高中数学 新课程

学习指导

5 必修

人教A版

与人教A版普通高中课程标准
实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室 编

大象出版社

高中数学 新课程

学习指导

5
必修

人教A版

与人教A版普通高中课程标准
实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室 编

大象出版社

目　录

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

自主探究学习

1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，设 $BC=a, AC=b, AB=c$. 根据正弦函数的定义，有 $\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\sin B$. 又 $\sin C=1=\frac{c}{c}$，由此可得 $\frac{a}{\sin A}=$________$=$________$=c$.

2. 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，设边 AB 上的高是 CD，根据任意角三角函数的定义，有 $CD=a\sin B=b\sin A$，则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，同理可得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，从而________________.

类似可推出，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，以上关系式仍然成立.

3. 从上面的探究过程，可得以下定理：

正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比值相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\_\_\_\_\_\_=\frac{c}{\sin C}.$$

一般地，已知三角形的某些边和角，求其他的边和角的过程叫做__________.

名师要点解析

【要点导学】

(1) 正弦定理说明，同一三角形中，边与其所对角的正弦成正比，且比例系数为同一正数，即存在正数 k 使 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$（事实上，$k=2R$，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，因此正弦定理还可以写成 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$. 请同学们牢记，后面的练习将用到这一公式进行边角互化）.

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 等价于

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

从而可知，正弦定理的基本作用为：

①已知三角形的任意两角及其一边可以求其他边，如 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$；

②已知三角形的任意两边与其中一边的对角可以求其他角的正弦值，如 $\sin A=\frac{a}{b}\sin B$.

【经典例题】

【例 1】(1) 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A=45°$，$C=30°$，$c=10$，解此三角形.

(2) 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A=45°$，$AB=\sqrt{6}$，$BC=2$，解此三角形.

【分析】充分利用正弦定理求解，要把三角形中其他所有的边和角都求出来.

【解】(1) 由 $A=45°$，$C=30°$，可得 $B=105°$.

而 $\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cdot\cos 45°+\cos 60°\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

可依次计算出 $a=10\sqrt{2}$，$b=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$.

(2) 由 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，可得

$$\sin C=\frac{AB\sin A}{BC}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以当 $C=60°$ 时，$B=75°$，

从而 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\sqrt{3}+1$；

当 $C=120°$ 时，$B=15°$，

从而 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\sqrt{3}-1$.

【点拨】应注意已知两边和其中一边的对角解三角形时,可能有两解的情形.

【变式训练】在$\triangle ABC$中,$a=3$,$c=3\sqrt{3}$,$A=30°$,求C及b.

【答案】$C=60°$,$b=6$,或$C=120°$,$b=3$.

【例2】$\triangle ABC$中,$2\sin^2\dfrac{A+B}{2}+\cos 2C=1$.

(1)求角C;

(2)若$a^2=b^2+\dfrac{c^2}{2}$,求$\cos 2A-\cos 2B$的值.

【分析】注意到$A+B=\pi-C$,可以把已知式子化为关于角C的三角方程求解;然后用正弦定理及三角公式求出$\cos 2A-\cos 2B$的值.

【解】(1)由已知,得

$1-\cos(A+B)+2\cos^2C-1=1$.

又$A+B=\pi-C$,

所以$2\cos^2C+\cos C-1=0$,

所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$或$\cos C=-1$(舍去),

又$0<C<\pi$,所以$C=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理及$a^2=b^2+\dfrac{1}{2}c^2$,得

$2\sin^2A-2\sin^2B=\sin^2C=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$,

$1-\cos 2A-1+\cos 2B=\dfrac{3}{4}$,

所以$\cos 2A-\cos 2B=-\dfrac{3}{4}$.

【点拨】解三角形时,一定要注意“$\triangle ABC$中$A+B+C=\pi$”这一重要的隐含条件,还要注意三角形内角的取值范围.

【例3】在$\triangle ABC$中,如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,并且$B$为锐角,试判断此三角形的形状特征.

【分析】判断三角形形状的问题是一类典型问题,其基本思路是以变形为基本方法,将它化为边的等式,或者化为角的等式,不论化为哪种形式,都应该用方程的思想看待得到的等式.

【解】$\because\ \lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,

$\therefore\ \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because\ 0°<B<90°$,

$\therefore\ B=45°$.

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\ \dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

将$A=135°-C$代入,得$\sqrt{2}\sin C=2\sin(135°-C)$.

$\therefore\ \sin C=\sin C+\cos C$.

$\therefore\ \cos C=0$,

$\therefore\ C=90°$.

$\because\ A=45°$,

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰直角三角形.

【点拨】解题的思想方法是:从已知条件出发,利用正弦定理,进行代换、转化、运算化简,得出边与边的关系,角与角的关系,或求出角的大小,从而作出正确的判断.

【变式训练】已知方程$x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$的两根之积等于两根之和,且a、b为$\triangle ABC$的两边,A、B分别为a、b的对角,试判断$\triangle ABC$的形状.

【答案】$\triangle ABC$为等腰三角形.

课堂基础自测

1. 在$\triangle ABC$中,若$\sqrt{3}a=2b\sin A$,则B等于 【　】

A. 30°　　B. 60°

C. 30°或150°　　D. 60°或120°

2. 在$\triangle ABC$中,已知$b=\sqrt{2}$,$c=1$,$B=45°$,则a等于 【　】

A. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $3-\sqrt{2}$

3. 关于解三角形,下列判断正确的是 【　】

A. $a=7$,$b=14$,$A=30°$,有两解

B. $a=30$,$b=25$,$A=150°$,有一解

C. $a=6$,$b=9$,$A=45°$,有两解

D. $b=9$,$c=10$,$A=60°$,无解

4. 在$\triangle ABC$中,已知$3b=2\sqrt{3}a\sin B$,$\cos B=\cos C$,则$\triangle ABC$的形状是 【　】

A. 直角三角形

B. 等腰三角形

C. 等边三角形

D. 等腰直角三角形

5. 在$\triangle ABC$中,$A=60°$,$a=3$,则

$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于　【　】

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

C. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 在$\triangle ABC$中,已知$B=30°$,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$,求角A.

综合能力拓展

7. 在$\triangle ABC$中,若$\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{a^2}{b^2}$,则$\triangle ABC$的形状是　【　】

A. 直角三角形

B. 等腰三角形或直角三角形

C. 等腰三角形

D. 不能确定

8. 在$\triangle ABC$中,若$\sin A>\sin B$,则A一定大于B,对吗? 答:________(填“对”或“错”).

9. 在$\triangle ABC$中,角C是钝角,设$x=\sin C$,$y=\sin A+\sin B$,$z=\cos A+\cos B$,则x,y,z的大小关系是________________.

10. 在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是A、B、C的对边,已知$2B=A+C$,$a+\sqrt{2}b=2c$,求$\sin C$的值.

1.1.2　余弦定理

自主探究学习

1. 余弦定理:三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的________减去这两边与它们的夹角的余弦的积的________倍. 即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

2. 从方程的角度看已知其中三个量,可以求出第四个量,能否由三边求出一角?

从余弦定理又可得到以下推论：________；________；________．于是，有这个角的余弦值，就可以求出这个角的大小．

3．从余弦定理和余弦函数的性质可知，一个三角形两边的平方和如果等于第三边的平方，那么第三边所对的角是________；如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是________；如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是________．

名师要点解析

【要点导学】

余弦定理及其推论的基本作用为：

①已知三角形的任意两边及它们的夹角就可以求出第三边；

②已知三角形的三边就可以求出三个角．

思考：勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系，余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系，如何看这两个定理之间的关系？

若$\triangle ABC$中，$C=90°$，则$\cos C=0$，这时$c^2=a^2+b^2$．

由此可知余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例．

【经典例题】

【例 1】在$\triangle ABC$中，已知$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判断三角形ABC的形状．

【分析】用余弦定理将角的关系转化为边的关系，再作判断．

【解】由余弦定理知

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

代入已知条件得

$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，

整理，得$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0$，

展开并整理，得$(a^2-b^2)^2=c^4$．

$\therefore\ a^2-b^2=\pm c^2$，即$a^2=b^2+c^2$或$b^2=a^2+c^2$．

所以$\triangle ABC$为直角三角形．

【点拨】已知三角形的边角关系式，判断三角形的形状，有两条思路：其一化边为角，再进行三角恒等变换，求出三角之间的关系式；其二化角为边，再进行代数恒等变换，求出三条边之间的关系式．两种转化主要应用正弦定理和余弦定理．

【变式训练】在$\triangle ABC$中，$B=60°$，$b^2=ac$，则$\triangle ABC$一定是________三角形．

【答案】等边

【例 2】在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=45°$，求b和角A．

【分析】利用余弦定理，已知三角形的任意两边及它们的夹角就可以求出第三边，已知三角形的三条边就可以求出其他角．求角A可以利用余弦定理，也可以利用正弦定理．

【解】先求b：因为$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos45°$

$=12+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)$

$=8$，

所以　$b=2\sqrt{2}$．

再求角A：(方法 1)

因为$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{1}{2}$，

所以　$A=60°$．

(方法 2)

因为$\sin A=\dfrac{a}{b}\sin B=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\sin45°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

且$a=2\sqrt{3}>0$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}>0$，

所以$a^2=12$，$c^2=8+4\sqrt{3}$．

因为$a^2<c^2$，

所以$a<c$，所以$0°<A<90°$．

所以$A=60°$．

【点拨】在用方法 2 解题时应注意确定角A的取值范围．

【例 3】$\triangle ABC$的面积是 30，内角A、B、C所对边长分别为a、b、c，$\cos A=\dfrac{12}{13}$．

(1)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；(2)若$c-b=1$，求$a$的值．

【分析】(1)根据同角三角函数关系，由$\cos A=\dfrac{12}{13}$得$\sin A$的值，再根据$\triangle ABC$面积公式，得$bc=$

156,直接求数量积$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.(2)由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,结合已知条件$c-b=1$及$bc=156$可求$a$的值.

【解】(1)由$\cos A=\frac{12}{13}$,得$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

又$\frac{1}{2}bc\sin A=30$,∴　$bc=156$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=156\times\frac{12}{13}=144$.

(2)由(1)及余弦定理,得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=(c-b)^2+2bc(1-\cos A)\\&=1+2\cdot156\cdot\left(1-\frac{12}{13}\right)=25,\end{aligned}$$

∴　$a=5$.

【点拨】本题考查同角三角函数的基本关系,三角形面积公式,向量的数量积,利用余弦定理解三角形以及运算求解能力.

【变式训练】设锐角△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c,已知$a=2b\sin A$.

(1)求B的大小;

(2)若$a=3\sqrt{3}$,$c=5$,求b.

【答案】(1)$B=30°$.　(2)$b=\sqrt{7}$.

课堂基础自测

1. 在△ABC中,$a=6$,$b=8$,$c=5$,则△ABC的形状是　【　】

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 非钝角三角形

2. 在△ABC中,已知$a^2-c^2+b^2=ab$,则角C等于　【　】

A. 60°　　B. 45°或135°

C. 120°　　D. 30°

3. 若三角形三边长之比是$\sqrt{2}:\sqrt{3}:2$,则其所对角的余弦之比为　【　】

A. 3:2:1　　B. $2:\sqrt{3}:\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$　　D. $5\sqrt{2}:3\sqrt{3}:2$

4. 在△ABC中,$a:b:c=3:5:7$,则△ABC中最大的角等于　【　】

A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

5. 在△ABC中,已知$a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$,则角C等于　【　】

A. 30°　　B. 60°

C. 45°或135°　　D. 120°

6. 在△ABC中,若$a=7$,$b=8$,$\cos C=\frac{13}{14}$,则最大角的余弦值为________.

7. 在△ABC中,边a、b的长是方程$x^2-5x+2=0$的两根,$C=120°$,则$c=$________.

8. 在△ABC中,已知$a=2$,$b=2\sqrt{2}$,$C=15°$,解此三角形.

综合能力拓展

9. 在△ABC中,已知$a-b=4$,$a+c=2b$,且最大角为120°,则该三角形的周长为________.

10. 在△ABC中,$AC=2$,$BC=1$,$\cos C=\frac{3}{4}$.

(1)求AB的值;

(2)求$\sin(2A+C)$的值.

11. 在△ABC 中，内角 A、B、C 对边分别为 a、b、c，已知 $c=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$AC$ 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$，求 $\sin A$.

12. △ABC 中，a、b、c 分别是角 A、B、C 所对的边，且有 $\sin 2C+\sqrt{3}\cos(A+B)=0$.

(1)若 $a=4$，$c=\sqrt{13}$，求 b 的长度；

(2)若 $A=\frac{\pi}{3}$，$\cos B>\cos C$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值.

1.2　应用举例

课时 1

自主探究学习

运用正弦定理、余弦定理等知识和方法可解测量有关底部不可到达的物体的________（填“距离”、“高度”或“角度”）.

名师要点解析

【要点导学】

1. 解斜三角形应用题的一般步骤：

(1)分析：理解题意，分清已知与未知，画出示意图；

(2)建模：根据已知条件与求解目标，把已知量与待求量尽量集中在有关的三角形中，建立一个解斜三角形的数学模型；

(3)求解：利用正弦定理或余弦定理有序地解出三角形，求得数学模型的解；

(4)检验：检验上述所求的解是否符合实际，从而得出实际问题的解.

2. 利用正弦定理和余弦定理来解题时，要学会审题及根据题意画方位图，要懂得从所给的背景资料中进行加工、抽取主要因素，进行适当的简化. 要分析和研究问题中涉及的三角形，及其中哪些是已知量，哪些是未知量，应该选用正弦定理还是余弦定理进行求解.

3. 解三角形的应用题时，通常会遇到两种情况：

(1)已知量与未知量全部集中在一个三角形中，依次利用正弦定理或余弦定理解之；

(2)已知量与未知量涉及两个或多个三角形，这时需要选择条件足够的三角形优先研究，再逐步在其余的三角形中求出问题的解.

【经典例题】

【例 1】如图 1－1，有两条相交成 60°角的直线 XX'、YY'，交点是 O，甲、乙分别在 OX、OY 上，起初甲离 O 点 3 千米，乙离 O 点 1 千米，后来两人同时用 4 千米/时的速度，甲沿 XX' 方向，乙沿 $Y'Y$ 方向步行. 问：

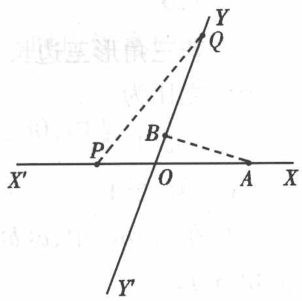

图 1－1

(1)起初两人的距离是多少？

(2)用包含 t 的式子表示 t 小时后两人的距离；

(3)什么时候两人的距离最近？

【分析】求距离可考虑用余弦定理；可以用函数知识解决距离最短问题.

【解】(1)设甲、乙两人起初的位置分别是 A、B，连接 AB，则

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos60°$$
$$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{1}{2}=7,$$

故 $AB=\sqrt{7}$.

所以起初两人的距离是$\sqrt{7}$千米.

(2)设甲、乙两人 t 小时后的位置分别是 P、Q，连接 PQ，则 $AP=4t$，$BQ=4t$.

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$ 时，$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos60°=48t^2-24t+7$；

当 $t>\frac{3}{4}$ 时，$PQ^2=(4t-3)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cos120°=48t^2-24t+7$，

所以，$PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}$.

(3) $PQ^2=48t^2-24t+7=48(t-\frac{1}{4})^2+4$，

所以当 $t=\frac{1}{4}$ 时，即在第 15 分钟末，PQ 最短.

故在第 15 分钟末，两人的距离最近.

【点拨】在实际问题(航海、测量等)的解决过程中，要熟练解题的一般步骤和方法，及正弦、余弦定理相关知识点的运用.

【例 2】某巡逻艇在 A 处发现北偏东 45°相距 9 海里的 C 处有一艘走私船，正沿南偏东 75°的方向以 10 海里/时的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以 14 海里/时的速度沿着直线方向追去. 问：巡逻艇应该沿什么方向去追？需要多长时间才能追赶上该走私船？(角度精确到 1°)

【分析】本题的关键是计算出三角形的各边，即需要引入时间这个参变量.

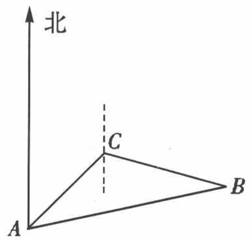

图 1－2

【解】如图 1－2，设该巡逻艇沿 AB 方向经过 x 小时后在 B 处追上走私船，则 $CB=10x$，$AB=14x$，$AC=9$，

$\angle ACB=75°+45°=120°$，

所以 $(14x)^2=9^2+(10x)^2-2\times9\times10x\cos120°$，

化简得 $32x^2-30x-27=0$，

解得 $x=\frac{3}{2}$，$x=-\frac{9}{16}$(舍去).

所以 $BC=10x=15$，$AB=14x=21$.

又因为 $\sin\angle BAC=\frac{BC\sin120°}{AB}=\frac{15}{21}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

所以$\angle BAC\approx38°$(或$\angle BAC\approx142°$，钝角不合题意，舍去).

可得 $38°+45°=83°$.

答：巡逻艇应该沿北偏东 83°方向去追，经过 1.5小时才能追赶上该走私船.

【点拨】在求解三角形中，我们可以根据正弦函数的定义得到两个解，但作为有关现实生活的应用题，必须检验上述所求的解是否符合实际意义，从而得出实际问题的解.

【例 3】如图 1－3，甲船以每小时 $30\sqrt{2}$海里的速度向正北方向航行，乙船按固定方向匀速直线航行，当甲船位于 A_1 处时，乙船位于甲船的北偏西 105°方向的 B_1 处，此时两船相距 20 海里，当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时，乙船航行到甲船的北偏西 120°方向的 B_2 处，此时两船相距 $10\sqrt{2}$海里. 问：乙船每小时航行多少海里？

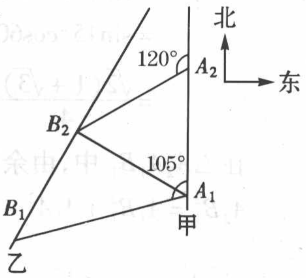

图 1－3

【解】(方法 1)如图 1－3，连接 B_1A_1、A_1B_2、B_2A_2，由已知得 $A_2B_2=10\sqrt{2}$，

$A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{20}{60}=10\sqrt{2}$，

所以 $A_1A_2=A_2B_2$，

又 $\angle A_1A_2B_2=180°-120°=60°$，

所以$\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形，

所以 $A_1B_2=A_1A_2=10\sqrt{2}$.

已知 $A_1B_1=20$，

$\angle B_1A_1B_2=105°-60°=45°$，

在$\triangle A_1B_2B_1$ 中，由余弦定理，得

$$B_1B_2^2=A_1B_1^2+A_1B_2^2-2A_1B_1\cdot A_1B_2\cos45°$$
$$=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\times20\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=200.$$

所以 $B_1B_2=10\sqrt{2}$.

因此,乙船的速度的大小为 $\frac{10\sqrt{2}}{20}\times 60=30\sqrt{2}$ (海里/时).

答:乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$ 海里.

(方法 2) 如图 1-4,连接 A_1B_1、B_1A_2、A_2B_2,由已知得 $A_1B_1=20$,

$A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{20}{60}=10\sqrt{2}$,

$\angle B_1A_1A_2=105°$,

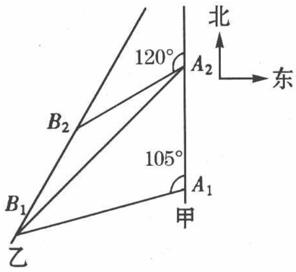

图 1-4

$$\cos105°=\cos(45°+60°)=\cos45°\cos60°-\sin45°\sin60°=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4},$$

$$\sin105°=\sin(45°+60°)=\sin45°\cos60°+\cos45°\sin60°=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

在 $\triangle A_2A_1B_1$ 中,由余弦定理,得

$$A_2B_1^2=A_1B_1^2+A_1A_2^2-2A_1B_1\cdot A_1A_2\cos105°$$
$$=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\times20\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$$
$$=100(4+2\sqrt{3}).$$

所以 $A_2B_1=10(1+\sqrt{3})$.

由正弦定理,得

$$\sin\angle A_1A_2B_1=\frac{A_1B_1}{A_2B_1}\sin\angle B_1A_1A_2=\frac{20}{10(1+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\angle A_1A_2B_1=45°$,

即 $\angle B_1A_2B_2=60°-45°=15°$,

$$\cos15°=\sin105°=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

在 $\triangle B_1A_2B_2$ 中,由已知 $A_2B_2=10\sqrt{2}$,及余弦定理,得

$$B_1B_2^2=A_2B_1^2+A_2B_2^2-2A_2B_1\cdot A_2B_2\cos15°$$
$$=[10(1+\sqrt{3})]^2+(10\sqrt{2})^2-2\times10(1+\sqrt{3})\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$
$$=200.$$

所以 $B_1B_2=10\sqrt{2}$,乙船的速度为 $\frac{10\sqrt{2}}{20}\times60=30\sqrt{2}$(海里/时).

答:乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$ 海里.

【点拨】 本题是解斜三角形的应用题,考查了正弦、余弦定理的应用和等边三角形的判定. 求解本类问题时应按照由易到难的顺序来求解,最重要的是首先要对图形进行有效分割,以便于运用正弦、余弦定理.

课堂基础自测

1. 一艘船以 4km/h 的速度沿着与水流方向成 120°的方向航行,已知河水流速为 2km/h,则经过 $\sqrt{3}$h,该船实际航程为 【　　】

A. $2\sqrt{15}$km　　B. 6km

C. $2\sqrt{21}$km　　D. 8km

2. 某船开始看见灯塔在南偏东 30°方向,后来船沿南偏东 60°的方向航行 45nmile 后看见灯塔在正西方向,则这时船与灯塔的距离是 【　　】

A. 15nmile　　B. 30nmile

C. $15\sqrt{3}$nmile　　D. $15\sqrt{2}$nmile

3. 在高为 20m 的楼顶,测得对面一建筑物顶的仰角为 60°,建筑物底部的俯角为 45°,则该建筑物的高度是________. (精确到 0.1m)

4. 在海岸不远处有两个小岛 P、Q,现要测量它们之间的距离,在岸边取两点 A、B,测得 $AB=50$m, $\angle PAB=105°$, $\angle QAB=30°$, $\angle PBA=45°$, $\angle QBA=135°$,试由这些数据求出两个小岛之间的距离. (结果保留两个有效数字)

5. 某人在 M 汽车站的北偏西 20°方向上的 A 处，观察到点 C 处有一辆汽车沿公路向 M 站行驶，公路的走向是 M 站的北偏东 40°. 开始时，汽车距 A 的距离为 31 千米，汽车前进 20 千米后，距 A 的距离缩短了 10 千米. 问：汽车还需行驶多远，才能到达 M 汽车站？

6. 如图 1－5，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°、相距 10 海里 C 处的乙船，试问：乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援？（角度精确到 1°）

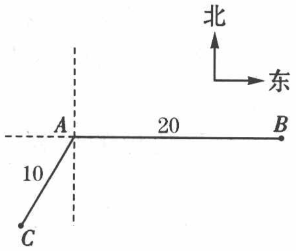

图 1－5

7. 如图 1－6，在某点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ，沿 BE 方向前进 30m 至点 C 处测得顶端 A 的仰角为 2θ，再继续前进 $10\sqrt{3}$m 至 D 点，测得顶端 A 的仰角为 4θ，求 θ 的大小和建筑物 AE 的高度.

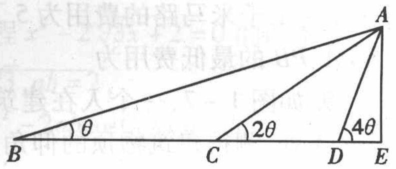

图 1－6

综合能力拓展

8. B 地在 A 地的正东方向 4 千米处，C 地在 B 地的北偏东 45°的 $2\sqrt{2}$ 千米处. 有一直线形的马路 l 过 C 地且与线段 BC 垂直，现欲在马路 l 上造一个车站 P. 造 1 千米马路的费用为 5 万元，则修筑两条马路 PA、PB 的最低费用为________万元.

9. 如图 1－7，一个人在建筑物 CD 底部的正西方向 A 处，测得建筑物顶的仰角是 α，这个人再从 A 点向南走到 B 点，测得建筑物顶的仰角是 β，设 A、B 间的距离是 a.

证明：建筑物的高 $h=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

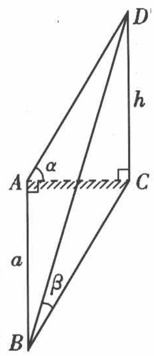

图 1－7

10. 在某定点 A 测得一船初始位置 B 在 A 的北偏西 α_1 处，10 分钟后船在定点 A 正北，又过 10 分钟后船到达定点 A 的北偏东 $\alpha_2(\alpha_1>\alpha_2)$ 处. 若船的航向与速度都不变，船向为北偏东 θ，求 θ 的正切值.

课时 2

自主探究学习

$\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边 BC、CA、AB 的长度分别为 a、b、c，BC、CA、AB 边上的高分别记为 h_a、h_b、h_c，则：

1. 三角形的面积公式为：$S_{\triangle ABC}=$________＝________＝________.

2. 若已知边和角，则 $h_a=$________＝________；$h_b=$________＝________；$h_c=$________＝________.

于是，三角形的面积公式又可以表示为：________________.

名师要点解析

【要点导学】

1. 本节补充了三角形新的面积公式，同时总结出该公式的特点，循序渐进地具体运用于相关的题

型.在具体的论证中灵活把握正弦定理和余弦定理的特点,能不拘一格,一题多解,开阔思维,有利于进一步突破难点.

2. 解斜三角形的常规思维方法是:

(1)已知两角和一边(如 A、B、c),由 $A+B+C=\pi$ 求 C,由正弦定理求 a、b;

(2)已知两边和其夹角(如 a、b、C),应用余弦定理求 c 边;再应用正弦定理先求较短边所对的角,然后利用 $A+B+C=\pi$,求另一角;

(3)已知两边和其中一边所对的角(如 a、b、A),应用正弦定理求 B,由 $A+B+C=\pi$ 求 C,再由正弦定理或余弦定理求 c 边,要注意解可能有多种情况;

(4)已知三边 a、b、c,应用余弦定理求 A、B,再由 $A+B+C=\pi$,求角 C.

3. 解三角形问题可能出现一解、两解或无解的情况,这时应结合三角形中大边对大角定理及几何作图来帮助理解.

【经典例题】

【例 1】在 $\triangle ABC$ 中,若 $2\cos B\sin A=\sin C$,则 $\triangle ABC$ 一定是　　　　【　　】

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

【分析】利用正弦定理或余弦定理将已知条件转化为只含边的式子或只含角的三角函数式,然后化简并考察边或角的关系,从而确定三角形的形状.特别是有些条件既可用正弦定理也可用余弦定理,甚至可以两者混用.

【解】$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$,又因为 $2\sin A\cos B=\sin C$,所以 $\sin(A-B)=0$,所以 $A=B$,故选 C.

【点拨】本题考查了三角形的基本性质,要求通过观察、分析、判断,明确解题思路和变形方向,通畅解题途径.

【变式训练】设 $\triangle ABC$ 满足 $\tan A\sin B=\tan B\sin A$,则 $\triangle ABC$ 的形状是________.

【答案】等腰三角形

【例 2】锐角三角形 ABC 中,边 a、b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两根,角 A、B 满足 $2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$,求角 C、边 c 及 $\triangle ABC$ 的面积.

【分析】先利用根与系数的关系求 $a+b$、ab 的值,再结合余弦定理求边 c 的值,进而求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解】$\because\ 2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$,

$\therefore\ \sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\ C=60°$.

$\because\ a$、b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根,

$\therefore\ a+b=2\sqrt{3}$,$ab=2$,

$\therefore\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=12-6=6$,

$\therefore\ c=\sqrt{6}$.

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【点拨】主要考查余弦定理和面积公式的运用,着重考查运算能力,是一道三角的基础题.

【变式训练】已知 $\triangle ABC$ 三边 a、b、c 和面积 S,且 $S=c^2-(a-b)^2$,$a+b=2$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】$\dfrac{4}{17}$.

【例 3】在 $\triangle ABC$ 中,内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c,已知 $c=2$,$C=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$,求 a、b;

(2)若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

【分析】由余弦定理及已知条件,再结合 $\triangle ABC$ 的面积公式,可得关于 a、b 的方程组;对于(2),可结合三角公式及正弦定理求解.

【解】(1)由余弦定理及已知条件,得 $a^2+b^2-ab=4$,

又因为 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$,

所以 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$,得 $ab=4$.

联立方程组 $\begin{cases}a^2+b^2-ab=4,\\ ab=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=2.\end{cases}$

(2)由题意得

$\sin(B+A)+\sin(B-A)=4\sin A\cos A$,

即 $\sin B\cos A=2\sin A\cos A$,

当 $\cos A=0$ 时,$A=\dfrac{\pi}{2}$,$B=\dfrac{\pi}{6}$,$a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,$b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

当 $\cos A\neq 0$ 时,得 $\sin B=2\sin A$,

由正弦定理得 $b=2a$，

联立方程组 $\begin{cases}a^2+b^2-ab=4,\\ b=2a,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\\ b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点拨】本题主要考查三角函数概念、同角三角函数的关系、两角和与差的三角函数的公式以及倍角公式，考查应用、分析和计算能力.

课堂基础自测

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2$，$BC=\sqrt{10}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于【　　】

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$b=1$，$\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$，则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为【　　】

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{81}$　　B. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}\sqrt{39}$　　D. $2\sqrt{7}$

3. $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，当 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\sin C$ 等于【　　】

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

4. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$，那么 $\cos C$ 等于【　　】

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{2c-b}{b}$，则 $A=$ ________.

6. 在某市进行城市环境建设中，要把一个三角形的区域改造成市内公园，经过测量得到这个三角形区域的三条边长分别为 68m，88m，127m，这个区域的面积是多少？（精确到 0.1m^2）

7. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $a\tan B=\dfrac{20}{3}$，$b\sin A=4$.

（1）求 $\cos B$ 和边长 a；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=10$，求 $\cos 4C$ 的值.

8. 已知在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a$、$b$、$c$分别是角$A$、$B$、$C$所对的边.

(1)求$\tan 2A$；

(2)若$\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$c=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

9. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c. 已知$a+b=5$，$c=\sqrt{7}$，且$4\sin^2\frac{A+B}{2}-\cos 2C=\frac{7}{2}$.

(1)求角C的大小；

(2)求$\triangle ABC$的面积.

综合能力拓展

10. 在$\triangle ABC$中，$C-A=\frac{\pi}{2}$，$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1)求$\sin A$的值；

(2)设$AC=\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积.

11. 在$\triangle ABC$中，A、B、C是三角形的三个内角，它们所对的边分别是a、b、c，且$b^2+c^2-a^2=bc$.

(1)求角A的大小；

(2)若$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，求角B的大小.