



高等院校网络教育精品教材
—— 交通运输类

管理运筹学

GUANLI YUNCHOUXUE

主 编 寇玮华 晏 秋
副主编 黄 鉴



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

高等院校网络教育精品教材——交通运输类

管理运筹学

主 编 寇玮华 晏 秋
副主编 黄 鉴
主 审 李宗平

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内 容 简 介

运筹学是一门主要研究有关策划、管理、预测分析等方面问题的学科,随着客观实际的发展,运筹学的许多内容已经深入到日常生活当中。本书所介绍的运筹学内容主要面向网络学院的学生。在编写方面,本书着重介绍运筹学的基础原理和方法,注重培养学生解决实际问题的能力。全书共分为六章,主要内容有:线性规划基础、单纯形法、线性规划模型的建立、对偶问题及对偶单纯形法、运输问题、图与网络。另外,每章后附有作业与练习,便于学生巩固所学知识,有些章节后面有“特别提示”,便于学生牢记易混淆的知识点。

本书是网络学院交通运输专业、管理工程专业的教科书,也可供其他专业的在职学生、成教学生等学习、参考。

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/寇玮华,晏秋主编. —成都:西南交通大学出版社, 2010.10

高等院校网络教育精品教材. 交通运输类

ISBN 978-7-5643-0898-8

I. ①管… II. ①寇… ②晏… III. ①管理学: 运筹学—高等学校—教材 IV. ①C931.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第187211号

高等院校网络教育精品教材——交通运输类

管 理 运 筹 学

主编 寇玮华 晏秋

*

责任编辑 牛君

特邀编辑 周杨

封面设计 墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段111号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 175 mm × 230 mm 印张: 12.125

字数: 217千字

2010年10月第1版 2010年10月第1次印刷

ISBN 978-7-5643-0898-8

定价: 20.80元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

运筹学是近几十年发展起来的一门新兴学科，目前国内诸多有关运筹学的教材多半偏重于数学方法的论证，这种情况不适合网络学院学生的需要。本书是面向网络学院的学生编写的，与以往教材的不同之处在于本书内容集中、表述上力求深入浅出、语言描述通俗易懂、实用性强，使学生能够快速、准确、集中地掌握运筹学的主要内容。书中设计了大量的例题讲解，以利于学生更好地掌握运筹学的基础知识和基本方法。

在编写时，我们根据以往的教学实践，参阅了大量运筹学教材，以注重培养学生运用运筹学的方法分析和解决实际问题的能力为主，力求满足网络学院学生的需要。

本书在介绍运筹学的算法上力求做到简单明了、通俗易懂，以使学生能够轻松、迅速地掌握运筹学中的各种算法和方法。另外，本书中设置了大量的练习题及参考答案，可方便学生及时地对各种算法加深和巩固。

本书编写人员分工：寇玮华（第四章、第六章）、晏秋（第一章、第二章、第三章）、黄鉴（第五章）。

感谢以下硕士研究生在本书的资料收集、整理、编写、校对过程中所做的工作：蔡艳锋（第一章），杨群（第二章），刘杰（第三章），朱雪丽、张聪聪（第四章），吕林剑、董雪（第六章）。

本书由西南交通大学交通运输学院李宗平主审。编写过程中，参阅了部分运筹学教材及文献，在此向有关作者一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请有关专家和读者批评指正，以便后期修正。

编 者

2010 年 6 月

目 录

绪 论	1
第一章 线性规划基础	8
第一节 线性规划问题的提出与模型	9
第二节 线性规划的标准形式	13
第三节 线性规划的图解法	17
第四节 线性规划问题的几何意义	21
本章小结	24
作业与练习	27
第二章 单纯形法	29
第一节 单纯形法	30
第二节 单纯形法的进一步讨论	43
第三节 线性规划问题解的判断	52
本章小结	57
作业与练习	60
第三章 线性规划模型的建立	62
本章小结	69
作业与练习	70
第四章 对偶问题及对偶单纯形法	71
第一节 对偶问题	72
第二节 线性规划问题的对偶问题建立	75
第三节 对偶问题的基本性质	81
第四节 对偶单纯形法	83
本章小结	88
作业与练习	90

第五章 运输问题	92
第一节 运输问题的数学模型	93
第二节 运输问题的表上作业法	96
第三节 产销不平衡的运输问题及其求解方法	109
本章小结	113
作业与练习	121
第六章 图与网络	124
第一节 图与网络的基本概念	125
第二节 最短路问题	128
第三节 最大流问题	135
第四节 最小费用流问题	146
第五节 最小费用最大流问题	153
本章小结	156
作业与练习	161
作业与练习参考答案	163
考试指南	176
参考文献	187

绪 论

一、运筹学的起源

朴素的运筹学思想自古有之：敌我双方交战，要想克敌制胜就必须了解双方情况的基础上，制定出对付敌人的最佳策略，这也就是《孙子兵法》说的知己知彼。从阿基米德为阿太基人设计的用于粉碎罗马海军攻占西那库斯城计划的防御方案，到《梦溪笔谈》中记录的军粮供应与用兵进退的关系等事例无不闪耀着运筹帷幄、整体优化的智慧思想。此外，在人类征服自然、改造自然的过程中，也大量运用了运筹的思想和方法，我国战国时代李冰父子主持修建的由“鱼嘴”岷江分洪工程、“飞沙堰”分洪排沙工程和“宝瓶口”引水工程巧妙结合而成的都江堰水利工程；宋真宗皇宫失火，大臣丁渭提出的一举三得重建皇宫的方案都是很好的例子。

但作为一门学科，运筹学直到 20 世纪才开始出现。第一次世界大战期间，以希尔为首的英国国防部防空试验小组进行了高射炮系统利用研究，同时英国人莫尔斯利用数学模型，对美国海军横跨大西洋护航队损失情况进行了分析，这是最早关于运筹学的研究，其中比较有名的是 1914 年提出的兰彻斯特战斗方案。这些研究在第二次世界大战中有了深入而全面的发展。英国为解决空袭的早期预警，做好反侵略战争准备，积极进行“雷达”的研究。但随着雷达性能的改善和配置数量的增多，出现了来自不同雷达站的信息与雷达站间以至整个防空作战系统的协调配合问题。1938 年 7 月，波得塞雷达站的负责人罗伊提出立即进行整个防空作战系统运行的研究，并用“Operational Research”一词作为这方面研究的描述，这就是 O. R. 这个名词的起源。由于对探测、信息传递、作战指挥、战斗机与防空火力协调等方面的研究获得成功，英国大大提高了本土的防空能力，不久之后在对抗德国对英伦三岛的狂轰滥炸中，该研究发挥了极大的作用。1939—1940 年，该项研究扩展到海军和陆军领域，并开始尝试对未来的战斗进行预测，以供决策之用。鉴于其在战争中发挥的重要作用，1940 年 9 月英国成立了由物理学家布莱克特领导的第一个运筹学小组，后来发

展到每一个英军指挥部都成立运筹学小组。1942 年美国 and 加拿大也相继成立了运筹学小组, 研究并解决战争提出的运筹学课题。这些小组在确定扩建舰队规模、开展反潜艇战的侦察和组织有效的对敌轰炸等方面, 做了大量研究, 为取得反法西斯战争的胜利及运筹学有关分支的建立作出了贡献。其中最出色的工作之一是美国协助英国打破了德国对英吉利海峡的海上封锁。运筹学小组通过研究提出的两条重要建议是: 将反潜攻击由反潜艇投掷水雷改为飞机投掷深水炸弹, 起爆深度由 100 m 改为 25 m 左右, 即当德方潜艇刚下潜时进行攻击; 运送物资的船队及护航舰艇的编队由小规模、多批次改为大规模、少批次, 且在受敌机攻击时, 采取大船急转向和小船慢转向的逃避方法。结果, 德国潜艇被摧毁的数量增加到 400%, 而盟军运输船只中弹的数量由 47% 下降到 29%, 从而打破了德国的封锁, 并且重创了德国潜艇部队。第二次世界大战结束时, 在英、美及加拿大军队中工作的运筹学工作者已超过了 700 人。

运筹学自诞生以来, 关于它的定义有多种说法。《大英百科全书》中的解释为: “运筹学是一门应用于管理有组织系统的学科”, “运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。《现代科学综述大辞典》中的定义为: “运筹学是一门诞生于 20 世纪 30 年代的新兴学科, 运筹学是用数学方法研究各种系统最优化问题的学科, 应用运筹学解决问题的动机是为决策者提供科学决策的依据, 目的是求解系统最优化问题, 即制定合理地运用人力、物力、财力的最优方案。”《联邦德国科学辞典》(1978 年版) 上的定义是: “运筹学是从事决策模型的数学解法的一门科学。”我国《辞海》(1979 年版) 中有关运筹学条目的释义为: “运筹学主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达的有关应用、筹划与管理方面的问题, 它根据总的要求, 通过数学的分析与运算, 作出综合性的合理安排, 以达到经济、有效地使用人力和物力。”

在学术界曾分别由 P. M. Morse 与 G. E. Kimball、R. L. Ackoff 与 E. L. Amoff、S. Beer 提出过三个比较典型的定义:

(1) P. M. Morse 与 G. E. Kimball 认为运筹学就是“一种科学方法, 提供执行者有关他们管辖下的作业的一些计量性的决策基础”。

(2) R. L. Ackoff 与 E. L. Amoff 则认为运筹学是“将科学的方法、技术与工具应用于系统的作业上使管辖的作业问题获得最佳的解决”。

(3) S. Beer 提出的定义最为全面, 他认为运筹学是一种可控科学的研究, 研究人、机器、材料与资金在其周围环境中所发生的有关管理与控制的概率性承担意外风险问题。其独特的技术是根据情况利用科学模式, 经由量测、比较以及对可能行为的预测而提出一个管制策略。

二、运筹学的发展

运筹学经历了从无到有并逐渐走向成熟的过程。第二次世界大战以后,运筹学的应用由军事扩展到了工业、政府等部门,在理论上也逐步完善了其科学体系。具体地讲,它的发展大致可分为三个阶段。

1. 20 世纪 40 年代初到 50 年代初是运筹学的创建时期

此阶段从事运筹学研究的人数少、范围小,运筹学的出版物、学会等寥寥无几。英国一些战时从事运筹学研究的人积极讨论如何将运筹学方法应用于民用部门,于 1948 年成立“运筹学俱乐部”,在煤炭、电力等部门推广应用运筹学方法并取得了一些进展。同年,美国麻省理工学院率先开设了运筹学课程,1950 年英国伯明翰大学正式开设运筹学课程,1952 年美国喀斯工业大学设立了运筹学的硕士和博士学位。1950 年第一本运筹学杂志——《运筹学季刊》——在英国创刊,1952 年第一个运筹学会——美国运筹学会——成立,并于同年出版运筹学学报 *Journal of ORSA*。1951 年莫尔斯和金博尔合著的《运筹学方法》一书正式出版,这是第一本以运筹学为名的专著,书中总结了第二次世界大战中运筹学的军事应用,并且给出了运筹学的一个著名的定义:运筹学是为执行部门对它们控制下的“业务”活动采取决策提供定量依据的科学方法。这标志着运筹学这门学科基本形成。

2. 20 世纪 50 年代是运筹学的成长时期

该阶段的突出特点是计算机技术的迅速发展使得运筹学中一些方法如单纯形法、动态规划方法等得以用来解决实际管理系统中的优化问题,促进了运筹学的推广应用。20 世纪 50 年代末,美国大约有半数的大公司在自己的经营管理中应用运筹学,如将运筹学应用于制订生产计划、物资储备、资源分配、设备更新等方面的决策。此外,在该阶段出现了更多的刊物和学会。从 1956 年到 1959 年就有法国、印度、日本、荷兰、比利时等 10 个国家成立运筹学会,又有 6 种运筹学刊物问世。1957 年在英国牛津大学召开了第一次国际运筹学会议,之后每 3 年举行一次。1959 年成立了国际运筹学联合会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS)。

3. 20 世纪 60 年代以来是运筹学迅速发展和开始普及的时期

此阶段运筹学进一步细分为各个分支,专业学术团体迅速增多,相关方面的期刊和书籍大量出版,更多学校将运筹学课程纳入教学计划之中。同时,计

计算机技术的迅速发展,促使运筹学得以用来研究一些大的复杂系统,如城市交通、环境污染、国民经济计划等。如今,运筹学已广泛应用于人类社会生活的各个方面,如军事问题、教育问题、污染问题、交通运输问题、人力资源管理问题等,还广泛应用于这样一些部门:能源、预测、会计金融、销售、存储、计算机与信息系统、设计、城市服务系统、保健与医疗、电气、加工工业、第三产业等。我国的 O. R. 研究与应用起步较晚,20 世纪 50 年代中期才由钱学森和许国志等人由西方引入,一开始将其直译为“运用研究”或“作业研究”。1957 年,学者们从《史记·高祖本纪》的“运筹帷幄之中,决胜千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字,将 O. R. 正式译为运筹学,包含运用筹划、以策略取胜之意,比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

50 多年来,运筹学理论研究和应用在我国取得了较大的发展。1956 年,我国第一个运筹学小组在中国科学院力学研究所成立。1958 年建立了运筹学研究室,学者们结合我国的具体情况进行了运筹学的推广应用,特别是投入产出表的研究和应用开展较早,质量控制的应用也很有特色,产生了具有独特风格的“图上作业法”。1958 年在纺织业中用排队论解决了细纱车间的劳动组织和最优折布长度等问题。1962 年管梅谷教授提出了中国邮路问题。在此期间以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍中,在全国推广统筹法和优选法,并取得卓著成效,使运筹学的许多分支很快跟上了当时的国际步伐。

1960 年全国运筹学研究者们在山东济南召开了应用运筹学的经验交流和推广会议,1962 年和 1978 年先后在北京和成都召开了全国运筹学专业学术会议,1980 年 4 月中国运筹学会正式成立,并于 1982 年加入了国际运筹联合会。运筹学的方法在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门已开始得到广泛的应用推广。除中国运筹学会外,中国系统工程学会以及与国民经济各部门有关的专业学会也都把运筹学应用作为重要的研究领域。我国各高等院校也已普遍把运筹学列入各专业的教学计划中。目前,国内运筹学的专门刊物或较多刊登运筹学理论和应用的刊物主要有:《运筹学学报》、《运筹与管理》、《系统工程学报》、《系统工程理论方法应用》、《系统工程理论与实践》、《数量经济技术经济研究》、《系统工程》、《系统科学与数学》等。

三、运筹学的主要特点

运筹学采用定量化的方法为管理决策提供科学依据,其涉及的主要领域是管理问题,采用的研究方法是先应用数学语言来描述实际系统,再建立相应的

数学模型,然后用数学方法进行研究和分析,据此求得模型的最优解,可供管理人员和决策人员参考。

运筹学的研究内容是在需要对有限的资源进行分配时,作出人机系统最优设计和操作的科学决策。其研究的核心是将科学方法应用到对具体事物的分析中去;其研究对象是各种社会系统,既可对新系统进行优化设计,也可对已有系统研究最佳运营问题;其目的是制订合理地运用人力、物力和财力的最优方案,为决策者提供科学决策的依据。所以,从方法论来讲,运筹学和一些相关学科有着密切的关系。

运筹学研究的特点可归纳为如下三点:

1. 系统性

运筹学研究问题是从系统的观点出发,研究全局性的问题和综合优化的规律,是系统工程的基础。系统的整体优化是运筹学系统性的一个重要标志。运筹学也可看成是一门优化技术,提供的是解决各类问题的优化方法。

2. 科学性和综合性

运筹学研究是在科学方法论的指导下通过一系列规范化步骤进行的,它是广泛利用多种学科的科学知识进行的研究。运筹学研究是一种综合性的研究,它涉及问题的方方面面,应用多种学科的知识,体现出其跨学科性。

3. 实践性

运筹学是一门实践的科学,它以实际问题为分析对象,通过鉴别问题的性质、系统的目标以及系统内主要变量之间的关系,利用数学方法达到对系统进行优化的目的。更为重要的是分析获得的结果要能被实践检验,并被用来指导实际系统的运行。

四、运筹学的主要内容

运筹学研究的内容非常广泛,几乎包括了生产生活的各个方面,涉及军事、经济、政治等各个领域。以下简单介绍其中的几个主要内容:

1. 线性规划

在经营管理中如何有效地利用现有的人力、物力和财力来完成更多的任务,或者在预定的任务目标下,如何耗用最少的人力、物力、财力去实现?此

类统筹规划问题需要用数学语言来表达, 首先根据问题的具体目标来选取适当的变量, 用变量的函数形式来表达出该问题的目标, 然后用有关变量的等式或不等式来表达出对该问题的限制条件。当变量连续取值, 且目标函数和约束条件的表达式均为线性时, 称这类模型为线性规划模型。线性规划有通用的算法和较成熟的计算机软件, 是运筹学最为广泛的分支。其中的典型问题包括运输问题、生产计划问题、下料问题、混合配料问题等。

2. 非线性规划

如果线性规划模型中目标函数或约束条件不全是线性的, 则为非线性规划问题。由于大多数工程物理量的表达式是非线性的, 因此, 非线性规划在各类工程的优化设计中得到较多的应用, 它是优化设计的有力工具。

3. 动态规划

有些管理活动是由一系列相互关联的阶段组成的, 在每个阶段依次进行决策而且上一阶段的输出状态即是下一阶段的输入状态, 各阶段的决策之间是互相关联的, 因而形成一个多阶段决策过程。动态规划是研究多阶段决策过程最优化问题的运筹学分支。具体来说就是研究多阶段决策过程的总体优化, 即从系统总体出发, 要求各阶段决策所构成的决策序列使得目标函数值达到最优。

4. 图与网络分析

生产管理中经常遇到工序间的合理衔接问题, 设计中经常遇到研究各种管道、线路的负载能力以及仓库、附属设施的布局等问题。把这些问题的研究对象抽象为顶点, 对象之间的联系抽象为边, 则点与边的集合就构成了图。图论就是研究由顶点和边组成的图形的数学理论和方法, 图是网络分析的基础。如果根据研究的具体对象赋予图中各边某个具体的参数(如时间、费用等), 并指定了起点、中转点和终点, 我们就称这样的图为网络图。网络分析主要是利用图论方法来研究各类网络结构和流量的优化分析。

5. 存储论

为了保证企业生产的正常进行, 需要有一定数量的原材料和零部件的储备, 以调节供需之间的不平衡。存储论主要研究各种供需关系下, 在什么时间以多大的订货量来补充储备, 使得用于采购、存储以及有可能发生的短缺导致的损失最少等问题。

6. 排队论

在现实生活和生产中会产生各种拥挤和排队现象，排队系统由服务机构（服务员）及被服务对象（顾客）组成。排队论实际是研究排队系统工作过程优化的数学理论和方法，它通过找出这类系统工作特性的数值，为设计新的服务系统和改进现有的系统提供数量依据。

7. 决策论

在决策者面前有若干备选行动方案，决策者根据一定的准则和为达到目标最优的要求进行抉择。决策的过程一般包括形成决策问题；确定目标和效果的度量；确定各方案对应的结果以及出现的概率；确定决策者对不同结果的效用值；综合评价，作出方案的取舍。

8. 对策论

多用于具有对抗局势的模型。在该类模型中，参与对抗的各方（称为局中人）均有一组策略可供选择，当各局中人分别采用不同策略时，对应一个收益或需要支付的函数。对策论就是为局中人在这种高度不确定和充满竞争的环境中，提供一套完整的、量化的和程序化的选择策略的理论和方法。

运筹学包含的内容很多，但它们有两个共同的特点：一是以全局最优作为研究问题的出发点；二是通过建立数学模型，运用优化技术求得系统最佳运营方案。本书仅对其中最基本的内容：线性规划、单纯形法、对偶问题、运输问题、图的知识进行介绍。

第一章 线性规划基础

学习指导

【学习目标】

- (1) 线性规划模型的建立：能根据实际问题列出线性规划的数学模型。
- (2) 掌握线性规划的图解法及其几何意义。
- (3) 掌握线性规划的标准型以及规范法。
- (4) 理解线性规划解的概念以及性质。

【学习建议】

- (1) 学习时间：4.5~6.5 小时。
 - 第 1 节建议学习时间：1~1.5 小时。
 - 第 2 节建议学习时间：1~1.5 小时。
 - 第 3 节建议学习时间：1~1.5 小时。
 - 第 4 节建议学习时间：1.5~2 小时。
- (2) 学习方法：
 - ① 点播学习网络课程第一章的内容。
 - ② 参加在线导学直播。
 - ③ 阅读参考资料中列出的至少两项资料。
 - ④ 学习完本章内容后，提交本章作业。

【学习重难点】

- (1) 线性规划特征。
- (2) 线性规划的标准型。
- (3) 线性规划的图解法及其几何意义。
- (4) 线性规划解的概念及性质。

人们在生产实践中，常常遇到如下的问题：如何运用现有资源（如人力、机器小时、原材料等）安排生产，使产值最大或利润最高；对给定的任务，如何统筹安排，以使用最少的资源消耗去完成任务。对于这种从生产的计划与组织中提出的以达到最大收益或最小支付为目标的问题的研究，构成了运筹学的一个重要分支——数学规划论，而线性规划则是其中发展最早、理论比较成熟、应用最为广泛的一个分支。

本章主要介绍线性规划的基础理论，包括线性规划模型的建立、图解、标准型及其解的概念。

第一节 线性规划问题的提出与模型

一、线性规划问题的引入

用线性规划解决实际问题的基本步骤是先建立问题的数学模型，然后对模型求解。所谓建立数学模型，就是将问题用数学语言描述出来。

什么是线性规划问题？它具有哪些特点呢？为了回答这两个问题，我们先来看两个例子。

例 1.1 某企业生产甲、乙两种产品，要使用 A、B、C 三种不同的原材料。已知生产一件甲产品需用三种原料分别为 1、1、0 个单位，生产一件乙产品需用三种原料分别为 1、2、1 个单位。现企业每天供应原材料的能力分别为 6、8、3 个单位。又已知每生产一件甲产品和乙产品企业的利润收入分别是 30 元和 40 元，问企业应该如何安排甲、乙产品的生产，可以使一天的总利润最大？

首先可以根据题中的条件和数据列出一个表格，见表 1.1。然后对问题进行定性分析，弄清楚需求（产品）和供给（原材料）之间的关系，建立起它们之间的关系（数学）模型。有了模型以后，再寻找出相应的数学方法对模型求解，求解出来的量化数据用来指导（支持）最后的实践决策。

表 1.1

单位产品耗用材料	甲	乙	材料供应量
A	1	1	6
B	1	2	8
C	0	1	3
利润（元/件）	30	40	

以上的逻辑思想如图 1.1 所示。

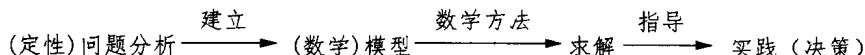


图 1.1

现在只讨论从问题分析到建立模型阶段。求解的方法和指导实践的步骤将在后面的章节中讲解。

下面是问题分析的步骤：

第一步：将要解决的实际问题含义搞清楚。本例中的企业要生产甲、乙两种产品，使用的原材料是 A、B、C 三种，且这三种原材料的日供应量是有限的。

第二步：明确问题所要追求的目标。本例是要追求企业目标利润的最大化，且已知甲、乙产品的利润分别是每件 30 元、40 元。

第三步：将问题量化。即找出问题的关键因素，并将其假设作为一种可以量化的变量。本例中产品的日产量就是可量化的因素。

第四步：建立起量化的数学模型。

现假设甲产品的日产量为 x_1 ，乙产品的日产量为 x_2 ，根据题中给出的数据和限制条件，我们有：

对于原料 A：

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{原料 A 日供应量限制}) \quad (1.1)$$

对于原料 B：

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (\text{原料 B 日供应量限制}) \quad (1.2)$$

对于原料 C：

$$x_2 \leq 3 \quad (\text{原料 C 日供应量限制}) \quad (1.3)$$

另外，产品的产量不能为负数，因此 x_1 、 x_2 还应满足

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (1.4)$$

称式 (1.1) ~ (1.4) 为约束条件，其中式 (1.4) 为非负约束。

本问题追求的目标是在甲、乙两种产品的产量 x_1 和 x_2 满足约束条件 (1.1) ~ (1.4) 的条件下，获得最大日利润。若以 z 表示利润，则有 $z = 30x_1 + 40x_2$ 。由于追求的目标为日利润最大，因此表示为：

$$\max z = 30x_1 + 40x_2 \quad (1.5)$$

式 (1.1) ~ (1.5) 就是本问题的数学模型，一般用下面的形式表示：

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 + 40x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

注意：max 是 maximize 的缩写，表示取最大值。s.t. 是 subject to 的缩写，表示满足约束的意思。

一般建立线性规划问题的模型可按如下步骤进行：

1. 确定决策变量

确定决策变量就是将问题中的未知量用变量来表示，用来表示未知量的变量就是决策变量，如例 1.1 中的 x_1 和 x_2 。确定合适的决策变量是建立线性规划问题模型的关键，它直接涉及能否成功地建立数学模型。

2. 确定目标函数

每一个线性规划问题都有一个追求的目标，确定目标函数就是将追求的目标用决策变量表示出来，如式 (1.5)。

3. 确定约束条件方程

一个问题通常有若干个约束条件（限制条件），一个线性规划问题就是要在这些条件的限制下，找到最好的行动方案。在建立模型时要把这些约束条件用数学公式表示出来（一般为不等式），如式 (1.1) ~ (1.4)。

同学们会建立线性规划问题的模型了吗？试试吧！

例 1.2 某饲料公司用甲、乙两种原料配制饲料，甲乙两种原料的营养成分及配合饲料中所含各营养成分最低量由表 1.2 给出。已知单位甲、乙原料的价格分别为 10 元和 20 元，求满足营养需要的饲料最小成本配方。

表 1.2

单位原料的营养成分 营养成分	原料	甲原料 x_1	乙原料 x_2	配合饲料的最低含量
钙		1	1	10
蛋白质		3	1	15
热量		1	6	15