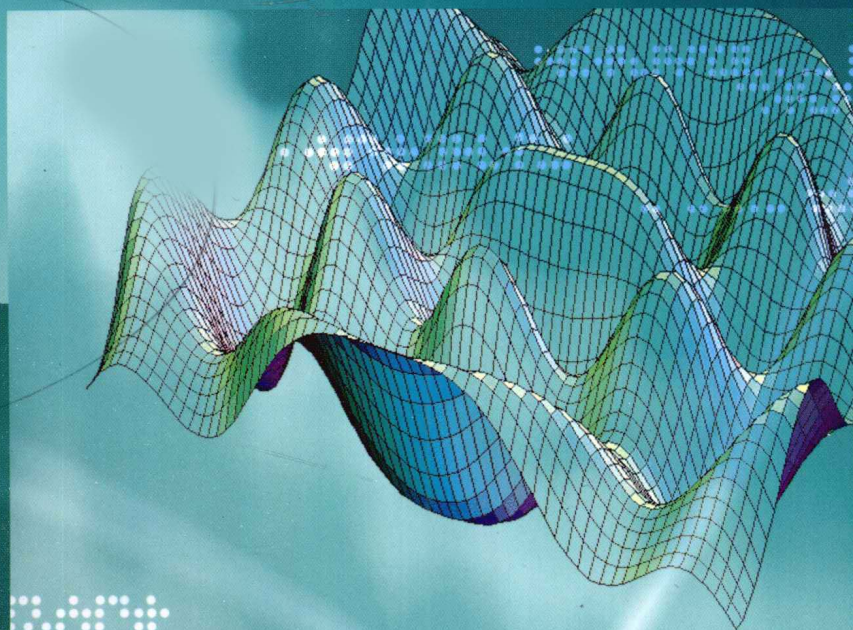




● 普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

小波基础理论 和应用实例

■ 李登峰 杨晓慧 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

小波基础理论和应用实例

Xiaobo Jichu Lilun he Yingyong Shili

李登峰 杨晓慧 编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书主要介绍小波的基础理论和应用实例,由浅入深,通俗易懂。强调小波的应用背景,并给出小波在图像处理中的应用实例,具有较强的可操作性和移植性。考虑到部分读者在学习小波理论可能会遇到的知识缺陷,选择性地补充了内积空间、Fourier 级数和 Fourier 变换等相关知识。另外,本书结合小波发展的新趋势,在最后一章适当介绍了多尺度几何分析工具。

本书共分七章,包括基础知识、小波基本理论、Daubechies 小波、双正交小波、几种重要的小波、小波包、小波的发展趋势等。

本书可作为高等学校数学类专业本科高年级小波分析课程的教材,也可作为理工类相关专业研究生的小波分析课程教材,还可供其他科学工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

小波基础理论和应用实例 / 李登峰, 杨晓慧编著. — 北京: 高等教育出版社, 2010. 7

ISBN 978-7-04-029202-2

I. ①小… II. ①李… ②杨… III. ①小波分析 - 高等学校 - 教材 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 054883 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landracom.com http://www.landracom.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京丰源印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2010 年 7 月第 1 版
印 张	10.75	印 次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	200 000	定 价	16.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29202-00

前 言

小波分析是 20 世纪 80 年代形成的一个迅速发展的数学分支,它同时具有理论背景深刻和工程应用广泛的双重意义。小波分析是在 Fourier 分析基础上发展起来的,但它与 Fourier 分析存在着极大不同。小波变换与 Fourier 变换、加窗 Fourier 变换相比,它是一个自适应的时间和频率的局部变换,具有良好的时-频定位特性和多分辨能力。因而它能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算对信号进行多尺度细化分析,解决了 Fourier 变换不能解决的某些困难问题。所以小波分析被誉为“数学显微镜”,它是 Fourier 分析发展史上里程碑式的进展。

随着小波理论与应用的不断发展,其理论成果和应用范围遍及众多学科和领域,所以投身于小波分析研究及应用的人员越来越多,成为众多学科共同关注的焦点和有力的应用工具之一,从而学习和掌握小波分析理论和方法成为许多大学生、研究生和科技工作者的愿望。因此,国内外许多高等院校和研究机构为相关专业的研究生和高年级本科生相继开设了“小波分析”课程,致使国内外出版了许多介绍“小波与应用”的专著和教本。这些书籍各有侧重点且特色鲜明。我们多年来一直从事小波分析及应用的研究和教学,本书就是在作者多年讲授“小波分析”课程的讲稿上整理而成。具体讲,第一作者负责制定编著大纲,提出编著要求并撰写第一章、第二章、第三章、第四章、第五章和第六章的理论内容;第二作者撰写了各章应用举例和第七章的内容;最后由第一作者通撰定稿。

本书主要介绍小波的基本理论。但应用是小波分析发展的原动力,因此为了凸现小波的应用潜力,本书也有意识地给出了小波在图像处理中的应用实例,具有很强的可操作性和移植性。要理解和掌握好小波分析的基本理论,需要泛函分析和 Fourier 分析等相关基础知识。考虑到非数学专业出身的读者在学习小波理论时可能遇到的障碍,我们有选择性地撰写了内积空间、Fourier 级数和 Fourier 变换等相关知识。这些构成了第一章的内容。本书的核心部分为第二章至第六章。第二章介绍连续小波变换、多尺度分析、Mallat 分解与重建算法和小波构造等;第三章阐述 Daubechies 小波的构造、Daubechies 小波的性质等;第四章讲述双正交小波的定义、双正交小波的构造和双正交小波的分解与重建算法等;第五章给出几种重要的小波,包括 Meyer 小波、样条小波和局部余弦、局部正弦小波等;第六章讲解正交小波包和双正交小波包等。为了展示小波的发展活力,我们在最后一章简要介绍了脊波 (Ridgelets)、曲线波 (Curvelets)、轮廓波

(Contourlets)、条带波 (Bandelets)、楔形波 (Wedgelets)、桁条波 (Beamlets)、梳状波 (Brushlets)、方向波 (Directionlets) 和剪切波 (Shearlets) 等高维函数表示工具 (也称多尺度几何分析工具)。

在撰写本书过程中,我们注意做到:第一,以最精简的形式介绍掌握小波所需的知识。由于这些知识分散在实分析、泛函分析等内容中,对于学习和研究小波的人员来说,不好在短时间内了解和掌握,所以我们用一章的篇幅讲述这些内容。这些内容并不是学习小波必须要掌握的,也不是容易掌握的。之所以这样做就是为帮助小波学习者在以后进行理论研究或实际应用时查找和阅读资料变得容易。第二,在讲述小波分析的基本理论时,尽可能做到由浅入深和通俗易懂,特别注意直观理解和严密处理相结合。第三,适当注意小波的应用背景,在保持小波基本数学思想和来源的前提下,对某些关键或难理解的内容,从工程角度给出了形象和比较好的描述。第四,紧密跟踪当前小波的发展趋势,对称之为后小波时代的多尺度几何分析工具给以简略介绍,展现小波的发展方向和发展潜力。

本书在编写过程中参阅了国内外相关书籍、杂志和网络资源,并得到了高等教育出版社张长虹编辑的大力帮助,以及国家自然科学基金 (No. 10671062, No. 60802061)、河南省杰出青年基金 (No. 084100510012) 和河南省教育厅自然科学基金 (No. 2008B510001) 等资助,在此一并表示衷心感谢!

受作者学识所限,书中难免存在不妥和错漏之处,诚恳期望读者和专家批评指正!

作 者

2010 年 3 月

目 录

第一章 基础知识	1
§1.1 内积空间	1
§1.2 Fourier 级数	14
§1.3 Fourier 变换	25
§1.4 离散 Fourier 变换	31
§1.5 Z 变换	34
第二章 小波基础理论	39
§2.1 连续小波变换	39
§2.2 正交多尺度分析	46
§2.3 Mallat 分解与重建算法	56
§2.4 由滤波器构造小波	59
习题二	64
第三章 Daubechies 小波	66
§3.1 Daubechies 小波的构造	66
§3.2 Daubechies 小波的性质	73
§3.3 Daubechies 小波的应用举例	80
习题三	90
第四章 双正交小波	92
§4.1 双正交小波的定义	92
§4.2 双正交小波的构造	93
§4.3 双正交小波的分解与重建算法	101
§4.4 双正交小波的应用举例	102
习题四	111
第五章 几种重要的小波	112
§5.1 Meyer 小波	112
§5.2 Battle-Lemarié 小波	115

§5.3 局部余弦、正弦小波	120
习题五	129
第六章 小波包	130
§6.1 正交小波包的定义及性质	130
§6.2 小波包分解及重建算法	133
§6.3 双正交小波包	135
§6.4 小波包的应用举例	137
习题六	143
第七章 小波的发展趋势	144
§7.1 脊波 (Ridgelets)	145
§7.2 曲线波 (Curvelets)	148
§7.3 轮廓波 (Contourlets)	149
§7.4 条带波 (Bandelets)	152
§7.5 楔形波 (Wedgelets)	155
§7.6 桁条波 (Beamlets)	157
§7.7 梳状波 (Brushlets)	158
§7.8 方向波 (Directionlets)	159
§7.9 剪切波 (Shearlets)	160
§7.10 小结	161
参考文献	163

第一章 基础知识

本章给出全书所用到的基础知识, 包括内积空间、Fourier 级数、Fourier 变换、离散 Fourier 变换、Z 变换等五部分内容.

§1.1 内积空间

1.1.1 背景

熟知, $\mathbf{R}^3$ 中两个向量 $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ 的标准 (欧氏) 内积为

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

这个定义是由向量的长度定义推广而来的. 向量 $\mathbf{V}$ 的长度为

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle},$$

这里暂时用 $|\cdot|$ 表示向量的长度. 本节就是基于上述思想在一般向量空间上定义内积空间.

1.1.2 内积和内积空间的定义

$\mathbf{R}^3$ 中内积的定义以自然方式完全可推广到 $\mathbf{R}^n$ 上. $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ 的欧氏内积为

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle = \sum_{j=1}^n v_j u_j.$$

我们也将用到复指数 e^{ix} , 因此必须考虑复向量空间. $\mathbf{R}^n$ 上的内积概念可通过对第二个因子加共轭推广到 $\mathbf{C}^n$ 上, 即对 $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}^n$,

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \bar{u}_j. \quad (1.1.1)$$

显然, 共轭的目的是保证 $\mathbf{C}^n$ 中向量长度非负:

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n v_j \bar{v}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |v_j|^2}.$$

上述内积还具有某些性质, 例如, 它是双线性的, 即

$$\langle \mathbf{U} + \mathbf{V}, \mathbf{W} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{W} \rangle + \langle \mathbf{V}, \mathbf{W} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} + \mathbf{W} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{U}, \mathbf{W} \rangle.$$

它拥有的其他性质列在下面定义中作为公理. 容易验证, $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中内积满足这些公理.

定义 1.1.1 设 E 为复向量空间. E 上的内积是一个函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbf{C}$ 满足下列性质:

(a) 非负性: $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;

(b) 共轭对称性: $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(c) 齐性: $\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbf{C}, \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

(d) 线性: $\forall x, y, z \in E, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

具有一个内积的向量空间称为内积空间. 有时为了强调所考虑的空间 E , 其上内积用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ 来表示.

由性质 (b) 和 (d) 容易推出, $\forall x, y, z \in E, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$. 由性质 (b) 和 (c) 推得, $\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbf{C}, \langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$. 非负性意味着可定义 $x \in E$ 的长度或称范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. 据此可定义 E 中两个元素 x, y 的距离 $\|x - y\|$. 距离的引入导致点列 $\{x_k | k = 1, 2, \dots\} \subset E$ 收敛的定义: 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x\| = 0$, 则称 $\{x_k | k = 1, 2, \dots\}$ 收敛于 x , 记作 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ 或 $x_k \rightarrow x (k \rightarrow +\infty)$.

两个内积空间的例子.

例 1.1.1 已知 $\mathbf{C}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbf{C}\}$ 有欧氏内积式 (1.1.1). 现在再定义: $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2$,

$$\langle x, y \rangle = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathbf{C}^2$ 上一个内积. 该例子表明, 同一个向量空间上可以定义不同的内积. 对于式 (1.1.2), 只要矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ 换成任何正定 Hermitian 阵 A ($A^T = A$ 且正定) 均可.

例 1.1.2 定义集合 $l^2(\mathbf{Z}) = \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbf{Z}} | x_n \in \mathbf{C}, \sum_{n \in \mathbf{Z}} |x_n|^2 < \infty\}$, 这里 $\mathbf{Z}$ 为整数集合. $l^2(\mathbf{Z})$ 依通常数列的相加和数与数列相乘构成线性空间. $\forall x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in l^2(\mathbf{Z})$, 定义

$$\langle x, y \rangle_{l^2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n \bar{y}_n, \quad (1.1.3)$$

则 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2}$ 为 $l^2(\mathbf{Z})$ 上的内积 (习题 1.1-1).

1.1.3 空间 L^2 和 l^2

例 1.1.2 中的空间 l^2 是一个无限维内积空间, 它对信号分析很有用. 一个信号 (例如, 一个声音信号) 可看成是一个函数 $f(t)$. $f(t)$ 表示信号在时间 t 处的强弱, t 在信号变化的区间 $[a, b]$ 内取值, 其中 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$. 因此引入下面定义:

定义 1.1.2 空间 $L^2([a, b])$ 为区间 $[a, b]$ 上所有平方可积函数 $f(t)$ 组成, 即

$$L^2([a, b]) = \{f(t) \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

说明 1.1.1 空间 $L^2([a, b])$ 中函数可以是不连续的, 积分可以理解为 Riemann 意义下的积分. 由于 $L^2([a, b])$ 中不连续函数拥有相当大的比例, 所以积分一般理解为 Lebesgue 积分. 条件 $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ 意味着信号的总能量是有限的.

空间 $L^2([a, b])$ 是无限维的. 例如, 如果 $a = 0, b = 1$, 那么 $\{1, t, t^2, \dots\} (\subset L^2([0, 1]))$ 是线性无关的. 不在空间 $L^2([0, 1])$ 中的一个例子是 $f(t) = \frac{1}{t}$.

为了导出 $L^2([a, b])$ 上的内积, 我们先对区间 $[a, b]$ 离散化. 不失一般性, 令 $a = 0, b = 1, N$ 为充分大的正整数, $t_k = \frac{k}{N}$ ($1 \leq k \leq N$). 如果 $f(t)$ 是连续函数, 那么区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的函数值 $f(t)$ 可以由 $f(t_j)$ 来逼近. 这样, $f(t)$ 可由下列向量来逼近:

$$f_N = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)) \in \mathbf{R}^N.$$

如图 1.1 所示.

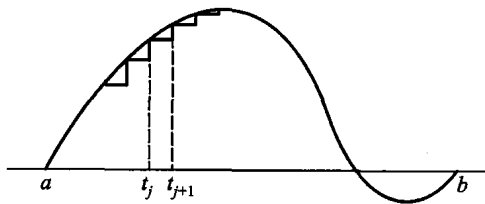


图 1.1 逼近示意图

当 N 变得越来越大时, f_N 就为 f 的最佳逼近. 如果 f, g 为 $L^2([0, 1])$ 中两个信号, 那么可与上述一样离散化得 f_N 和 g_N . $\langle f, g \rangle_{L^2}$ 的定义可能选择为当 N

充分大时, f_N 和 g_N 的欧氏内积

$$\langle f_N, g_N \rangle_{\mathbf{R}^N} = \sum_{k=1}^N f(t_k) \bar{g}(t_k) = \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) \bar{g}\left(\frac{k}{N}\right). \quad (1.1.4)$$

明显地, 当 N 变到较大时, 式 (1.1.4) 中右边之和可能也较大, 收敛性问题就发生了. 为避免该问题, 较好的选择就是考虑平均内积:

$$\frac{1}{N} \langle f_N, g_N \rangle_{\mathbf{R}^N} = \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) \bar{g}\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N}. \quad (1.1.5)$$

注意到 N 变到较大时, f_N 和 g_N 分别逼近 f 和 g . 所以 $\langle f, g \rangle_{L^2}$ 的合理定义应该为式 (1.1.5) 中 $N \rightarrow +\infty$ 时的极限. 容易看出, 式 (1.1.5) 可写为

$$\frac{1}{N} \langle f_N, g_N \rangle_{\mathbf{R}^N} = \sum_{k=1}^N f(t_k) \bar{g}(t_k) \Delta t, \quad \Delta t = \frac{1}{N}.$$

上式右边之和是逼近 $\int_0^1 f(t) \bar{g}(t) dt$ 的 Riemann 和, 相应 $[0, 1]$ 上的剖分为 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$. 当 N 越来越大时, 逼近也越来越好. 因此空间 $L^2([0, 1])$ 上内积的合理定义为

$$\langle f, g \rangle_{L^2([0, 1])} = \int_0^1 f(t) \bar{g}(t) dt.$$

这个思想刺激我们给出 $L^2([a, b])$ 上内积定义.

定义 1.1.3 $L^2([a, b])$ 上内积为

$$\langle f, g \rangle_{L^2([a, b])} = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt, \quad f(t), g(t) \in L^2([a, b]).$$

这个定义满足定义 1.1.1 中的四个条件. 尤其注意非负性的验证需要涉及 $L^2([a, b])$ 上两个函数相等的理解: $f(t), g(t) \in L^2([a, b]), f(t) = g(t)$ 意味着 $f(t)$ 几乎处处等于 $g(t)$ ($t \in [a, b]$).

对许多应用来说, 信号是离散的, 可用一个序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 来表示它. 实际上, 离散信号通常在某些时刻后就消失了, 这在数学上表示为存在正整数 N , 当 $|k| > N$ 时, $x_k = 0$. 例 1.1.2 给出了 L^2 的离散类似物, 即 l^2 .

1.1.4 Schwarz 不等式, 三角不等式

内积空间的两个最重要性质就是 Schwarz 不等式和三角不等式.

Schwarz 不等式: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 这个不等式是容易验证的:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \cos \theta \leq \|x\| \|y\|,$$

其中 θ 是向量 $x, y \in \mathbf{R}^3$ 的夹角.

三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 这个不等式表示两点间的最短距离是连接两点的线段.

一般内积空间也具有 Schwarz 不等式和三角不等式.

定理 1.1.1 假设 E 为内积空间, 其上内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (以后不再表明这一点, 一般从上、下文可判断其内积的具体意义). 那么 $\forall x, y \in E$ 有

(a) Schwarz 不等式: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, 且等式成立的充要条件为 x 与 y 线性相关. 更进一步, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ 的充要条件为 x 或 y 是另一个的非负数倍.

(b) 三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 且等式成立的充要条件为 x 或 y 是另一个的非负数倍.

证明 (a) 假设 E 为实内积空间. 若 $x = y = 0$, 则结论自然成立. 因此可假设 $y \neq 0$. 令 t 是一个实数, 考虑下面不等式:

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2. \quad (1.1.6)$$

式 (1.1.6) 右边是关于 t 的一个非负一元二次多项式, 因此它不能有两个不相等的实根, 从而其判别式 $= 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. 这立即推出 Schwarz 不等式.

如果 $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, 则 $\langle x, y \rangle = \pm \|x\| \|y\|$. 若 $\langle x, y \rangle = -\|x\| \|y\|$, 那么可用 $-y$ 来代表 y . 因此仅考虑 $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$. 此时式 (1.1.6) 的判别式等于 0, 这推得方程 $\|x - ty\|^2 = 0$. 所以 $\|x - ty\|^2 = 0$ 有两个相等实根, 记为 t_0 , 即 $x = t_0 y$. 进一步推出 $\langle x, y \rangle = t_0 \|y\|^2$. 由于 $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \geq 0$, 所以 $t_0 \geq 0$. 这说明 x 是 y 的非负数倍.

反过来, 如果 $x = t_0 y (t_0 \geq 0)$, 则 $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$.

假设 E 为复内积空间, $x, y \in E$. 令 ϑ 为复数 $\langle x, y \rangle$ 的辐角, 则

$$\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\vartheta}. \quad (1.1.7)$$

对任意实数 t , 考虑

$$0 \leq \|e^{-i\vartheta} x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\{te^{-i\vartheta}\langle x, y \rangle\} + t^2\|y\|^2, \quad (1.1.8)$$

这里 Re 表示复数的实部. 由式 (1.1.7) 和式 (1.1.8) 知,

$$\|x\|^2 - 2t|\langle x, y \rangle| + t^2\|y\|^2 \geq 0. \quad (1.1.9)$$

式 (1.1.9) 与式 (1.1.6) 类似, 余下证明完全与实内积空间情形类同.

(b) 三角不等式的证明来自 Schwarz 不等式.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \quad (1.1.10)$$

由式 (1.1.10) 立即得三角不等式. 显然, 从式 (1.1.10) 知, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 的充要条件为 $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$. 而 $\|x\|\|y\| \geq |\langle x, y \rangle| \geq |\operatorname{Re}\langle x, y \rangle|$, 所以 $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$. 由 (a) 知, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 的充要条件为 x 或 y 是另一个的非负数倍. 定理 1.1.1 证毕.

1.1.5 正交性

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 两个向量 x 和 y 正交的充要条件为它们的夹角 $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. 但由 $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos \vartheta$ 知, $\langle x, y \rangle = 0$. 因此我们有

定义 1.1.4 假设 E 是内积空间, $x, y \in E$, $\{e_k\}_{k=1}^K \subset E$, K 可以是 $+\infty$, E_1, E_2 为 E 的子空间.

(a) 如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记作 $x \perp y$.

(b) 如果 $\forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ 有 $x_1 \perp x_2$, 则称 E_1 与 E_2 正交, 记作 $E_1 \perp E_2$. 特别, 当 $E_1 = \{x_1\}$ 时, 记作 $x_1 \perp E_2$.

(c) 如果 $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 1, \dots, K)$, 则称 $\{e_k\}_{k=1}^K$ 为 E 的标准正交系.

例 1.1.3 $\mathbf{R}^2$ 中向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ 与向量 $(3, 1)$ 正交.

例 1.1.4 设 $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, 则 $f(t), g(t) \in L^2([-\pi, \pi])$ 且 $\langle f, g \rangle = 0$. 由于 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = \pi$, 所以 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}f(t), \frac{1}{\sqrt{\pi}}g(t)\right\}$, 即 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t\right\}$ 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中是标准正交系. 在第二节中可看到 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt \mid n = \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ 是 $L^2([-\pi, \pi])$ 的标准正交系, 这将对讨论 Fourier 级数起着重要作用.

例 1.1.5 设 $\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t = 1, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & t = 1. \end{cases}$ 显然 $\phi(t),$

$\psi(t) \in L^2([0, 1])$ 且 $\langle \phi, \psi \rangle = 0$. 在第二章中将看到, $\phi(t), \psi(t)$ 分别是 Haar 系中的尺度函数和小波函数.

定理 1.1.2 假设 E_0 为内积空间 E 的一个子空间, $\{e_1, \dots, e_K\}$ 是 E_0 的一个标准正交基, 那么对 $e \in E_0$ 有

$$e = \sum_{k=1}^K \langle e, e_k \rangle e_k. \quad (1.1.11)$$

证明 由于 $\{e_1, \dots, e_K\}$ 是 E_0 的标准正交基, 所以对 $e \in E_0$ 有

$$e = \sum_{k=1}^K c_k e_k, \quad (1.1.12)$$

其中 c_k 为系数. 在式 (1.1.12) 两边用 e_s ($1 \leq s \leq K$) 去做内积得

$$\langle e, e_s \rangle = \sum_{k=1}^K c_k \langle e_k, e_s \rangle = \sum_{k=1}^K c_k \delta_{k,s} = c_s.$$

因此式 (1.1.12) 正是式 (1.1.11). 定理 1.1.2 证毕.

1.1.6 正交投影

假设 $\{e_1, \dots, e_K\}$ 是内积空间 E 的标准正交系. 由定理 1.1.2 知, 如果 $e \in \text{span}\{e_1, \dots, e_K\}$, 则

$$e = \sum_{k=1}^K \alpha_k e_k, \quad (1.1.13)$$

其中 $\alpha_k = \langle e, e_k \rangle$. 如果 $e \notin \text{span}\{e_1, \dots, e_K\}$, 那么式 (1.1.13) 的解 α_k 不可能存在. 在这种情况下, 我们可找出 $e_0 \in \text{span}\{e_1, \dots, e_K\}$ 使得 e_0 在 E 中距离意义下尽可能逼近 e . 一般地, 假设 E_0 为内积空间 E 的子空间, $e \in E$, 但 $e \notin E_0$, 如图 1.2 所示.

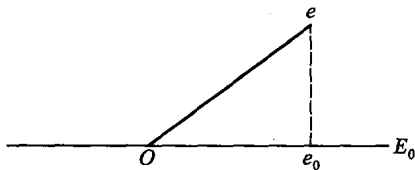


图 1.2 正交投影

如何决定 $e_0 \in E_0$ 尽可能逼近 e 呢? e_0 冠以特殊名称, 如下列定义:

定义 1.1.5 假设 E_0 为内积空间 E 的一个有限维子空间, $e \in E$, 那么 e 向 E_0 上的正交投影定义为满足 $d = \|e - e_0\| = \min_{f \in E_0} \|e - f\|$ 且属于 E_0 的 e_0 .

说明 1.1.2 定义 1.1.5 中 e_0 存在且唯一 (习题 1.1-3). e_0 也称为 e 在 E_0 中的最佳逼近元, d 称为 e 到 E_0 的距离.

图 1.2 表明, e 在 E_0 中的最佳逼近元一定是使 $(e - e_0)$ 垂直于 E_0 的元 e_0 . 对于内积空间 $\mathbf{R}^3$ 或 $\mathbf{R}^2$, 图 1.2 是容易给出的. 但对一般内积空间, 图 1.2 是不太容易给出的, 可有下列结论.

定理 1.1.3 假设 E_0 为内积空间 E 的一个有限维子空间, $e \in E$, 那么 e 向 E_0 上的正交投影 e_0 满足 $\forall f \in E_0, \langle e - e_0, f \rangle = 0$.

证明 $\forall f \in E_0$, 考虑函数

$$F(t) = \|e_0 + tf - e\|^2, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1.1.14)$$

由于 e_0 是 e 在 E_0 上的正交投影, 所以 e_0 是 E_0 中元到 e 的距离最小的元, 也即 $F(t)$ 在 $t = 0$ 点取得最小值. 为简单, 考虑实内积空间 (复的同样处理). 式 (1.1.14) 可写为

$$F(t) = \|e_0 - e\|^2 + 2t\langle e_0 - e, f \rangle + t^2\|f\|^2.$$

因为 $F(t)$ 在 $t = 0$ 点取得最小值, 所以 $F'(0) = 0$. 而

$$F'(t) = 2\langle e_0 - e, f \rangle + 2t\|f\|^2,$$

因此 $0 = F'(0) = 2\langle e_0 - e, f \rangle$, 即 $\langle e - e_0, f \rangle = 0$. 定理 1.1.3 证毕.

说明 1.1.3 定理 1.1.3 的逆也正确 (习题 1.1-4).

如果 E_0 有标准正交基 $\{e_1, \dots, e_K\}$, 那么任意元 $e \in E$ 在 E_0 上的正交投影 e_0 是容易计算的, 见下列定理:

定理 1.1.4 假设 E_0 为内积空间 E 的一个有限维子空间, $\{e_1, \dots, e_K\}$ 为 E_0 的标准正交基, 那么任意元 $e \in E$ 在 E_0 上正交投影 e_0 为

$$e_0 = \sum_{k=1}^K \langle e, e_k \rangle e_k. \quad (1.1.15)$$

证明 由说明 1.1.3 知, 仅需证 $\langle e - e_0, f \rangle = 0$, 其中 $f \in E_0$, e_0 为式 (1.1.15) 所表示. 然而 $\{e_1, \dots, e_K\}$ 为 E_0 的标准正交基, 所以又仅需证 $\langle e - e_0, e_k \rangle = 0 (k = 1, \dots, K)$ 即可.

事实上,

$$\langle e - e_0, e_k \rangle = \left\langle e - \sum_{s=1}^K \langle e, e_s \rangle e_s, e_k \right\rangle = \langle e, e_k \rangle - \sum_{s=1}^K \langle e, e_s \rangle \delta_{s,k} = 0.$$

所以定理 1.1.4 证毕.

说明 1.1.4 当 $e \in E_0$ 时, e 在 E_0 上的正交投影就为其本身, 其表示式 (1.1.15) 正好与定理 1.1.2 的结论相同.

例 1.1.6 设 $E_0 \subset L^2([-\pi, \pi])$ 且 $E_0 = \text{span}\{\cos x, \sin x\}$. 在例 1.1.4 中已表明, $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$ 和 $e_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t$ 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中标准正交. $f(t) = t \in L^2([-\pi, \pi])$, 则 $f(t)$ 在 E_0 上的正交投影为

$$f_0(t) = \langle f, e_1 \rangle e_1(t) + \langle f, e_2 \rangle e_2(t).$$

由于 $\langle f, e_1 \rangle = 0$, 所以

$$f_0(t) = \langle f, e_2 \rangle e_2(t) = 2 \sin t.$$

例 1.1.7 设 $\phi(t), \psi(t)$ 为例 1.1.5 中的函数, $E_0 = \text{span}\{\phi(t), \psi(t)\} \subset L^2([0, 1])$. 显然, $\{\phi(t), \psi(t)\}$ 为 E_0 的标准正交基. 令 $g(t) = t^2 \in L^2([0, 1])$, 则 $g(t)$ 在 E_0 的正交投影为

$$g_0(t) = \langle g, \phi \rangle \phi(t) + \langle g, \psi \rangle \psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \frac{7}{12}, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

正交于给定子空间的元素所组成的集合赋有特殊的名称, 如下列定义:

定义 1.1.6 假设 E_0 为内积空间 E 的一个子空间, E_0 的正交补 $E_0^\perp$ 定义为

$$E_0^\perp = \{e \in E \mid \langle e, e_0 \rangle = 0, \forall e_0 \in E_0\}.$$

说明 1.1.5 $E_0^\perp$ 是 E 的一个子空间 (习题 1.1-5).

定理 1.1.5 假设 E_0 为内积空间 E 的一个有限维子空间, 那么 $\forall e \in E$, e 可唯一地表示成 $e = e_0 + e_1$, 其中 $e_0 \in E_0, e_1 \in E_0^\perp$, 即

$$E = E_0 \oplus E_0^\perp.$$

证明 令 e_0 为 e 在 E_0 上的正交投影, $e_1 = e - e_0$, 则

$$e = e_0 + (e - e_0) = e_0 + e_1.$$

由定理 1.1.3 知, e_1 正交于 E_0 中任一元, 因此 $e_1 \in E_0^\perp$. 定理 1.1.5 证毕.

说明 1.1.6 定理 1.1.5 对某些无限维子空间 E_0 也成立 (见参考文献 [1]).

1.1.7 Gram-Schmidt 正交化

从定理 1.1.2 和定理 1.1.4 可看出, 一个子空间具有标准正交基将是十分重要的. 如果没有标准正交基, 子空间上正交投影的计算将是较困难的. 那么如何从一个基得到标准正交基呢? Gram-Schmidt 正交化过程给出了这个问题的答案.

定理 1.1.6 假设 E_0 为内积空间 E 的一个有限维子空间, $\{f_1, \dots, f_K\}$ 为 E_0 的一个基. 那么存在 E_0 的标准正交基 $\{e_1, \dots, e_K\}$ 使得 $e_k (k=1, \dots, K)$ 为 $f_1, \dots, f_K$ 的线性组合.

证明 令 $g_1 = f_1$, 则选择 $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$.

令 $g_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$, 则 $\langle g_2, e_1 \rangle = 0$ 且 $g_2 \neq 0$ (否则 f_1 与 f_2 线性相关). 选择 $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$. 这样, e_1 与 e_2 相互正交且 e_1 为 f_1 的数倍, e_2 为 f_1 和 f_2 的线性组合.

对 $k > 2$, 重复进行上述过程得

$$\begin{aligned} g_3 &= f_3 - \sum_{j=1}^2 \langle f_3, e_j \rangle e_j, & e_3 &= \frac{g_3}{\|g_3\|}, \\ g_4 &= f_4 - \sum_{j=1}^3 \langle f_4, e_j \rangle e_j, & e_4 &= \frac{g_4}{\|g_4\|}, \\ & \vdots \\ g_K &= f_K - \sum_{j=1}^{K-1} \langle f_K, e_j \rangle e_j, & e_K &= \frac{g_K}{\|g_K\|}. \end{aligned}$$

这样, $\{e_1, \dots, e_K\}$ 为 E_0 的标准正交基且 $e_k (k=1, \dots, K)$ 为 $f_1, \dots, f_K$ 的线性组合. 定理 1.1.6 证毕.

1.1.8 线性算子及它的共轭算子

首先列出定义如下:

定义 1.1.7 设 E_1, E_2 为两个向量空间, $T: E_1 \rightarrow E_2$ 为映射. 如果对 $e_1 \in E_1, e_2 \in E_1$ 及对 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ 有

$$T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 T e_1 + \alpha_2 T e_2, \quad (1.1.16)$$

则称 T 为从 E_1 到 E_2 中的线性算子.

如果 E_1, E_2 均为有限维向量空间, 则线性算子 $T: E_1 \rightarrow E_2$ 可用矩阵来表示. 设 $\{e_1^1, \dots, e_1^n\}$ 为 E_1 的基, $\{e_2^1, \dots, e_2^m\}$ 为 E_2 的基, 那么 $T e_1^k (1 \leq k \leq n)$