专科起点升本科

数学（二）

2004版

主编　张慧欣

根据教育部最新颁布的《复习考试大纲》编写

全国各类成人高等学校招生

考试复习教材

北京广播学院出版社

数学（二）

全国各类成人高等学校招生考试复习教材

—— 专科起点升本科

高等数学(二)

主编　张慧欣

北京广播学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学②/张慧欣主编.—北京:北京广播学院出版社,2002.9
全国各类成人高等学校招生考试复习教材.专科起点升本科
ISBN 7—81085—089—X

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 066166 号

出版发行:北京广播学院出版社
社　　址:北京市朝阳区定福庄南里 7 号　邮编:100024
经　　销:新华书店总店北京发行所
印　　刷:北京朝阳印刷厂有限责任公司

开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:17
字　　数:350 千字
版　　次:2003 年 10 月第 2 版　2003 年 10 月第 1 次印刷

本册定价:26.00

修订版前言

根据教育部关于从2003年起调整成人高校招生科目设置的通知：专科起点升本科统考科目按学校门类设置，不在按生源类别设置，统考科目为：政治、英语和专业基础课三门。专业基础课根据各学科门类的特点设置8门，分别为大学语文、艺术概论、高等数学（一）、高等数学（二）、民法、教育理论、生态学基础、医学综合、由招生院校按专业的需要，规定考生应试其中一门。

为了帮助广大考生掌握各应考课和考试的难点、重点，提高应试能力，我们组织长期在成人考试及教育岗位上经验十分丰富的专家和学者，特别还邀请参与大纲编写工作，考试命题，及参与阅卷工作的多名老师和研究人员，依据教育部颁布的最新成人高等学校招生复习考试大纲，新编写了《全国各类成人高等学校招生复习考试教材》。新编的本套教材内容丰富、详实，严格按照新大纲的要求结合了编者的多年的教学经验及考试命题趋向，题型的设计和复习内容充分体现素质教育的现代思想；在编写过程中我们既注重知识结构的系统性又突出难点、重点；既注重基本能力训练又显现综合能力的训练。在内容的选择与编排方面，充分考虑了成人学习的特点，各章节练习题模拟题贴近考试实际，针对性很强，目的在于全面提高考生的应试水平、能力和信心。

本套教材包括政治、英语、大学语文、艺术概论、高等数学（一）、高等数学（二）、民法、教育理论、生态学基础、医学综合。本套教材由教育部考试中心《中国考试》杂志何勇教授总策划，北京师范大学寇学敏教授、北京市成人教育考试指导中心赵士良教授参加编审。本套教材难免有不足之处，恳请广大读者朋友批评、指正。谢谢！

本丛书编写组

2003年9月

编写说明

为了帮助考生快捷复习、掌握应试内容，针对考试命题特点和应试考生的特点，根据教育部重新修订2002年版最新《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》，编写了本书。本书具有以下特点：

● 体现要求的层次性

考试大纲非常明确地指出了对每部分内容的要求，分成了了解和理解（概念理论），会、掌握和熟练掌握（方法和运算）等不同层次。本书首先把考试大纲要求列出在每章的开始部分“考试大纲”，让考生明确各章的要求，然后在每章的“知识要点”部分，主要侧重于大纲要求理解、掌握、熟练掌握的概念及方法的讲解和总结。

● 体现内容的难易度

考试大纲要求理解、掌握和熟练掌握的概念和方法具有不同的难度。为便于考生快速掌握难度适中的基本内容，本书在例题和习题的组织安排上，分成两个有难度差别的部分：例题分析一及习题一，例题分析二及习题二。如果读者时间较紧，可以只学习例题分析一及习题一。如果有时间的话，建议读者最好还是学习例题分析二及习题二，因为这非常有助于对一些概念的理解和方法的掌握。

● 强调基本突出重点

对于基本内容作到细致讲解，通过形式多样的例题，使读者能基本掌握基本内容；对于重点内容则通过加大讲解深度和宽度，力求读者在掌握基本内容的同时，熟练掌握重点内容。

● 注重总结

在知识点的讲解上，力求作到简明扼要、清晰、系统，突出总结性；在例题的讲解上，适当增加注释，对题目中使用的方法进行解释，指出应用时应当注意的问题，以便让读者能尽快获得举一反三的技巧。

不同于强调记忆性的学科学习，数学的学习特别强调理解。如果只是把全部内容记忆在脑中，而不去理解消化，那么在解题时很可能会明白题意思但不会解答。因此，特别提醒读者，在读书的时候，在作到眼到的时候一定要作到心到、手到，在练习和思考的过程中，加深对概念的理解，熟悉并掌握解题方法和技巧。这样，你会在掌握知识的同时，体会到数学的乐趣，从而掌握好数学，提高自己的逻辑思维能力。祝愿你在本书的帮助下，顺利通过考试！

由于笔者水平有限，疏漏差错之处仍恐难免，敬请读者多提宝贵意见，以便改正。

编者

2002年8月

目　　录

第一部分　函数　极限　连续

第二部分　一元函数微分学

第三部分　一元函数积分学

第四部分　多元函数微积分初步

第一部分　函数、极限和连续

第一章　函　　数

【考试大纲】

1. 理解函数的概念，会求函数的表达式、定义域及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值，会作出简单的分段函数图象.

2. 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像)，会求单调函数的反函数.

4. 熟练掌握函数的四则运算与复合运算.

5. 掌握基本初等函数的性质及其图象.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

【知识要点】

1. 函数的定义

设D为非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对每一个 $x\in \mathrm{D}$，都能由规则 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集D上的一个函数，记为

$$y=f(x),\qquad x\in \mathrm{D}$$

并称 x 为自变量，y 为因变量. 使函数 f 有定义的所有自变量取值的集合D，称为函数的定义域；集合 $\mathrm{Z}=\{f(x)\mid x\in \mathrm{D}\}$ 称为函数的值域.

例如，某一地区，一天24小时当中，气温随时间的变化关系，就是一个函数关系，这时自变量是时间 t，$t\in[0,24)$，即定义域 $\mathrm{D}=\{t\mid 0\leqslant t<24\}$，温度 T 随 t 的变化而变化，对于 $t_0\in[0,24)$，都有唯一的一个 T_0 与之对应. 我们用 $T=f(t)$ 来表示，"f"表示一天当中气温随时间的变化规律.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有以下三种：

(1) 解析法　用解析表达式表示函数的方法，如 $y=2x^2+1$，$y=\sin x$ 等. 高等数学中讨论的函数，大多由解析法表示，这种方法也叫公式法.

(2) 表格法　把自变量所取的值和对应的函数值，列成表格，来表示函数关系. 如常见的对数表、三角函数表等. 在研究社会经济现象时，常常采用这种表格法.

(3) 图示法　用图形表示函数的两个变量之间的变化关系. 优点是直观，一目了然，不足之处是精度不够，也不够完整.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用.

3. 函数的四种特性

(1) 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，使对任意的 $x\in$ D，恒有 $|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在集合 D 上有界；否则称 $f(x)$ 在 D 上无界；如果存在常数 M(或 m)，使对任意的 $x\in$ D，恒有 $f(x)<M$(或 $f(x)>m$)，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(或有下界).

显然，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

注意，一个函数是否有界，不仅与函数表达式有关，而且还与给定的集合 D 有关. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，但在 $(0.1,1)$ 内却有界.

(2) 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $\mathrm{I}\subset$ D，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；

当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，使函数 $f(x)$ 单调的区间称为单调区间.

判定函数单调性的常用方法是导数判别法.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x\in$ D，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in$ D，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

注：① 讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域必须是关于坐标原点对称；

② 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x\in$ D，有 $(x\pm T)\in$ D，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则在长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状.

4. 复合函数的定义

已知函数

$$y=f(u),\qquad u\in D_f$$
$$u=g(x),\qquad x\in D_g,u\in Z_g$$

如果 $D_f \cap Z_g \neq \phi$,则称函数

$$y = f[g(x)], \qquad x \in D = \{x \mid g(x) \in D_f \cap Z_g\}$$

为函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数,其中 y 为因变量,x 为自变量,u 称为中间变量. 显然 $D \subseteq D_g \setminus$.

例如,$y = \sin^2 x$ 可以看成由 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 复合而成.

注意:① 不是任何两个函数都能复合成复合函数,关键条件是 $D_f \cap Z_g \neq \phi$. 例如 $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 的定义域为空集.

③ 复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如,设 $y = \sqrt{u}$,$u = \cot v$,$v = \frac{x}{2}$,则得复合函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$,这里 u 及 v 都是中间变量.

5. 反函数及其存在定理

(1) 反函数的定义

设已知函数为 $y = f(x)$,如果由此解出的 $x = \Phi(y)$ 是一个函数,则称它为 $f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$,并称 $y = f(x)$ 为直接函数,习惯上,将函数 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注意: ① 函数 $x = \Phi(y)$ 与 $y = \Phi(x)$ 是同一个函数,所以当 $x = \Phi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数时,$y = \Phi(x)$ 也是 $y = f(x)$ 的反函数.

② 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数;且 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 反函数存在定理

若函数 $y = f(x)$,$x \in D_f$,$y \in Z_f$ 是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数 $x = f^{-1}(y)$,$y \in Z_f$,$x \in D_f$,此反函数也是严格单调增加(或减少)的.

(3) 求反函数的步骤

第一步:从直接函数 $y = f(x)$ 中解出 $x = \Phi(y)$;

第二步:将字母 x 与 y 互换,得 $y = \Phi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数.

6. 基本初等函数

基本初等函数包括:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 常数函数 $y = c$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,图形是一条平行于 x 轴的直线(如图 1—1). 显然这是个偶函数.

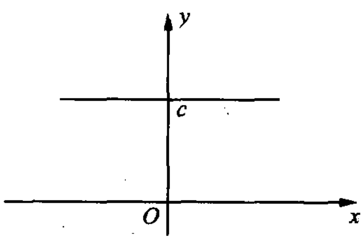

图 1—1

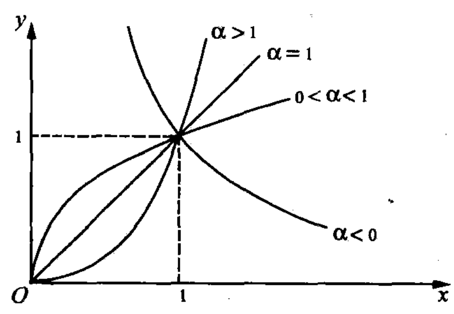

图 1—2

(2) 幂函数　$y = x^{\alpha}$(α 为实数)(图 1—2)

① 当 $\alpha > 0$ 时，它的图形通过原点$(0,0)$ 和点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

② 当 $\alpha = 0$ 时，它是常数函数 $y = 1$。

③ 当 $\alpha < 0$ 时，它的图形通过点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$ 内严格单调减少. 曲线 $y = x^{\alpha}$ 以 x 轴为水平渐近线，以 y 轴为垂直渐近线.

幂函数 $y = x^{\alpha}$ 随着实数α的不同，其定义域和性质都有很大的差别，然而不论α取何实数，它都在$(0,+\infty)$ 内有定义，其图形必通过点$(1,1)$. 且不是周期函数，在定义域内是无界的.

图 1－3　给出了九个常见的幂函数的图象，从中可以观察到各函数的定义域、值域、单调性及奇偶性.

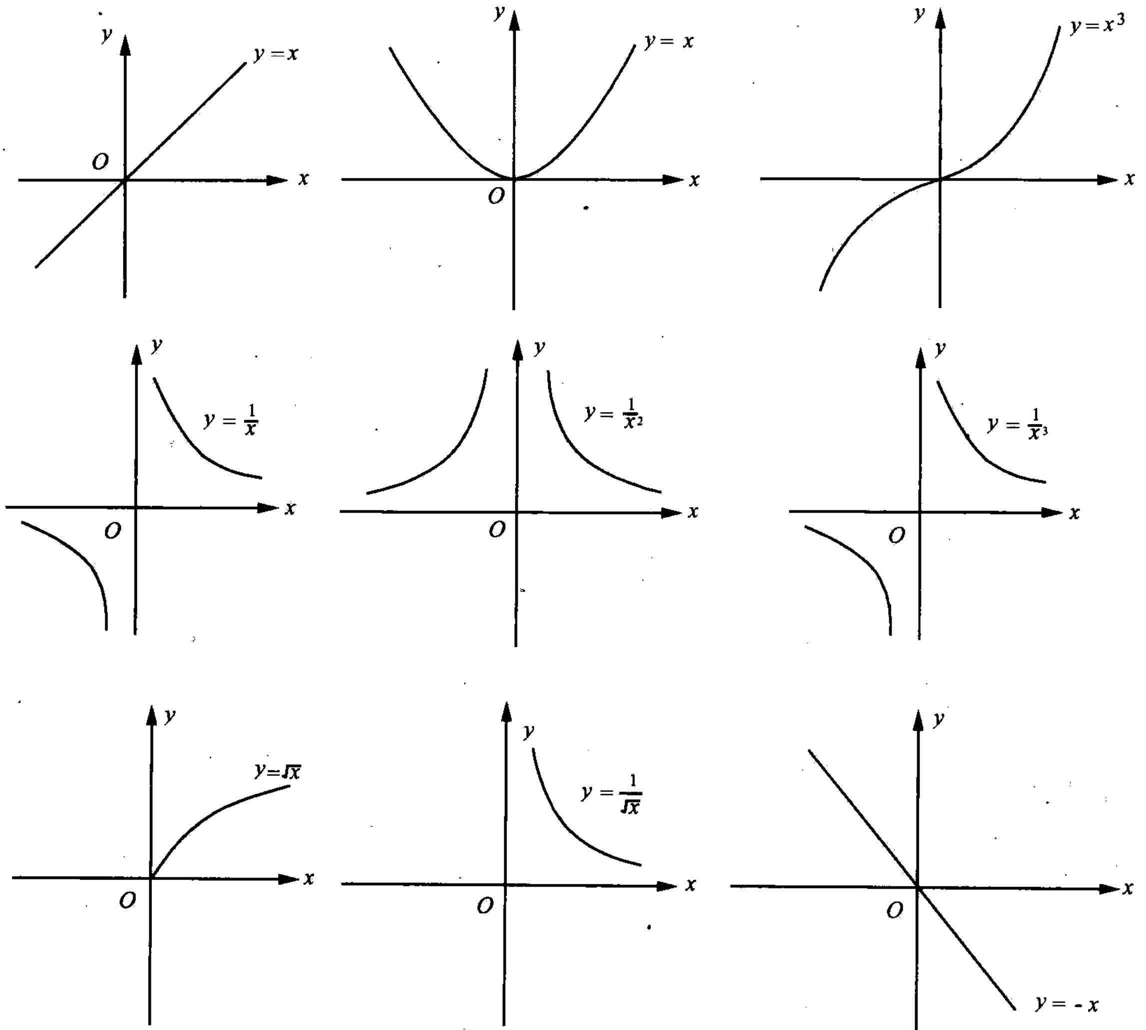

图 1－3

(3) 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $Z = (0, +\infty)$，它的图形在 x 轴的上方通过$(0,1)$点(图 1－4). 当 $a > 1$ 时，函数单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少，且曲线 $y = a^x$ 与 $y = \frac{1}{a^x}$ 关于 y 轴对称.

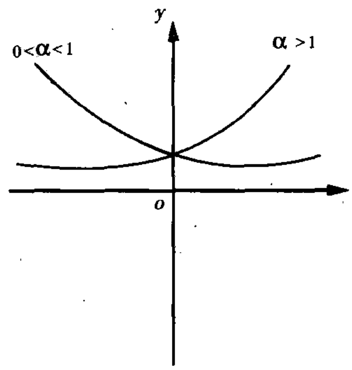

图 1－4

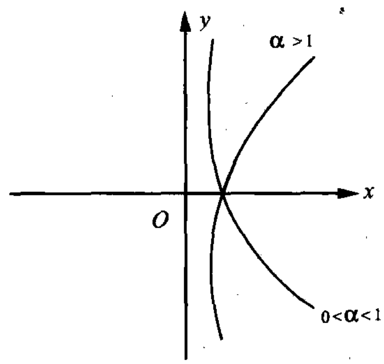

图 1－5

以无理数 e = 2.71828… 为底的指数函数 $y = e^x$ 是高等数学中常用的指数函数.

(4) 对数函数　$y = \log_a x$　$(a > 0, a \neq 1)$

它的定义域 $D = (0, +\infty)$，值域 $Z = (-\infty, +\infty)$，它的图形在 y 轴的右侧通过(1,0)点(图 1－5). 当 $a > 1$ 时，函数单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少. 曲线 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 关于 x 轴对称.

以无理数 e 为底的对数函数 $y = \log_e x$ 叫自然对数，简记作 $y = \ln x$. 它是高等数学中常用的对数函数.

指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数，其图象关于直线 $y = x$ 对称.

(5) 三角函数

三角函数有以下六个：

$$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x$$

$$y = \cot x \qquad y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

在高等数学中，三角函数的自变量 α 一律以"弧度"为单位. 例如 $x = 1$ 表示 x 等于 1 个弧度(约 57°).

① 函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，是奇函数；是周期函数，$T = 2\pi$；是有界函数，$|\sin x| \leqslant 1$；不是单调函数，但在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 其图形如图 1－6 所示.

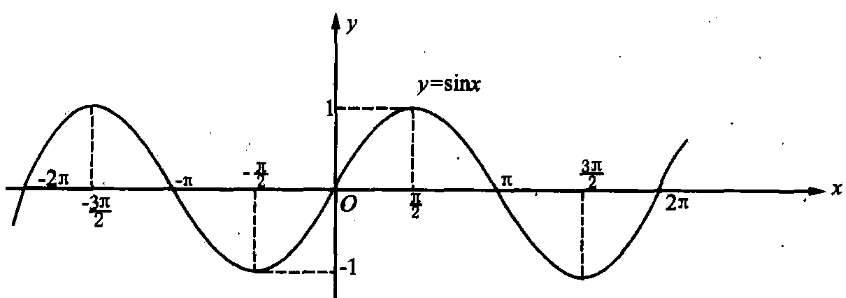

图 1－6

② 函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$. 是偶函数；是周期函数，$T=2\pi$；是有界函数，$|\cos x|\leqslant 1$；不是单调函数，但在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$内单调增加，在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$内单调减少，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 共图形如图 1－7 所示.

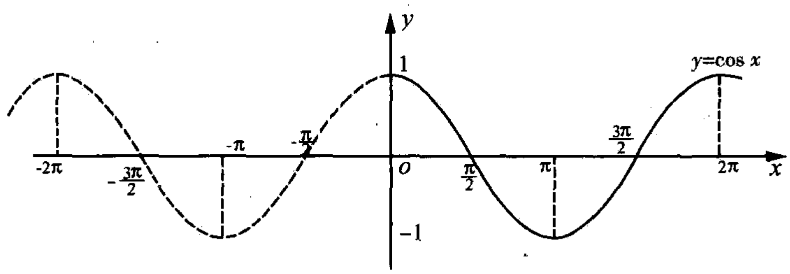

图 1－7

③ 函数 $y=\tan x$ 的定义域是除去点 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 后的其它实数($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$). 值域为$(-\infty,+\infty)$. 是奇函数；是周期函数，$T=\pi$；是无界函数；在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 其图形如图 1－8 所示.

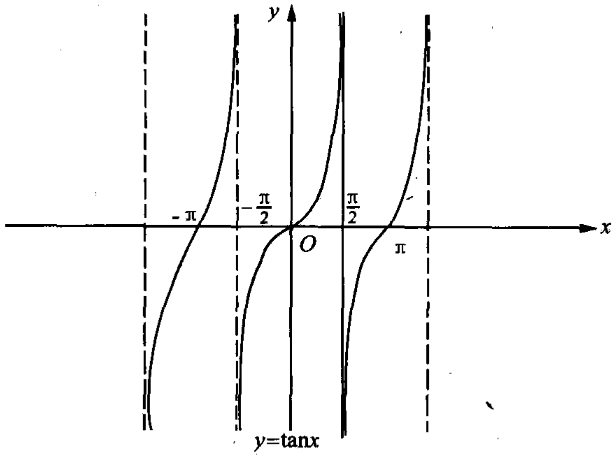

图 1－8

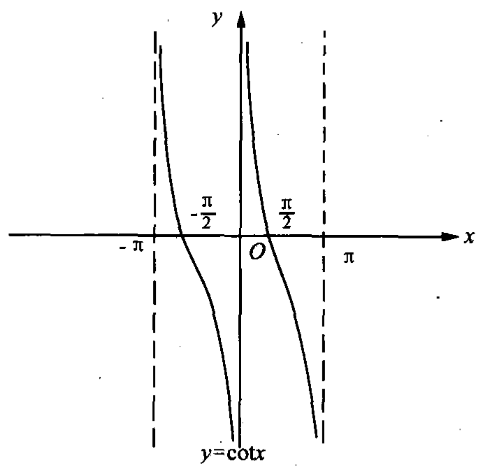

图 1－9

④ 函数 $y=\cot x$ 的定义域是除去点 $x=k\pi$ 后的其它实数($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$). 值域为$(-\infty,+\infty)$. 是奇函数；是周期函数，$T=\pi$；是无界函数；在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 其图形如图 1－9 所示.

(6) 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

$$y=\arcsin x \qquad y=\arccos x$$

$$y=\arctan x \qquad y=\operatorname{arccot} x$$

① 函数 $y=\arcsin x$ 是函数 $y=\sin x$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内的反函数. 它的定义域是