. 例如，函数 $\ln(1-x^2-y^2)$在区域 $D:x^2+y^2<1$ 连续，而函数$\sqrt{1-x^2-y^2}$在闭区域 $\overline{D}:x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续.

二元连续函数有与一元连续函数相类似的性质.

定理 1(最大值最小值定理) 设函数 $f(x,y)$在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则它在该区域上至少有一次取得最大值 M 以及最小值 m. 即至少存在一点(ξ_1,η_1)以及一点(ξ_2,η_2)，使

$$m=f(\xi_2,\eta_2);\ f(\xi_1,\eta_1)=M.$$

从这条定理可以推知，如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 $\overline{D}$ 上连续，则它在 $\overline{D}$ 上必定有界. 也就是说，$\exists K>0$，使

$$|f(x,y)|<K,\quad (x,y)\in\overline{D}.$$

定理 2（介值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 $\overline{D}$ 上连续，又若 μ 为介于最小值 m 及最大值 M 之间的任意一个数：$m<\mu<M$，则至少存在一点 $P(\xi,\eta)$，使

$$f(\xi,\eta)=\mu.$$

这条定理的特例是：

设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 连续，又如果存在两点使 $f(x,y)$ 取得异号的值，则 $f(x,y)$ 至少有一次取得零值. 也就是说，$\exists P(\xi,\eta)$，使

$$f(\xi,\eta)=0.$$

注意：这里的区域不一定是有界闭域.

由极限的运算性质可以得出：连续函数的和、差、积、商（分母不为零时）仍为连续函数.

对于多元函数来说也有复合函数的概念.

设 $z=f(u、v、w)$，而 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，$w=w(x,y)$，则称变量 z 通过中间变量 u,v,w 为自变量 x 和 y 的**复合函数**.

仿照一元函数的复合函数的连续性的证明，不难证明多元函数的复合函数的连续性，即连续函数的复合函数仍是连续函数.

与一元函数类似，根据多元函数的和、差、积、商（分母不等于零）以及复合函数的连续性，可以得到：多元初等函数在其定义区域内的任何点都是连续的. 根据这个结论，对于初等函数来说，极限运算和函数符号可以交换次序. 例如，试问：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\ln\left[\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\cos\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right]=?$$

由 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$，推知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$. 又因

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x+y|\,|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2}\leqslant2|x+y|\leqslant2[|x|+|y|],$$

故知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$，于是

$$\text{原式}=\ln\left[\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\cos\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right]$$

$$=\ln[1+\cos0]=\ln2.$$

8.3 偏导数

8.3.1 偏导数概念

设有一定义在区域 D 内的二元函数 $z=f(x,y)$，D 内一点 $P_0(x_0,y_0)$处的函数值 $z_0=f(x_0,y_0)$. 将 y 的值 y_0 固定，然后让 x 得到增量 Δx，点 $P(x_0+\Delta x,y_0)$ 处的函数值为 $z=f(x_0+\Delta x,y_0)$. 称

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变量 x 的**偏增量**，记作

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

类似地，把

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变量 y 的偏增量，记作

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

此外，还有所谓全增量的概念. 如果当 x、y 分别在 x_0，y_0 得到增量 Δx、Δy 时，则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的**全增量**.

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对 x 的**偏导数**，可以用下列符号之一来表示：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)},$$
$$f'_x(x,y)\left.\right|_{(x_0,y_0)},\ z'_x(x_0,y_0),\ f'_x(x_0,y_0).$$

同理，如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对 y 的**偏导数**，相应的符号为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.z'_y\right|_{(x_0,y_0)},$$
$$f'_y(x,y)\left.\right|_{(x_0,y_0)},\ z'_y(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0).$$

当点 $P_0(x_0,y_0)$变动时，就得到函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$的偏导函数. 对

x 及 y 的偏导函数分别用下列符号之一来表示：

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; z'_x, z'_y; f'_x(x,y), f'_y(x,y).$$

在不致发生混淆时，偏导函数简称为偏导数.

有时可把 z'_x，z'_y，$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$符号中的撇号省略而记作 z_x，z_y，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$.

如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的两个偏导数存在，则称函数在该点是**可导**的.

现在来看多元函数与一元函数的一个不同点：对于一元函数来说，可导必定连续；对于多元函数来说，这个结论不再成立. 例如，设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在点(0,0)有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

同理

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0.$$

故函数 $f(x,y)$在点(0,0)的两个偏导数都存在，即函数在该点是可导的. 但是由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在（见 8.2 节例 3），故函数在点(0,0)不连续. 因此可导未必连续.

另一方面，考虑函数

$$f(x,y)=x+|y|.$$

容易证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故函数在点(0,0)连续. 但是$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$，而$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$不存在，故函数在点(0,0)不可导. 因此连续也未必可导.

综合以上结果：对于多元函数而言，偏导数存在，函数未必连续；函数连续，偏导数未必存在.

求多元函数的偏导数实际上就是求一元函数的导数，只要记住把其他的变量看作常数就是了.

例 1 设 $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 及$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-3,4)}$.