

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写

适合各种版本教材

点击专项

新课标

点击
专项

DIANJIZHUANXIAN

主编：李永哲

高中数学

直线与圆 算法初步

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击 专项

DIANJIZHUANXIAN

本册主编：张 伟
编 委：徐丽媛
于黎春
孙嘉佳
刘晓菲
王雪晶
赵传娟
刘金国
李业英
曹艳菊

刘洪忠
尹微微
王春花
高 琨
徐 蝶
兰俊义
张 有
杜雪瑛

腾 飞
张玉梅
郑明琴
刘德广
张 欣
杨秀杰
石成合
周广文

高中数学

直线与圆 算法初步

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·直线与圆、算法初步/李永哲主编.

—延吉:延边大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5634-2825-0

I. 点… II. 李… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130276 号

点击专项·高中数学·直线与圆、算法初步

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号 邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail: ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435 传真:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001 传真:0433-2733266

印刷:大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880×1230 1/32

印张:12.875 字数:223 千字

印数:1—12000

版次:2010 年 3 月第 1 版

印次:2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-2825-0

定价:21.00 元



前言 Foreword

在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识都有自己的特点。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求,编写了本书《点击专项——高中数学 直线与圆 算法初步》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢,并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成:

知识归纳

将直线与圆 算法初步的知识和规律进行总结和归纳,将其主要规律呈示出来,使学生们在学习中能最短的时间内掌握本章节的内容。

典型例题及训练题

本版块分为例题和训练题两部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容,对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。





提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练,不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容,而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇的题难度很大,但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的,因此,这些题是本章节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练,能够对本章节的内容有个明晰的认识。

参考答案

全书给出了标准答案,有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容,从而达到点击专项的目的。



目 录 Contents

第一章 直线与方程(必修2、必修3)	1
1.1 直线的倾斜角与斜率	2
1.1.1 倾斜角与斜率	2
1.1.2 两条直线平行与垂直的判定	20
1.2 直线的方程	37
1.2.1 直线的点斜式方程	37
1.2.2 直线的两点式方程	56
1.2.3 直线的一般式方程	56
1.3 直线的交点坐标与距离公式	80
1.3.1 两条直线的交点坐标	80
1.3.2 两点间的距离	80
1.3.3 点到直线的距离	103
1.3.4 两条平行直线间的距离	103
本章专题	125
专题1 倾斜角与斜率问题	125
专题2 直线方程的五种形式之间的关系	128
专题3 直线的平行与垂直	133
专题4 距离问题	137
专题5 对称问题	141
专题6 直线中的最值问题	143
第二章 圆与方程(必修2、必修3)	153
2.1 圆的方程	154
2.1.1 圆的标准方程	154
2.1.2 圆的一般方程	173



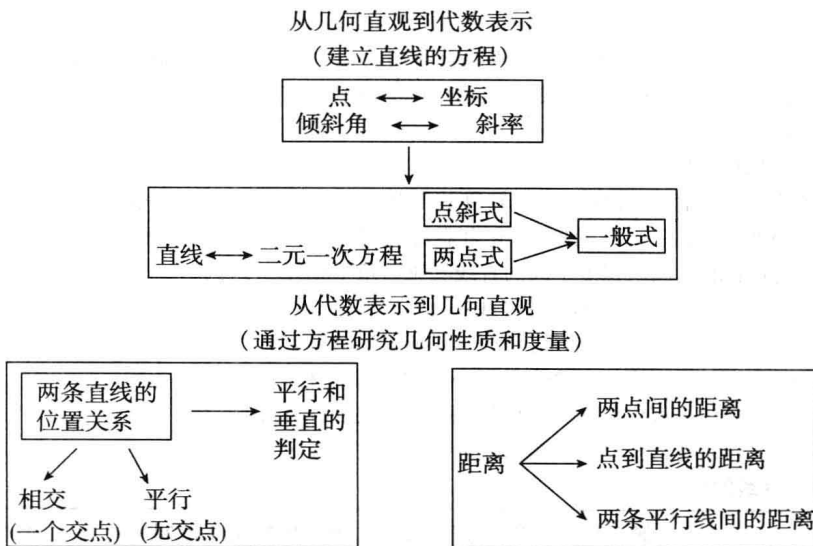


2.2 直线、圆的位置关系	199
2.2.1 直线与圆的位置关系	199
2.2.2 圆与圆的位置关系	225
2.2.3 直线与圆的方程的应用	245
第三章 算法初步(必修2、必修3)	272
3.1 算法与程序框图	273
3.1.1 算法的概念	273
3.1.2 程序框图与算法的基本逻辑结构	294
3.2 基本算法语句	324
3.2.1 输入语句、输出语句、赋值语句	324
3.2.2 条件结构	324
3.2.3 循环语句	355
3.3 算法案例	387



第一章 直线与方程

一、本章知识框图



二、内容和课程学习目标

1. 在平面直角坐标系中,结合具体图形,探索确定直线位置的几何要素.
2. 理解直线的倾斜角和斜率的概念,经历用代数方法刻画直线斜率的过程,掌握过两点的直线斜率的计算公式.
3. 能根据斜率判定两条直线平行或垂直.
4. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式),体会斜截式与一次函数的关系.
5. 能用解方程组的方法求两直线的交点坐标.
6. 探索并掌握两点间的距离公式,点到直线的距离公式,会求两条平行直线间的距离.





1.1 直线的倾斜角与斜率

1.1.1 倾斜角与斜率

一、知识归纳

1. 直线的倾斜角

(1) 定义: 一条与 x 轴相交的直线 l , 我们取 x 轴作为基准, x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角. 一条直线与 x 轴平行或重合时, 规定它的倾斜角为 0° .

(2) 取值范围: $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$

说明: (1) 由倾斜角定义可以知道平面内任何一条直线都有唯一的倾斜角.

(2) 倾斜角是一个几何概念, 它直观反映了直线的倾斜程度, 倾斜程度相同的直线其倾斜角相等, 倾斜程度不同的直线其倾斜角不相等.

(3) 四种特殊倾斜角对应的直线:

① $\alpha = 0^\circ$ 时, 直线与 x 轴重合或平行 (或 y 轴垂直);

② $\alpha = 90^\circ$ 时, 直线与 x 轴垂直 (与 y 轴重合或平行);

③ $\alpha = 45^\circ$ 时, 直线与一、三象限角平分线重合或平行;

④ $\alpha = 135^\circ$ 时, 直线与二、四象限角平分线重合或平行.

2. 直线的斜率

(1) 定义	倾斜角不是 90° 的直线, 它的倾斜角的正切值叫做这条直线的斜率, 记为 k , 即 $k = \tan \alpha$
(2) 过两点的直线的斜率公式	直线经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 其斜率 $b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$

说明: (1) 斜率公式表明直线的倾斜程度, 可以通过直线上任意两点的坐标表示, 比使用几何的方法求出倾斜角再求斜率的方法方便.

(2) 斜率公式与两点的顺序无关, 即两 y 坐标和 x 坐标在公式中的次序可以同时调换, 就是说, 如果分子是 $y_2 - y_1$, 分母必须是 $x_2 - x_1$; 反过来, 如果分子是 $y_1 - y_2$, 分母必须是 $x_1 - x_2$.

(3) 如果 $y_2 = y_1, x_2 \neq x_1$, 则直线与 x 轴平行或重合, $k = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$; 如果 $y_2 \neq y_1, x_2 = x_1$, 则直线与 x 轴垂直, 倾斜角等于 90° , k 不存在.

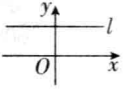
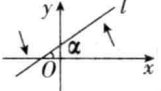
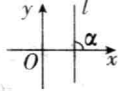
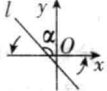


特别提醒:(1)对于倾斜角为 90° 的直线,即与 x 轴垂直的直线,斜率不存在,它的倾斜程度不能用斜率来刻画.

(2)斜率公式适用于已知两点的 x 坐标不等的情形,当两点的 x 坐标相同时,直线斜率不存在,所以当已知两点的坐标中含有字母时,应注意分类讨论(即分 x 坐标等与不等两种情况).

(3)可用斜率公式求直线的斜率及由斜率判断倾斜角的取值范围,或逆用公式通过赋值法确定直线经过的某个定点,然后由两点确定一条直线.

3. 直线的倾斜角与斜率之间的变化规律

直线情形				
α 的大小	0°	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
k 的范围	0	$k > 0$	k 不存在	$k < 0$
k 的增减情况		k 随 α 的变大而变大		k 随 α 的变大而变大

4. 直线倾斜角与斜率的联系与区别

(1)直线的斜率与倾斜角是刻画直线位置状态的两种基本量.决定了这条直线相对于 x 轴的倾斜程度.

(2)平面内的任何一条直线都有倾斜角,但不是所有直线都有斜率.因此,直线的倾斜角与其斜率之间不是一一对应的关系.它们有着本质的区别,直线的倾斜角是一个角,属几何概念;而斜率是一个实数,是代数概念,用斜率来刻画直线的方向符合解析思想(即用代数方法研究几何问题的思想).

二、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

一、已知倾斜角,求斜率

例1 已知下列直线的倾斜角,求直线的斜率.

(1) $\alpha = 45^\circ$ (2) $\alpha = 60^\circ$ (3) $\alpha = 120^\circ$ (4) $\alpha = 150^\circ$

分析:根据斜率定义, $k = \tan \alpha$.

解:(1) $\because \alpha = 45^\circ, \therefore k = \tan 45^\circ = 1$



$$(2) \because \alpha = 60^\circ, \therefore k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$(3) \because \alpha = 120^\circ, \therefore k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$(4) \because \alpha = 150^\circ, \therefore k = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

点评

本例主要考查直线斜率的定义. 要熟记特殊角的正切值.

例 2 已知直线 l_1 的倾斜角为 30° , 直线 $l_2 \perp l_1$, 求直线 l_2 的斜率.

分析: 求出 l_2 的倾斜角, 即可求出 l_2 的斜率.

解: 如图 1.1-1, $\because l_1$ 倾斜角为 30° , 又 $l_2 \perp l_1$,

$\therefore l_2$ 的倾斜角为 120° .

$$\therefore k_2 = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}.$$

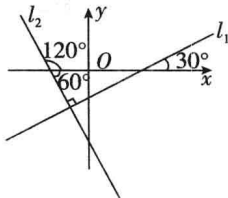


图 1.1-1

点评

关键是清楚倾斜角的定义, 找准倾斜角, 利用斜率定义就可求出斜率.

二、已知直线上两点, 求直线斜率

例 3 求经过下列两点的直线的斜率.

$$(1) A(18, 8) \quad B(4, -4) \quad (2) C(0, 0) \quad D(-1, \sqrt{3})$$

分析: 利用过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2$ 的直线斜率公式: $k =$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{解: } (1) k_{AB} = \frac{-4-8}{4-18} = \frac{6}{7} \quad (2) k_{CD} = \frac{\sqrt{3}-0}{-1-0} = -\sqrt{3}$$

点评

熟记过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. 注意坐

标顺序.

三、斜率公式: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 的应用

例 4 已知过两点 $A(-m, 6), B(1, 3m)$ 的直线的斜率是 $-\frac{2}{3}$, 求 m 的值.

分析: 由斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, 建立有关 m 的方程, 解方程就可求得 m 的值.



解:由已知有 $k_{AB} = -\frac{2}{3}$, 即 $\frac{3m-6}{1+m} = -\frac{2}{3}$, 解得 $m = \frac{16}{11}$.

例5 设 P 为 x 轴上一点, $A(-3, 8)$, $B(2, 14)$, 若 PA 的斜率是 PB 的斜率的两倍, 求 P 点坐标.

分析:利用斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, 建立 P 的坐标方程, 从而求出 P 点坐标.

解:设 P 点坐标为 $(x, 0)$, 由已知有 $k_{PA} = 2k_{PB}$, 由斜率公式有: $\frac{8-0}{-3-x} = 2 \times \frac{14-0}{2-x}$

解得 $x = -5$, $\therefore P$ 的坐标为 $(-5, 0)$

点评

例4、例5主要考查已知两点坐标的直线的斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ($x_1 \neq x_2$). 熟练掌握公式是解题的关键.

四、由直线斜率, 求直线倾斜角

例6 已知 a, b, c 是两两不等的实数, 求经过下列两点的直线的倾斜角.

(1) $A(a, c)$ $B(b, c)$

(2) $C(a, b)$ $D(b, a)$

(3) $E(b, b+c)$ $F(a, c+a)$

分析:先求斜率, 再求倾斜角.

解:(1) $k_{AB} = \frac{c-c}{b-a} = 0$, $\therefore$ 倾斜角 $\alpha = 0^\circ$

(2) $k_{CD} = \frac{a-b}{b-a} = -1$, $\therefore$ 倾斜角 $\beta = 135^\circ$

(3) $k_{EF} = \frac{(c+a) - (b+c)}{a-b} = 1$, $\therefore$ 倾斜角 $\theta = 45^\circ$

点评

要求倾斜角, 考虑到倾斜角的正切值就是直线的斜率, 所以要先求出直线的斜率, 从而问题求解思路便清楚了.

例7 已知 $M(2m+3, m)$, $N(m-2, 1)$. 问:

(1) 当 m 为何值时, 直线 MN 的倾斜角为锐角?

(2) 当 m 为何值时, 直线 MN 的倾斜角为钝角?

(3) 当 m 为何值时, 直线 MN 的倾斜角为直角?

分析:倾斜角的范围决定着斜率的符号, 反之也一样.

解:(1) 当 $k_{MN} > 0$ 时, 直线 MN 的倾斜角为锐角.



$\therefore \frac{1-m}{(m-2)-(2m+3)} > 0, \frac{1-m}{-m-5} > 0, (m-1)(m+5) > 0$, 解得 $m > 1$ 或 $m < -5$

$\therefore$ 当 $m > 1$ 或 $m < -5$ 时, 直线 MN 的倾斜角为锐角.

(2) 同理, 当 $k_{MN} < 0$ 即 $-5 < m < 1$ 时, 直线 MN 的倾斜角为钝角

(3) 直线 MN 的倾斜角是直角, 则直线 MN 的斜率不存在

故应用点 M 与 N 的横坐标相等.

即 $2m+3=m-2$, 解得 $m=-5$

当 $m=-5$ 时, 直线 MN 的倾斜角为直角.

点评

注意直线的倾斜角的范围与直线斜率的关系.

例 8 求直线 $x\cos\alpha + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围.

分析: 由直线方程求出直线斜率, 再由斜率范围求倾斜角的范围.

解: 设倾斜角为 θ , 则 $k = \tan\theta$,

直线 $x\cos\alpha + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 可变形为 $y = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right)x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore k = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$,

$\therefore -1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

又 $0 \leq \theta < \pi$, $\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi \leq \theta < \pi$

即倾斜角 θ 的取值范围 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$

点评

熟记斜率公式 $k = \tan\alpha$ 及倾角 α 的范围 $[0, \pi)$.

五、三点共线问题

例 9 已知 $A(1, 2), B(-1, 0), C(3, 4)$ 三点, 这三点是否在同一条直线上? 为什么?

分析: 如果直线 AB, AC 的斜率相同, 那么这三点在同一直线上.

解: 由斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 \neq x_1)$

有: $k_{AB} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$ $k_{AC} = \frac{4-2}{3-1} = 1$

$\therefore k_{AB} = k_{AC}$

$\therefore$ 直线 AB 与 AC 的倾斜角相等, 又直线 AB 与 AC 有一公共点 A

$\therefore A, B, C$ 三点在同一条直线上



点评

两条有1个公共点的直线,若斜率相同,则它们为同一条直线,用这种方法证明三点共线很简单.

例10 点 $A(2, -3), B(4, 3), C(5, \frac{k}{2})$ 在同一条直线上,求 k 的值.

分析: A, B, C 三点共线,则 $k_{AB} = k_{AC}$

解: 由斜率公式有 $k_{AB} = \frac{3 - (-3)}{4 - 2} = 3$ $k_{AC} = \frac{\frac{k}{2} - (-3)}{5 - 2} = \frac{\frac{k}{2} + 3}{3}$

由 $k_{AB} = k_{AC}$ 有 $3 = \frac{\frac{k}{2} + 3}{3}, \therefore k = 12$

点评

利用同一直线上,任意不同两点所求得的斜率都相等,列方程便可求 k 的值.

基础训练

- 过点 $P(-2, m), Q(m, 4)$ 的直线的斜率为1,那么 m 的值为 ()
A. 1 B. 4 C. 1 或 3 D. 1 或 4
- 直线 l 过原点 $(0, 0)$, 且不过第三象限,那么 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()
A. $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$ B. $\{\alpha | 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ\}$
C. $\{\alpha | 90^\circ \leq \alpha < 180^\circ \text{ 或 } \alpha = 0^\circ\}$ D. $\{\alpha | 90^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ\}$
- 经过下列两点的直线中,斜率不存在的是 ()
A. $(1, -1), (-3, 2)$ B. $(1, -2), (5, -2)$
C. $(3, 4), (-2, -5)$ D. $(3, 0), (3, \sqrt{3})$
- 若图 1.1-2 中的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 则 ()
A. $k_1 < k_2 < k_3$ B. $k_3 < k_1 < k_2$
C. $k_3 < k_2 < k_1$ D. $k_1 < k_3 < k_2$
- 已知直线 l_1, l_2 的斜率分别是 k_1, k_2 , 倾斜角分别是 α_1, α_2 , 则 ()
A. $k_1 > k_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$ B. $k_1 < k_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$
C. $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow k_1 < k_2$ D. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow k_1 \neq k_2$
- 若过点 $P(1, 1), Q(3, 2a)$ 的直线的倾斜角为钝角,则实数 a 的取值范围是_____.
- 已知点 $A(3, 4)$, 在坐标轴上有一点 B , 若 $k_{AB} = 2$, 则 B 点的坐标为_____.
- 给出以下命题:
①任何一条直线都有唯一的倾斜角;

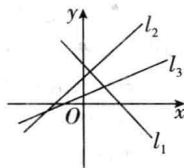


图 1.1-2



②一条直线的倾斜角可以是 -30° ;

③倾斜角为 0° 的直线只有一条,即 x 轴;

④直线倾斜角的集合 $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ\}$ 与直线的集合建立了一一对应的关系.

其中正确命题的序号是_____.

9. 已知点 $M(5,3)$ 和 $N(-3,2)$, 若直线 PM 和 PN 的斜率分别为 2 和 $\frac{7}{4}$, 则点 P 的坐标为_____.

10. 若直线 l 的斜率为函数 $f(a) = a^2 + 4a + 5 (a \in \mathbf{R})$ 的最小值, 求直线 l 的倾斜角 α .

(二) 提高篇

典例分析

类型之一	求直线的倾斜角
思维提示	直线倾斜角的定义

例 1 设直线 l 过坐标原点, 它们的倾斜角为 α , 如果将 l 绕坐标原点按逆时针方向旋转 45° , 得到直线 l_1 , 那么 l_1 的倾斜角为 ()

A. $\alpha + 45^\circ$

B. $\alpha - 135^\circ$

C. $135^\circ - \alpha$

D. 当 $0^\circ \leq \alpha < 135^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha + 45^\circ$; 当 $135^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha - 135^\circ$

分析: 借助直观图形, 用倾斜角的定义求解.

解: 本题考查倾斜角的定义以及应用定义解决问题的能力, 因为 $\alpha \in \{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ\}$, 显然 A、B、C 未分类讨论, 均不全面, 不合题意, 通过画图 (如图 1.1-3) 可知:

当 $0^\circ \leq \alpha < 135^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha + 45^\circ$;

当 $135^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha + 45^\circ - 180^\circ = \alpha - 135^\circ$.

故选 D.

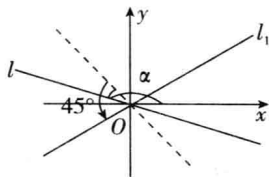
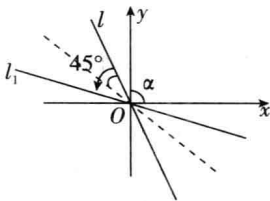


图 1.1-3

答案: D



点评

求直线的倾斜角常用以下两种方法:

- (1) 定义法:其关键是根据题意画出图形,找准倾斜角.
 (2) 分类法:解题时,往往把倾斜角 α 分为四类讨论,即 $\alpha = 0^\circ$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ 及 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

例2 设直线 l_1 与 x 轴的交点为 P ,且倾斜角为 α ,若将其绕点 P 按逆时针方向旋转 45° ,得到直线 l_2 的倾斜角为 $\alpha + 45^\circ$,则 α 的范围是 ()

- A. $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ B. $0^\circ \leq \alpha < 135^\circ$
 C. $0^\circ < \alpha \leq 135^\circ$ D. $0^\circ < \alpha < 135^\circ$

分析: 本题中 α 的范围为 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

解: 由于直线 l_1 与 x 轴相交,可知 $\alpha \neq 0^\circ$,又 α 与 $\alpha + 45^\circ$ 都是直线的倾斜角,

$$\therefore \begin{cases} 0^\circ < \alpha < 180^\circ \\ 0^\circ \leq \alpha + 45^\circ < 180^\circ \end{cases}, \text{解得 } 0^\circ < \alpha < 135^\circ. \text{ 故选 D.}$$

答案: D

点评

解答本题要紧扣直线倾斜角的概念及其取值范围 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$,当直线与 x 轴相交时,直线的倾斜角的顶点是直线与 x 轴的交点,始边是 x 轴的正半轴,终边是直线自交点向上方的射线,此时倾斜角 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$,当直线与 x 轴平行或重合时,直线的倾斜角为 0° ,由本题的已知条件可知 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

类型之二	求直线的斜率
思维提示	利用 $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$) 或斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$)

例3 如图 1.1-4 所示,菱形 $OBCD$ 中, $\angle BOD = 60^\circ$,求菱形各边和对角线 OC 所在直线的倾斜角与斜率.

解: $\because OD \parallel BC$, $\angle BOD = 60^\circ$, $\therefore$ 直线 OD 和 BC 的倾斜角都是 60° ,斜率都是 $\tan 60^\circ$,即 $k_{OD} = k_{BC} = \sqrt{3}$.

$\because OB$ 在 x 轴上, $DC \parallel x$ 轴, $\therefore$ 直线 OB 和 DC 的倾斜角都是 0° ,斜率都是 $\tan 0^\circ$,即 $k_{OB} = k_{DC} = 0$.

根据菱形的性质, $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle OBD = 60^\circ$,

$\therefore$ 直线 OC 的倾斜角为 30° ,斜率 $k_{OC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

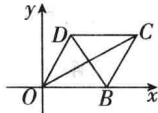


图 1.1-4



点评

要掌握直线倾斜角和斜率的概念,就要理解直线斜率和倾斜角的相互关系,当直角坐标系中的一条直线画出之后,它的倾斜角就是一个确定的值,若倾斜角不是 90° ,其斜率也是一个确定的值.

例4 经过下列两点的直线的斜率是否存在? 如果存在,求出其斜率.

(1) $A(-\sqrt{3}, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

(2) $A(a, a+b), B(c, b+c)$

(3) $A(a, b), B(a, c)$

分析: 用公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 求直线斜率时一定要注意两点横坐标是否相同.

解: (1) $-\sqrt{3} \neq \sqrt{2}, \therefore$ 斜率存在. $\therefore k = \frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{3})}{-\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = -1.$

(2) $\because a \neq c$ (否定了 A, B 点重合为一点), $\therefore$ 斜率存在且 $k = \frac{a+b-(b+c)}{a-c} = 1.$

(3) $\because A, B$ 两点横坐标相同, $\therefore$ 直线斜率不存在.

点评

(1) 斜率公式有两种形式: ①用倾斜角的正切表示; ②用两点的坐标表示, 对于一些特殊角如 $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 等的正切值要熟记.

(2) 若点的坐标中带有参数字母, 要分类讨论, 以免漏解.

类型之三	由斜率求倾斜角
思维提示	熟练掌握斜率与倾斜角之间的关系

例5 (1) 当且仅当 m 为何值时, 经过两点 $A(m, 2), B(-m, 2m-1)$ 的直线的倾斜角是 60° ?

(2) 设 $m > 0$, 斜率为 m 的直线上有两点 $(m, 3), (1, m)$, 求此直线的倾斜角.

解: (1) $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{(2m-1)-2}{-m-m}$, 解得 $m = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}.$

(2) 由斜率公式知, $m = \frac{m-3}{1-m}$, 解得 $m = \pm\sqrt{3},$

又 $\because m > 0, \therefore m = \sqrt{3}, \therefore k = \frac{\sqrt{3}-3}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \therefore$ 此直线的倾斜角为 $60^\circ.$