全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

Calculus

高等学校经济管理学科数学基础课程系列教材

# 微积分（下册）

主　编　彭年斌　胡清林

副主编　张秋燕　李世伦　秦春燕

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果
高等学校经济管理学科数学基础课程系列教材

# 微 积 分

Weijifen

(下册)

主　编　彭年斌　胡清林
副主编　张秋燕　李世伦　秦春燕

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

## 内容提要

本教材是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。教材根据经济管理类本科数学基础课程教学基本要求和近几年全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲的内容和要求编写而成，以培养和提高学生的数学素养、创新意识、分析和解决实际问题的能力为宗旨，以培养经济管理类应用型人才为主要目标。

本教材力求通俗、直观、简洁、准确，主要内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数。为了培养和提高学生的应用能力和动手能力，在相应章节编写了数学实验和数学建模内容，并借助 Matlab 软件，实现计算机上完成平面和空间曲线、空间曲面的作图，求多元函数的微分，计算二重积分，解微分方程，对函数作近似计算和求无穷级数的和。

本书可作为独立学院、高职高专和成人教育学院本专科经济管理类专业的微积分课程教材或参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分. 下册/彭年斌，胡清林主编. —北京：高等教育出版社，2011.2

ISBN 978-7-04-031418-2

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①彭…②胡…　Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 004041 号

**策划编辑** 兰莹莹　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 赵　阳　**责任绘图** 郝　林
**版式设计** 王艳红　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 张福涛

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| | | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京市白帆印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2011 年 2 月第 1 版 |
| 印　　张 | 15.25 | 印　　次 | 2011 年 2 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 280 000 | 定　　价 | 22.70 元 |



**物料号　31418-00**

# 高等学校经济管理学科数学
# 基础课程系列教材编委会

# 前　　言

微积分是以极限为研究工具，以变量和函数为研究对象，以微分运算和积分运算为主要研究内容的一门学科。它是17世纪由牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）分别独立地创立和奠基的。它开创了数学的新时代，同时作为反映客观世界内在本质规律的科学真理，成为划时代的科学瑰宝。20世纪最杰出的数学家之一冯·诺伊曼(1903—1957，匈牙利人)指出:“微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分。”恩格斯(1820—1895)也曾指出:“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。”

本教材是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。教材根据经济管理类本科数学基础课程教学基本要求和近几年全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲的内容和要求编写而成，以培养和提高学生的数学素养、创新意识、分析和解决实际问题的能力为宗旨，以培养经济管理类应用型人才为主要目标。根据我国高等教育发展的特色，特别关注了三本院校数学基础课程的特点，积累我们历年在大学数学基础课程教学第一线的实践和经验，形成了本教材以下的编写特色：

1. 在教材内容的取舍上，编写的原则是重思路、重方法、重应用、重实践。一般从实际例子引入概念和理论，通过体验产生直觉，从思想方法上引导学生，培养他们直观、通俗、合理的思维能力，不强调严密的逻辑推理；对于基本运算，要求掌握方法、明确步骤、强化练习；在应用和实践中，注意发掘数学模型，满足经济管理中的需要，在数学课堂上创造出操作平台，在动手中得到数学结果。

2. 在教材文体风格上，力求通俗、直观、简洁、准确。尽量采用通俗而准确的语言发掘直观模型和图形，描述问题简洁明确、深入浅出。

3. 本教材尽量适应多层次的教学需求。对使用本教材的教师，使他们有发挥自我教学才能的空间，根据学生实际驾驭教材，做出自己的教学选择；对使用本教材的学生，既有一定的基本要求，又使他们有发挥自我能力的广阔的思维空间。

4. 本教材尝试与数学实验、数学建模有机结合的教学方式，推动传统教学方式与多媒体现代教育技术的融合。在每章后编写了数学实验与数学建模的

有关内容，搭建了数学成为“数学技术”的平台，以加强对学生实践能力的培养。我们以 Matlab(7.0 版)软件为工具，通过操作，可以在计算机上完成平面曲线和空间曲面的描绘、多元函数求偏导数、二重积分、求解简单的微分方程等运算，可以解决一些简单的数学建模问题。暂时还不具备条件进行数学实验、数学建模教学的院校，可以省略这些内容，这不影响本教材的系统性和完整性。

本书由彭年斌、胡清林主编，第七章由张秋燕老师主笔，其中数学实验有关部分由李建军老师编写；第八章至第十章由胡清林老师主笔，其中数学实验有关部分、练习和习题由李世伦、黄玉杰老师编写；第十一章由彭年斌老师主笔，其中数学实验有关部分由秦春艳老师编写。全书由彭年斌老师统稿。由于作者水平所限，教材中难免有错误和不妥之处，请读者不吝赐教，我们表示深切的感谢。

编者

2010 年 9 月于成都

# 目　　录

# 第七章

# 向量代数与空间解析几何

在一元函数微积分的学习中，平面解析几何知识让我们对一元函数有了更为直观的理解．事实上，通过平面直角坐标系可将平面上的点与有序数对、平面上的曲线与代数方程建立一一对应的关系．因此，我们既可以借助于一元函数微积分学来研究平面几何问题，又可从几何的角度更加直观而深刻地理解一元函数微积分学的本质．同样地，为了学习多元函数微积分，本章介绍空间解析几何的知识．

本章首先建立空间直角坐标系，并引入在科学技术上有广泛应用的向量概念，介绍向量的一些运算．从而利用向量工具讨论空间的平面和直线、空间曲面、空间曲线以及二次曲面．

## §7.1　向　　量

### 一、空间直角坐标系

为了用代数方法研究空间几何的问题，首先需要建立空间中的点与有序数组之间的一一对应．如同平面解析几何一样，可以通过空间直角坐标系来实现这种对应．

在空间中，任取定点 $O$，并规定一单位长度，以 $O$ 为原点作三条两两互相垂直的数轴，依次记为 $x$ 轴（横轴）、$y$ 轴（纵轴）、$z$ 轴（竖轴），统称为坐标轴．三条坐标轴的正方向符合右手法则，即用右手握住 $z$ 轴，当右手的四个手指从 $x$ 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 $y$ 轴正向时，大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向，如图 7－1 所示．这样，就构成了一个空间直角坐标系．

点 $O$ 称为坐标原点，三条坐标轴的任意两条确定的平面称为坐标面，分别称为 $xOy$ 面、$yOz$ 面、$zOx$ 面．并且，三个坐标面把空间分成八个部分，每

一部分称为一个卦限．由 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴正向确定的那个卦限称为第一卦限，在 $xOy$ 面上方的另外三个卦限按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限．在 $xOy$ 面下方的四个卦限对应于第一、二、三、四卦限的正下方，分别称为第五、六、七、八卦限．这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 7－2).

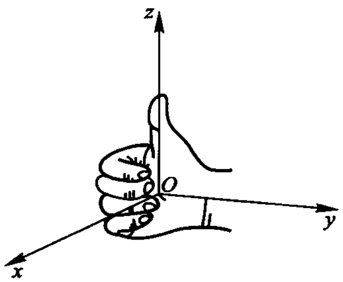


图 7－1

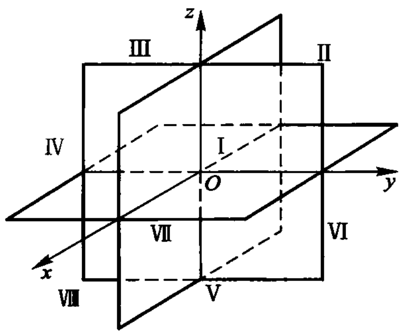


图 7－2

设 $M$ 为空间中的任意一点，过点 $M$ 分别作垂直于 $x$ 轴，$y$ 轴和 $z$ 轴的平面，记这三个平面与 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴的交点分别为 $P$，$Q$，$R$(图 7－3)．这三个点在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的坐标依次为 $x$，$y$，$z$. 于是空间中的点 $M$ 就唯一地确定了有序数组 $x$，$y$，$z$.

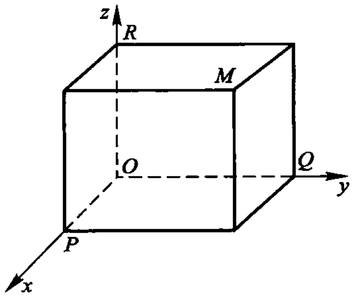


图 7－3

反过来，对于任一有序数组 $x$，$y$，$z$，可在 $x$ 轴上取坐标为 $x$ 的点 $P$，在 $y$ 轴上取坐标为 $y$ 的点 $Q$，在 $z$ 轴上取坐标为 $z$ 的点 $R$，再过点 $P$，$Q$，$R$ 分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴的平面，这三个平面就会交于空间一点 $M$. 这样，一个有序数组又可唯一地确定空间中的一点．

从以上两方面可以看出，空间中的点 $M$ 可与三元有序数组 $x$，$y$，$z$ 建立一

一对应，这个有序数组就称为点 $M$ 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，并依次称 $x$, $y$, $z$ 为点 $M$ 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

特别地，在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, z)$；在坐标面 $xOy$ 面、$yOz$ 面和 $zOx$ 面上的点的坐标分别是 $(x, y, 0)$，$(0, y, z)$，$(x, 0, z)$.

## 二、向量与向量的坐标表示

客观世界中有这样一类量，它们既有大小、又有方向，例如物理学中的位移、速度、加速度、力等，这一类量称为向量.

在数学中，通常用一条有方向的线段、又称有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 $A$ 为起点、$B$ 为终点的有向线段表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$，有时用黑体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 来表示（图 7－4）.

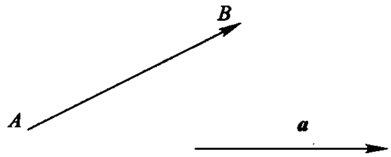


图 7－4

在实际问题中，有的向量与起点无关，而有的向量与起点有关. 数学上只研究前一种，即与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量，简称向量.

由于我们不考虑起点的所在位置，因而对任给空间向量 $\boldsymbol{a}$，可通过平行移动，将其起点移到坐标原点 $O$，设其终点为 $M$，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 确定终点 $M$；反过来，空间中任一点 $M$ 也确定了一个向量 $\overrightarrow{OM}$，也就是空间中的点与向量之间建立了一一对应关系. 点 $M$ 的坐标 $(x, y, z)$ 也称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，它可表示为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(x, y, z)$，这就是向量的坐标表示.

特别地，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 关于原点 $O$ 的向径. 因此，一个点与该点的向径有相同的坐标.

## 三、向量的夹角　向量在定轴上的投影

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角规定为使其中一个向量与另一个向量方向一致时所需要旋转的最小角度，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. 显然 $0 \leqslant (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) \leqslant \pi$.

向量与数轴、数轴与数轴的夹角同样定义.

设点 $O$ 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 $u$ 轴. $M$ 为空间中任意一点，作向量 $\overrightarrow{OM}$，再过

点 $M$ 作与 $u$ 轴垂直的平面交 $u$ 轴于点 $M'$，则 $M'$称为 $M$ 在 $u$ 轴上的投影．向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量$\overrightarrow{OM}$在 $u$ 轴上的分向量(图 7－5)．

有向线段 $OM'$的值称为向量$\overrightarrow{OM}$在 $u$ 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}$或$(\overrightarrow{OM})_u$．

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}=\begin{cases}|\overrightarrow{OM'}|, & \text{当}\overrightarrow{OM'}\text{与 } u \text{ 同向时},\\ -|\overrightarrow{OM'}|, & \text{当}\overrightarrow{OM'}\text{与 } u \text{ 反向时},\end{cases}$$

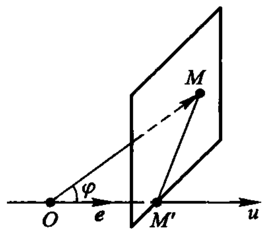

图 7－5

## 四、向量的模与方向余弦

向量的大小称为向量的模．向量$\overrightarrow{AB}$的模等于 $A$，$B$ 两点之间的距离．向量$\overrightarrow{AB}$和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$和$|\boldsymbol{a}|$．特别地，模等于 1 的向量称为单位向量．在空间直角坐标系中，通常将方向与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正方向相同的单位向量记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，并称它们为这一坐标系的基本单位向量．模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$．零向量的方向可看作是任意的，并规定一切零向量都相等．

若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为相等向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．

根据向量在定轴 $u$ 上的投影定义，$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 $\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 $u$ 的夹角．

任一非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$与三条坐标轴的夹角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**(图 7－6)．显然 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$．设 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为$(a_1,a_2,a_3)$，由图 7－6 可知 $a_1$，$a_2$，$a_3$ 分别为有向线段 $M_1P$，$M_1Q$，$M_1R$ 的值，也就是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$分别在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的投影．$a_1\boldsymbol{i}$，$a_2\boldsymbol{j}$，$a_3\boldsymbol{k}$分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的分向量．所以

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|},$$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**．

如图 7－6，$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$．由定义式可看出，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$．从而，向量

$$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\right)$$

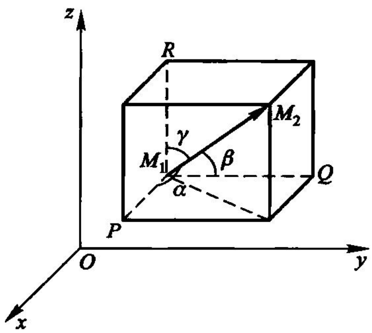


图 7-6

是单位向量，它与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向.

**【例 1】** 已知 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

**【解】** $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$,

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是，方向角分别为 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$；

$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 即是与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

**【例 2】** 一向量的终点在点 $B(2,\ -1,\ 7)$，它在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的投影依次为 4，−4 和 7，求这个向量的起点坐标.

**解** 设起点坐标为 $A(x,\ y,\ z)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,\ -1-y,\ 7-z)=(4,\ -4,\ 7),$$

即

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7.$$

解得起点坐标为 $A(-2,\ 3,\ 0)$.

## 练习 7.1

1. 在空间直角坐标系下，已知点 $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(-1,\ 2,\ 3)$，$C(1,\ -2,\ -3)$，$D(-1,\ -2,\ -3)$.

(1) 指出它们所在的卦限；

(2) 求点 $A$ 关于原点的对称点的坐标、关于坐标面的对称点的坐标、关于坐标轴的对称点的坐标.

2. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 $z$ 轴的直线和平行于 $xOy$ 面的平面，问它们上面的点的坐标各有什么特点？

3. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(1, 2, 3)$ 平行的单位向量.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，如果 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

5. 设向量 $\boldsymbol{m}=(3, 5, 8)$，$\boldsymbol{n}=(2, -4, -7)$ 和 $\boldsymbol{p}=(5, 1, -4)$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 $x$ 轴上的投影及在 $y$ 轴上的分向量.

# §7.2　向量的运算

## 一、向量的线性运算

在研究物体的受力时，作用于一个质点的两个力可以看作两个向量，它们的合力就是以这两个力作为相邻两边的平行四边形的对角线上的向量. 下面要讨论的向量的加法就是对合力这个概念在数学上的抽象和概括.

**1. 向量的加法**

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任意取一定点 $O$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 $OA$，$OB$ 为邻边作平行四边形 $OACB$（图 7－7），则对角线上的向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种方法称为向量加法的平行四边形法则. 向量的加法还可以利用三角形法则得到：以空间任意一点 $O$ 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再以点 $A$ 为起点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，如图 7－8 所示.

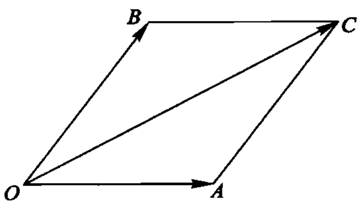


图 7－7

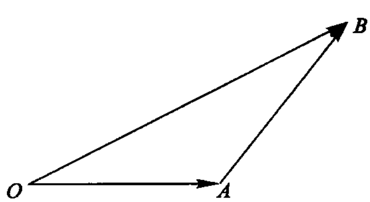


图 7－8

特别地，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或在同一条直线上，则规定它们的和是这样的一个向量：

(1) 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 相同，其模为两向量模之和.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中较长的向量的方向相同，其模为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

容易看出，向量的加法符合下列运算规律：