

數學與頭腦

The Universe and the Teacup
The Mathematics of Truth and Beauty

相遇的地方



大腦有先天的盲點
數學訓練可以幫助我們克服盲點
增進解決問題的能力





科學文化 56A
Science Culture

數學與頭腦相遇的地方

The Universe and the Teacup

The Mathematics of Truth and Beauty

by K. C. Cole

柯爾／著 丘宏義／譯

數學與頭腦相遇的地方

原 著／柯爾

譯 者／丘宏義

策 劃 群／林和（總策劃）、牟中原、李國偉、周成功

系列主編暨責任編輯／林榮崧

封面設計暨美術編輯／江儀玲

出版者／天下遠見出版股份有限公司

創辦人／高希均、王力行

遠見・天下文化・事業群 董事長／高希均

事業群發行人／CEO／王力行

出版事業部總編輯／許繼雲

法律顧問／理律法律事務所陳長文律師

著作權顧問／魏啟翔律師

社 址／台北市104松江路93巷1號2樓

讀者服務專線／（02）2662-0012 傳真／（02）2662-0007 2662-0009

電子信箱／cwpc@cwgv.com.tw

直接郵撥帳號／1326703-6號 天下遠見出版股份有限公司

電腦排版／極翔企業有限公司

製 版 廠／立全電腦印前排版有限公司

印 刷 廠／崇寶彩藝印刷股份有限公司

裝 訂 廠／政春裝訂實業有限公司

登 記 證／局版台業字第2517號

總 經 銷／大和書報圖書股份有限公司 電話／（02）8990-2588

出版日期／2000年6月15日第一版

2009年12月30日第二版第1次印行

定 價／320元

書 號／CS056A

原著書名／The Universe and the Teacup: The Mathematics of Truth and Beauty
by K. C. Cole

Copyright © 1998 by K.C. Cole

Complex Chinese Edition Copyright © 2000, 2009 by Commonwealth Publishing Co., Ltd.,

a member of Commonwealth Publishing Group

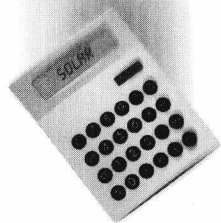
Published by arrangement with Harcourt, Inc.

ALL RIGHTS RESERVED

ISBN: 978-986-216-463-1 (英文版ISBN: 0-15-100328-8)

BOOKZONE 天下文化書坊 <http://www.bookzone.com.tw>

※本書如有缺頁、破損、裝訂錯誤，請寄回本公司調換。



作者簡介

柯爾 (K. C. Cole)

美國南加州大學安納堡傳播學院教授，

《洛杉磯時報》科學專欄作家（1994年迄今），

經常在《紐約客》、《紐約時報》、《新聞週刊》、

《華盛頓郵報》、《哥倫比亞新聞評論》等媒體發表文章。

1995年、2004年、2005年三度獲得「美國最佳科學寫作獎」，

2002年獲得「美國最佳科學與自然寫作獎」。

由於頻頻獲獎，而有「科學寫作界之達文西」的封號。

著有《數學與頭腦相遇的地方》（*The Universe and the Teacup*）、

《物理與頭腦相遇的地方》（*First You Build a Cloud*）等書。

柯爾女士成長於巴西首都里約熱內盧、美國紐約州，

曾在東歐待過數年，早年的寫作焦點在政治評論與女性議題。

1980年代，與舊金山探險博物館（Exploratorium）創辦人

法蘭克·歐本海默（Frank Oppenheimer）成為知交後，

開始對科學產生濃厚興趣，從此鑽研科學，筆耕不輟。

育有一女一子，目前定居在加州聖摩尼卡。

譯者簡介

丘宏義

台灣大學物理系畢業，美國康乃爾大學物理博士。
曾在普林斯頓高等研究院博士後研究二年，
鑽研超新星的形成及中子星的構造，奠定現代中子星理論的基礎。
之後在美國航空暨太空總署（NASA）馬里蘭州高達太空飛行中心
（Goddard Space Flight Center）擔任太空科學家及天文物理學家。

退休後，專事寫作，著有《新封神榜：紂王與妲己》、
《吳大猷：中國物理學之父》，
譯作有《預約新宇宙》、《億萬又億萬》、《抓時間的人》、
《數學與頭腦相遇的地方》、《物理與頭腦相遇的地方》、
《物理學家的靈感抽屜》、《光錐·蛀孔·宇宙弦》、
《宇宙的六個神奇數字》、《量子重力》、
《黃金比例》、《時終》等書。



導 讀

數學和人生問題及哲學

丘宏義

數學已經走進了塵世中的社會學、倫理學、哲學及其他的領域。

人之初，性本善？人之初，性本惡？數學能否解決這問題？

「我最恨數學了，都是數字。」這是一句常聽到的話。可是從來沒有人說過：「我最恨錢了，都是數字。」有這麼一個人的話，可以給他或她一個芝諾獎或墨子獎，獎品是一個代替衣著的木桶及一個麵包袋①。

數字不是壞東西，端看它在哪裡出現。如果在老師發下的習題中有數字，而且很多，那麼——哼的怨聲就出來了。如果在花綠的鈔票或支票上，數字則愈多愈好（假定

沒有通貨膨脹)。

可是每個人都逃不出數字的「魔」掌(這個「魔」是魔力的魔)。你幾歲?今天是什麼日子?老闆給我的薪水有多少?做這一票生意,可以賺多少錢?連印我寫的這篇序的天下遠見出版公司,也要按斤兩計算這序有若干字。要競選的人一定要去問,民意調查給我百分之幾?財政部要問,稅收若干,支出若干,有否赤字?用信用卡的朋友最好要注意一下帳單上的數字。

這些都是冰山浮出水面的一小點而已。數學用到數字,可是它的範疇遠在數字之外。本書第十四章提到的、被譽為本世紀最傑出的抽象代數學家諾塞,她對計算一點都不感到興趣,而且她和這些平平凡凡的計算隔閡之遠,使得人們把她研究的數學稱為「數學神學」(為數學而數學的數學)。她只對廣泛的一般性真理,如不變性、守恆律等之間的邏輯關係有興趣。如果有人向我說,她不能把她的支票帳戶的收支加起來看看損益若干,我一點不會感到奇怪。就像要抽象大畫家畢卡索去畫街頭人像一樣地不行。(其實畢卡索的古典畫藝高極了。)

數學為什麼令人反感?

人為什麼對自己創出的、人的文化中屈指可數的幾個精華之一的數學,這麼起反

感？本書給出幾位專家的原因。一個原因是，人腦是在穴居時、漁獵社會中演化發展出來的。生活裡最重要的是安全及食物。人類進步到了有了農業，開始把剩餘的東西拿去交易時，才開始有數字的觀念。原始生活很簡單，十根手指再加上十根腳趾大約就夠用了。只有一些古怪的人才會去想更大的數目，這些大數目是在手指和腳趾的數目以外的。難怪大數目是違反我們天性的。到了現在，數字已經成為社會中心骨幹的一部分了，可是我們的基因演化得太慢，趕不上。也許這就是許多人不喜歡數字的原因。

可是，人類最不行的還不是數字，而是區別大數字的觀念。如本書所說，「人對大數目不在行」這個習性也許也來自演化過程。請想一下，我們居住的自然環境真的可以說是非常不良的。以光為例，白天的日光比晚上無月時的星光，強度相差了百萬數量級以上的倍數。聲音呢？與在森林中行獵時必須聽辨出的、獵物在落葉上走動時發出的颼颼聲相比，雷聲的強度要大上百萬數量級的倍數。而我們非但能在白天看到東西，而且可以只依賴星光走路②。我們能聽到雷聲，也能聽到極細微的颼颼聲——對穴居、漁獵的人來說，聽不到就要餓肚子了，或變成猛獸的餐食。

沒有一台照相機能照出這麼廣闊光度的景色，沒有一個麥克風能聽錄到這麼廣闊範圍的聲音。可是我們幾乎每一個人都能看到或聽到。這些利器都長在我們身上，多方便，而且不費分文（如果不算父母養育的精力）。

我們之有這個能看到或聽到極強和極弱的光或聲的能力，乃因我們感官的反應是對數型的，即訊號（光或聲）強十倍，我們只覺得強一倍而已。白天的日光和夜晚的星光對我們的感官來說，只差十來倍而已。剛發明電話的時候，貝爾（Alexander. G. Bell, 1847-1922）先生大感吃驚，因為儀表上示出的聲音強度大了十倍，他只覺得大一倍而已。於是貝爾先生後來發明了現在通用的聲音響度的貝爾標度，每一「貝爾」的差為十倍。後來把貝爾再分十，成為分貝。

記得有這麼一個笑話，說紐約林肯中心的音樂廳剛造好的時候，音響效果不良，在某頻率區吸收太強。工程師做的測量是音響效果差了十個分貝（一貝爾）。有一位林肯中心建造委員會的委員（想來不是科學家）建議一個快速的彌補方法：增加演奏家的數目。於是工程師作一計算，樂隊中本來有十來位提琴家，如果要增加十分貝的音響，就必須把這十來位提琴家的數目增加到一百餘位了。

感官的這種對外界訊號的對數式（或指數式、冪數式）反應，對我們及其他動物非常奇妙而合用，幫助我們與其他生物在地球上的「不良環境」中生存及演化。可是，唉，有一利必有一弊。如本書第二章所說的，就因為如此，我們對大數目的感受實在不行。舉例來說，每個人都有錢不夠用的感覺，可是如果給你十倍的錢，毫無疑問的，你更能支配應用——你要一件新衣、一輛新車，搬去一幢更理想的屋子等等。可是給了一

百倍，就有點不知所措了——吃的方面花的有限（吃太多會變胖，就要減肥，更糟），在住的上面能花的也有限，去買遊艇等花的錢也有限，正當旅遊玩樂用的也有限（色情場所及賭場例外）。原因很簡單，每一個人每天除了睡覺以外，只有十來小時的時間去享受，時間不夠。給了一千倍，就乾脆放在銀行算了。

大數字的迷思

在一九六〇年代，一位經濟學家巴金生（C. N. Parkinson, 1909-1993）寫了一本叫做《巴金生定律》的諷刺書，就提到這一點。書中寫一家英國大公司要投很大的資金（六〇年代的億級美元）去造一座核能發電廠，可是只花了五分鐘時間去討論。沒有一個人知道一億元到底是什麼，能做多少事。可是在討論去造一座員工停自行車的車庫時，只需要花上數千元，就討論了三小時之久，因為每個人都知道數千元的意義，知道如何去花。巴金生定律之一就是，錢數愈大，花在討論怎樣去使用的時間愈少。

我們對複利的計算很清楚，叫「以利滾利」。可是我們對與自己生死交關的類似問題（以人滾人）卻如無睹③。我們人類最嚴重的未來問題就是人口問題，一切其他問題如環境污染，都隨人口問題而來。如果台北的人口少了三倍，變成一百萬上下，街上交通就不會擁擠，空氣會好得很多。可是如果再加一倍，就不堪設想了。

本書中以細菌的增殖為例。每隔一分鐘菌口加倍。到它們住的可樂瓶已有四分之一滿的時候，只需再過兩分鐘，衆細菌的數目就要多到無立足之地了（如果這些細菌有足的話）。可是，細菌中的政客向細菌群衆拍拍胸脯保證，沒有菌（人）煙的空地還很多，儘管去生下一代可愛的細菌好了。可以想像到，如果細菌有宗教的話，它們的宗教領袖可能借用細菌先知留下的聖言，說節育菌口是違反天命的，也許還會拍拍胸脯說，細菌的上帝一定不會讓虔誠的細菌子民受苦難的。

現在世界上每年人口增殖率為百分之一點八，在四十年內就要增一倍到一百億人。細菌的一代是一分鐘，每一代菌口增一倍。我們人類大約二十五年為一代，人口增殖率是每一點六代增一倍。因此我們人類比書中說的細菌好不了多少。（是否人類的政客及宗教領袖也像假想中細菌的領袖一樣，拍拍胸脯保證呢？）按照這增殖率，到公元五〇〇〇年左右，人的總質量將超過地球的質量。當然遠在這個時間以前，自然界自會有「修理」人類的方法。顯而易見的，最好自己克制，不要讓自然界來「修理」我們。

幾個誤用統計的例子

不談這個未來可能發生的人類悲劇了。談談統計。統計是數學界最偉大的發明之一，整個保險業就建在統計學上，整個國家的經濟也以統計為基礎。可是統計數字也是

說謊話的最佳工具之一。本書提到好幾個誤用統計的問題，其中一個是在美國最敏感的黑人、白人智力差別的問題，就是愚智問題。在中國及台灣，種族不太成問題，因為第一，現代的中國及台灣沒有種族問題（所謂的台籍和大陸籍都是人爲的），所謂的蠻族（異族人）和漢人已經混到不知誰是誰了。第二，歷史上的敵人，而且是死敵，屠殺漢人的死敵，如五胡、金人、遼人、蒙古人、滿人等，都早已和漢人大批通婚，已經到了幾乎無法追溯祖先是哪族人的程度。

可是在美國，因為歷史上的歧視④，幾乎一直都有人去研究黑人、白人之間的智力差別問題。按本書及引用到的各作者的說法，這些研究都毫無科學上的價值。首先，要問：黑人的定義是什麼？幾乎所有美國的黑人都有些白人的血統。但是在美國，一旦染上了一點一滴黑人的血統，這人就立即被分類成黑人。是否黑人的種族真是這麼差，差到只要一碰，就如神話中的點金術一樣，立刻變愚呢？

如果黑人真有這麼厲害，那麼從基因一定可以看出來⑤。可是所有的基因研究都無法把黑人的基因和白人的基因明確區別出來，因此仍無法給黑白種族下定義。而且，如本書所指出的，這種拿一個團體和另一個團體比較的統計方法很容易犯錯，原因是，一個團體中個別成員的差異遠大於團體與團體間的差異。

進一步說，如果接受上述不正確的關於黑人種族的定義，黑人智商鐘形曲線的高峰

點的確比白人的要小百分之十到十五（亞裔人的智商鐘形曲線顯然比白人的又要高百分之十左右）。可是如本書作者指出的，即使按這個鐘形曲線，還有百萬又百萬的黑人的智商比百萬又百萬的白人的智商高。那該怎麼說？

本書指出，所有關於種族智商的統計都沒有考慮到後天的教育因素。我舉下例：在美國的亞裔中，以中國人居多。而中國文化有重視學術的傳統，一般家庭寧可自己省吃儉用，也要把子女教好。又補習、又買電腦、又去找好學區去居住。如有餘錢，又學鋼琴、小提琴等益智的技藝。再有多餘的錢，還把子女送去最好的私立學校。而黑人受經濟壓迫，買不起電腦，生育子女太多，環境中犯罪的人太多，沒有尊崇學術的傳統。這些都是決定智商的後天重要因素，可是在這些統計中都沒有考慮進去。

這僅是本書所說的，統計數字錯誤應用的例子之一而已。

誠如英國十九世紀的名宰相狄斯瑞立（Benjamin Disraeli, 1804-1881）所說的，「有謊話，極端惡毒的謊話，及統計數字。」法國革命時代的女傑羅蘭夫人（Jeanne Roland, 1754-1793）被革命黨送上斷頭台之前，說：「哦，自由，多少罪惡假汝之名而行。」我們也可以說：「哦，偉大的統計數字啊！能假借你說出多麼美妙而令人置信的謊話呀！」

量變引發質變

還有一個是數學領域以前還沒有觸及的問題，可是現在才開始。這就是量與質的問題。目前數學的應用大多是處理量的問題。我們用了電腦去處理很多的數據。可是，是不是量與質有關係？這個關係往往是數學看不出的（至少現在還不行）。一百元和十萬元之間，除了多買些東西之外，還有什麼其他不同的特性？可是在物理中，已有不少量把質改變的例子。一百磅煤炭和一噸煤炭之間，除了數量之外，就沒有什麼區別。可是用來做核反應爐燃料或核彈原料的鈾二三五或鈾就不然了。這二者有一個叫做臨界質量的數值，如果輻射鈾或鈾的數量不夠多，就不能起鏈式反應（連鎖反應）：核反應不能進行，核彈不能爆炸。一定要有足夠的量，才能在質方面有很大的變化。

這種臨界質量的觀念也可以應用在科學研究上。為什麼早期台灣的物理及天文研究不夠水準？難道那些研究人員真的水準不夠嗎？可是一等到人數夠了，超過某不知數量的「臨界質量」，研究的鏈式反應就出現了。世界上各高等學府對這一點很明瞭。一座大學中的研究人員一定要多到某個程度，研究才會有成果。這就是中國人常講到的學術風氣。非一人唱獨角戲可提倡的。

這就是本書中說的「多帶來不同」。從數學及物理立場來看，就是非線性問題。普

通的問題都是線性的，即一塊錢可以買一塊錢的東西，兩塊錢買兩塊錢的東西。這是線性問題，果與因成直線比例。可是如果錢多到可以把製造東西的工廠買下來，就到了非線性的領域——果與因不成比例。就這方面說來，在社會學領域的研究工作才剛開始而已。也許這種才在起步的非線性因果關係，將是這個新世紀最重要的社會學工具之一。

本書還講了一個令人驚奇、還無法瞭解的社會學實例。紐約城的犯罪率本來是全球最高的。每一個去紐約的人都受到警告，要小心。可是，突然間，犯罪率急降，從美國的第一把交椅降到第一百三十六。是否賊和強盜都關進監牢中去呢？監牢中的人數並未激增。可是犯罪率急降卻是事實。有社會學家建議，也許這和水變成冰的相變（phase transition）很類似：從攝氏一度到負一度之間，溫度只減了兩度，可是水卻結成冰了。如果開始時，水的溫度是三〇度；把它放在冰箱中，耗了不少電，讓它的溫度降了二十九度，使水溫為攝氏一度，可是什麼也沒有發生。然後，把水溫再降兩度。奇蹟發生了，水結成冰。

是否犯罪率也是如此？左抓賊，右捕強盜，愈抓愈捕愈多。可是，捕抓了一大陣子後，賊和強盜突然都不見了。是什麼原因？絕不是強盜和賊都抓光了。也許準強盜或賊都不敢去犯案了，也許覺得找事賺錢還容易些，也許……誰知道？社會學家把這現象稱為「轉捩點」。可是到現在還沒有人能瞭解為何如此。（這類非線性問題很難瞭解。水

結成冰的物理原理在十數年前才發現，發現者還得到了諾貝爾獎。）很顯然，轉捩點是一個非線性問題。如果我們瞭解造成轉捩點的原因，也許很多社會問題都能迎刃而解。

數學在政治上的功用

數學在政治上的功用遠在民意測驗之上。一般人認為自由選舉是民主的第一步。可是這一步不見得能帶來民主，更不見得能帶來經濟繁榮。前蘇聯，現在的俄羅斯，是一個上好的例子。（但是經濟的繁榮卻往往能帶來民主，台灣就是一個很好的例子。）在西方殖民帝國退出非洲時，幾乎在這些殖民地中都舉行過「自由選舉」。現在呢？沒有一個非洲國家是實行民主政治的。這當然有許多的因素，可是就證明了自由選舉不見得能帶來民主，帶來的卻是一個個中了「選舉」樂透獎的獨裁者。還有，有不同去「做」選舉的方式，各地方的政客都自有一套。本書第九章談到一個民主投票選擇去看哪一場電影的例子。美國用得最普遍的是傑銳蠟蠅法（gerrymander，第九章注釋^⑩），即把選區劃成不規則形狀，把擁護敵對黨的選民分散，使擁護本黨的選民在選區中能得到最多票。（台灣的選舉當然有不少不可告人的故事，在此不提。）

一般人認為最公平的選舉是以多數票當選。可是美國開國元勳傑克遜（見第九章）把這種選舉稱為「多數統治暴政」。有一個美國人不大提的實例：一七七六年美國獨立