普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学教学丛书

复变函数与积分变换

主编 路线

编者 李长春 安晓峰

赵嘉琦 安玉萍

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

复变函数与积分变换

主　编　　路　线

编　者　　李长春　安晓峰

赵嘉琦　安玉萍

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书介绍复变函数、傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换的基本概念、理论和方法. 全书共8章, 主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数及其简单的应用、傅里叶变换、拉普拉斯变换及其简单的应用、Z变换及其应用等.

本书每章的后面都给出本章的小结, 便于读者复习和总结; 同时每章配有一定类型习题, 并在书后给出习题的参考答案或提示; 另外, 书后还给出5套综合测验题和参考答案, 可以帮助读者检测对所学知识系统掌握的程度. 附录中附有傅里叶变换简表、拉普拉斯变换简表和Z变换简表等, 可供学习时查用.

本书可作为高等院校工科类各专业学生的教材, 可供相关专业科技工作者和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/路线主编. —北京: 科学出版社, 2010

普通高等教育"十一五"规划教材·大学数学教学丛书

ISBN 978-7-03-028167-8

Ⅰ.复… Ⅱ.路… Ⅲ.①复变函数-高等学校教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第123321号

责任编辑: 张中兴 于俊杰/责任校对: 朱光光

责任印制: 张克忠/封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010年8月第一次印刷 印张: 16

印数: 1—3 500 字数: 320 000

定价: 28.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛书序

本丛书是为普通高等院校本科学生所编写的数学系列教材，是由长春地区五所普通高校具有丰富教学和科研经验的教师联合编写的，是集体智慧的结晶．本丛书从酝酿到出版经历了近十年的时间，几经修改终于成稿．在教材内容的编排上，我们一方面借鉴了国内一些品牌教材的先进模式，另一方面结合新形势下的新要求，并根据五所普通高校本科学生的特点，先后编写了逾百万字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼修订，逐步趋于完善．应该说，本套教材凝聚着五所高校几代数学教师的心血和汗水，希望能培养出更多的创新性人才．

本套教材包括《微积分(经管类)》、《概率论与数理统计》(两本)、《线性代数》、《计算方法简明教程》、《数学建模》、《复变函数与积分变换》．编者在取材上着眼于本科生未来的发展和当今世界科学技术的发展，充分反映国内外教学前沿信息和最新学术动态，本着“夯实基础、适当延伸，注重应用、强化实践”的原则，大胆摆脱了普通高等院校教材编写的传统套路，使这套教材具有很强的实用性、一定的可读性、较高的艺术性和丰富的实践性；同时还保持了数学知识的系统性、严密性、连贯性等特点，内容翔实，清晰易读，便于教学与自学．另外,本套教材充分考虑了有志报考研究生同学的需要，每一本教材都配备了丰富的、梯度配置的例题与习题，紧扣学生学习和报考研究生复习的需要，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义，可供普通高校理工科各专业使用．

本套教材从选题、大纲、组织编写到编辑出版，自始至终得到了科学出版社数理出版分社的支持，同时也得到了长春工业大学、吉林建筑工程学院、长春大学、长春工程技术师范学院、长春建筑学院教务处及数学系各位领导的支持和帮助，在此，我们一并表示衷心的感谢．

编　者

2010 年 3 月

前　言

复变函数课程的主要内容是讨论复数之间的相互依赖关系, 主要研究对象是解析函数.

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科. 早在 19 世纪, 一些著名数学家, 如 A.L. Cauchy (柯西, 1789~1857) 和 K. Weierstrass (魏尔斯特拉斯, 1815~1897) 与 G.F.B. Riemann (黎曼, 1826~1866) 等的工作为这门学科奠定了坚实的理论基础. 作为一种有力的工具, 复变函数论广泛地应用于自然科学的众多领域, 如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学和自动控制学等.

积分变换是通过积分运算, 把一个函数变成另一个函数的变换. 这里所说的积分变换是指傅里叶变换、拉普拉斯变换与 Z 变换, 它与复变函数有着密切的联系. 它的理论与方法不仅在数学的许多分支中, 而且在其他自然科学和各种工程技术领域中均有广泛的应用.

复变函数又称复分析, 是实变函数微积分的推广与发展. 因此, 它不仅在内容上与实变函数的微积分有许多相同之处, 而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也与其很类似. 当然, 复变函数也有自身的特点, 有自己的研究工具和方法. 在学习过程中, 应注意其与微积分理论异同点, 从而加深理解, 同时注意复变函数本身的特点, 并掌握它自身所固有的理论与方法. 积分变换与复变函数一样, 也是在实变函数微积分的基础上发展起来的. 因此, 在学习过程中, 也应注意分清异同点, 只有这样, 才能抓住要点, 融会贯通.

编写本书的目的是为理工类本科生提供一本比较系统完整的 “复变函数与积分变换” 教材. 编者一方面汇总国内同类教材的主要优点, 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起, 另一方面, 融合了吉林工程技术师范学院众多教师和兄弟院校的教师长期讲授该门课程的教学经验体会. 既保证了教学质量的提高, 又压缩了学时数. 完成本教材的基本教学的内容大约要 48 学时, 书中打 “*” 号的部分, 可供有关专业选讲. 本书力求思路清晰、推理简洁且可读性强, 重视对学生能力的培养, 注意提高学生的基本素质, 如在例题与习题设计方面, 内容丰富, 难易题目呈梯度设置, 有利于学生掌握所学的内容、提高分析问题与解决问题的能力. 本书在每一章后还精心设计了 “本章小结” 与 “习题”, 可帮助读者更清楚地把握学习要点, 更深刻地理解该章的主要内容, 同时, 还精心设计了五套综合测验题, 可以帮助读者检测对所学知识系统的掌握程度. 该教材可供高等工科院校的机械类、电类及与电类有关的各专业使用, 也可供其他专业选用, 此外, 可作为工程技术人员自学复

变函数与积分变换的参考书.

本书共分 8 章, 外加 4 个附录, 其中第 1 ~ 3 章、综合测验题由路线教授执笔; 第 4 章由路线与李长春共同执笔; 第 5 ~ 7 章由李长春副教授执笔; 第 8 章由安晓峰副教授执笔. 闫厉和潘伟两位教授审阅了全书. 本书在编写过程中, 得到吉林工程技术师范学院的领导以及科学出版社的大力支持, 才使这本书能尽快与读者见面. 在此, 一并表示感谢!

由于编者的水平有限, 书中难免存在不妥之处, 诚恳专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

Luxian621029@126.com

lichangchunqq@126.com

An.xf@163.com

2010 年 6 月于吉林工程技术师范学院

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

复数理论的产生与发展经历了漫长而又艰难的岁月，复数是 16 世纪人们在解决三次代数方程问题时而引入的．在 1545 年，数学物理学家卡尔丹 (J. Cardan, 1501~1576) 在其所著《重要的艺术》一书中列出 "将 10 分成两部分，使其积为 40" 的问题，即研究方程 $x(10-x)=40$ 的根，根据一元二次方程求根公式，它求出根的形式分别为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，两根之积为 $25-(-15)=40$．但由于这只是单纯从形式上推广而引进复数，并且人们之前就已断言负数开平方是没有意义的，因而复数在历史上长期不能为人们所接受．"虚数" 这一名词恰好反映了这一点．

复变函数论 (theory of complex variable functions)，又称复分析 (complex analysis)，产生于 18 世纪．数学家欧拉、达朗贝尔 (J.L.R. D'Alembert, 1717~1783) 与拉普拉斯 (P.S. Laplace, 1749~1827) 等逐步阐明了复数的几何意义与物理意义，建立了系统的复数理论，从而使人们终于接受并理解了复数．到了 19 世纪，复变函数理论得到了全面发展，三位杰出的数学家柯西、魏尔斯特拉斯与黎曼为这门学科的发展奠定了坚实的基础．当时，复变函数论这个新的数学分支统治了 19 世纪的数学，所以，数学家认为复变函数论是最丰富的数学分支，并且成为这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一．20 世纪初，复变函数理论又有了很大的进展，数学家列夫勒 (M.G. Mittag-Leffler, 1846~1927)、庞加莱 (J.H. Poincaré, 1854~1912) 与阿达玛 (J.S. Hadamard, 1865~1963) 等都做了大量的研究工作，开拓了复变函数理论更广阔的研究领域，为这门学科的发展作出了重要贡献．我国老一辈数学家在复变函数理论的研究中也作出了重要的贡献，如著名数学家陈建功 (1893~1971)、华罗庚 (1910~1985)、杨乐 (1939~) 等，他们在国际数学界也享有很高的声誉．

复变函数理论发展到今天已经有一百多年的历史，是一门相当成熟的学科．它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等多个学科．更重要的是，它在其他学科也得到了广泛的应用，很多复杂的计算都用它来解决．例如，高等数学中一些复杂的定积分与广义积分问题、物理学中很多不同的稳定平面场中流量和势等问题．茹柯夫斯基 (H.E. Жуковский 1847~1921) 在设计飞机的时候，就采用复变函数理论解决了飞机机翼的结构问题．他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面问题上也作出了贡献．

复变函数的一切讨论都在复数域内进行. 本章首先复习中学复数有关知识, 并作一些补充; 其次, 引入复平面上的点集、区域、若尔当曲线以及复变函数的极限与连续等概念; 最后引入复球面与无穷远点的概念. 在学习的过程中, 要注意这些概念与高等数学中相关概念的区别与联系.

1.1 复数的基本概念

1.1.1 复数的概念

定义 1.1.1 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为**复数** (complex number), 其中 i (即 $\mathrm{i}^2=-1$ 或 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$) 称为**虚数单位** (imaginary unit), 实数 x 称为复数 z 的**实部** (real part), 实数 y 称为复数 z 的**虚部** (imaginary part), 并分别记为 $x=\mathrm{Re}\,(z)$, $y=\mathrm{Im}\,(z)$. 例如, 对于复数 $z=3-2\mathrm{i}$, 有 $\mathrm{Re}\,(z)=3$, $\mathrm{Im}\,(z)=-2$.

注 1.1.1 当 $x=0, y\neq 0$ 时, $z=y\mathrm{i}$ 称为**纯虚数** (pure imaginary); 在工程技术方面, 虚数单位有时用 "$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$" 表示, 主要是为了区别于电流.

注 1.1.2 当 $y=0$ 时, $z=x+0\mathrm{i}$ 看成实数 x. 所以, 复数是实数的推广.

注 1.1.3 $z=x+\mathrm{i}y=0 \Leftrightarrow x=0, y=0$.

注 1.1.4 两复数相等, 当且仅当它们的**实部和虚部分别相等**.

例题 1.1.1 将复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 表示为 $x+\mathrm{i}y$ 的形式.

解法 1 因为 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$, 所以

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

解法 2 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}.$ □

例题 1.1.2 当实数 x, y 为何值时, 等式 $\dfrac{(x+1)+\mathrm{i}(y-3)}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立?

解 由 $\dfrac{(x+1)+\mathrm{i}(y-3)}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$, 得

$$(x+1)+\mathrm{i}(y-3)=-1+\mathrm{i}.$$

根据两复数相等, 比较等式两端的实、虚部, 有 $\begin{cases} x+1=-1 \\ y-3=1 \end{cases}$, 解得 $x=-2, y=4$. □

1.1.2 复数的几种常见表示方法

1. 复数的代数表示 (用实部与虚部表示)

$z=x+\mathrm{i}y=\mathrm{Re}\,(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$, 称为复数 z 的**代数表示**.

2. 复数的点表示

根据图 1.1.1 知道, 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x,y) 一一对应, 因此, 可以在直角坐标系的平面点来表示复数, 通常把横轴叫**实轴**或 x 轴, 纵轴叫**虚轴**或 y 轴, 这种用来表示复数的平面称为**复平面** (complex plane) (或 **Gauss 平面**), 记作 z 平面或 w 平面.

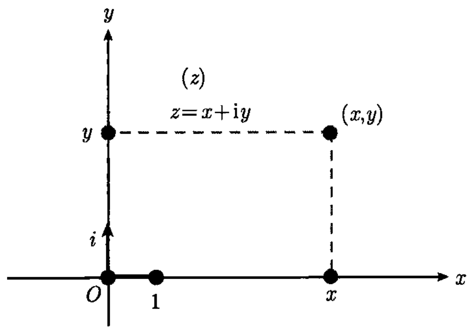


图 1.1.1

复数 z 可以表示为 (x,y), 即 $z=(x,y)$, 称为复数 z 的**点表示**.

3. 复数的向量表示

根据图 1.1.2 知道, 复数 $z=x+\mathrm{i}y(\neq 0,\infty)$ 可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示, 即 $z=\overrightarrow{OP}$, 称为复数 z 的**向量表示**, 其中向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的**模**或复数 z 的**绝对值**, 记为 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$.

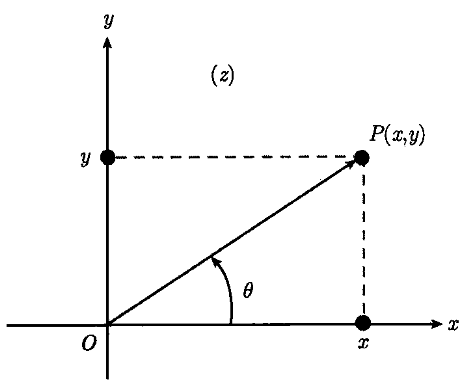


图 1.1.2

4. 复数的三角表示

根据图 1.1.2 知道, 实轴正向与非零复数 z 所对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 之间的夹角 θ $\left(\theta \text{ 满足 } \tan\theta=\dfrac{y}{x}\right)$ 称为**复数 z 的辐角** (Argument), 记为 $\theta=\operatorname{Arg} z$.

任意一个非零复数 z 均有无穷多个辐角, 如果以 $\theta_0 = \arg z$ 表示其中的一个特定值, 且满足条件: $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, 则该值称 $\operatorname{Arg} z$**的主值或主角或主辐角**, 并且有公式

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.1.1}$$

注 1.1.5　当 $z = 0$ 时, 其模为零, 辐角不确定.

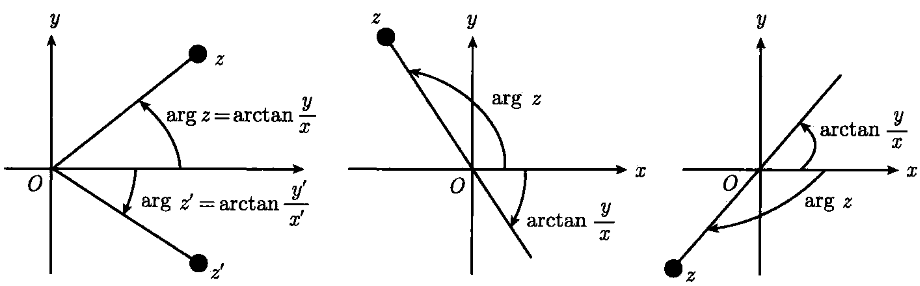
注 1.1.6　任意一个非零复数 z 均有辐角, 并且有无穷多个辐角.

注 1.1.7　当 $z \neq 0$ 时, $\operatorname{Arg} z$ 的主值有两种

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi \quad 与 \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}.$$

结合图 1.1.3 (a), (b), (c), 可知两种主值的关系如下:

$$\underset{z\neq 0}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & 当\ x > 0, y\ 为任意实数, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0 \geqslant 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$



(a)　　(b)　　(c)

图 1.1.3

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 复数 $z(\neq 0, \infty)$ 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.1.3}$$

称为复数 z 的**三角表示或极坐标表示**.

5. **复数的指数表示**

根据欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 与式 (1.1.3), 复数 $z(\neq 0, \infty)$ 可以表示为

$$z = re^{i\theta} \tag{1.1.4}$$

称为复数 z 的**指数表示**.

注 1.1.8　一个非零复数用三角形式表示或指数形式表示时, 其辐角 $\theta = \operatorname{Arg} z$ 或 $\arg z$. 由于 $\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z) = \cos(\arg z) + i\sin(\arg z)$, 所以在计算时, 取 $\theta = \arg z$ 方便.

例题 1.1.3　复数能否比较大小, 为什么?

答　不能. 实数能比较大小, 是因为实数有序, 而复数是无序的, 所以不能比较大小. 假设复数有大小, 其大小关系应与实数中大小关系保持一致 (因为实数是复数的特例), 不妨取 0 和 i 加以讨论: 因为 $i \neq 0$, 假设 $i > 0$, 则 $i^2 > 0$, 得 $-1 > 0$, 显然矛盾; 假设 $i < 0$, 则 $i^4 < 0$, 得 $1 < 0$, 显然矛盾.

注 1.1.9　复数的模、实部和虚部都是实数, 主辐角也是实数, 都可比较大小.

例题 1.1.4　判断下列命题是否正确:

(1) $7 + 5i > -1 + 2i(\times)$;　(2) $\arg(-1 + 2i) > \arg(7 + 5i)(\surd)$;

(3) $\operatorname{Im}(7 + 5i) > \operatorname{Re}(7 + 5i)(\times)$.

例题 1.1.5　已知流体在某点 M 的速度 $v = -1 - i$, 求其大小和方向.

解　大小: $|v| = \sqrt{2}$;

方向: $\arg v = \arctan \dfrac{-1}{-1} - \pi = -\dfrac{3}{4}\pi$.　□

例题 1.1.6　求 $\operatorname{Arg}(-3 + 4i)$ 及 $\operatorname{Arg}(2 - 2i)$, 并分别指出它们的主值.

解　运用辐角定义 (1.1.1) 与 (1.1.2), 可以得到

$$\operatorname{Arg}(-3 + 4i) = \arg(-3 + 4i) + 2k\pi = \arctan \frac{4}{-3} + \pi + 2k\pi,$$

$$\operatorname{Arg}(2 - 2i) = \arg(2 - 2i) + 2k\pi = \arctan \frac{-2}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

$\operatorname{Arg}(-3 + 4i)$ 的主值为 $\pi - \arctan \dfrac{4}{3}$, $\operatorname{Arg}(2 - 2i)$ 的主值为 $-\dfrac{\pi}{4}$.　□

例题 1.1.7　将复数 $z = -1 - \sqrt{3}i$ 化为三角表示式与指数表示式.

解　$r = |z| = \sqrt{1 + 3} = 2$, 因为点 z 在第三象限, 根据式 (1.1.2), 所以

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

再根据式 (1.1.3) 与式 (1.1.4), 分别有

三角表示式为 $z = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z = 2e^{\left(-\frac{2\pi}{3}\right)i}$.　□

例题 1.1.8　将复数 $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\ (0<\varphi<\pi)$ 化为指数形式.

解

$$
\begin{aligned}
&1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\\
=&2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\\
=&2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]\\
=&2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$
□

1.2　复数的一些基本运算及其性质

实数之间可以进行一些运算, 并且有一些运算性质. 类似地, 复数也有一些运算和一些性质, 具体情况如下.

1.2.1　复数的一些基本运算

1. 复数的虚部与实部

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 则 $\mathrm{Re}\,(z)=x$, $\mathrm{Im}\,(z)=y$.

2. 复数的四则运算

设两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则有

加、减法　$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

乘法　$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$;

除法　$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad z_2\neq 0.$

注 1.2.1　复数的四则运算封闭. 全体复数构成的集合称为**复数域** (complex number field), 记作 $\mathbf{C}$. 复数域 $\mathbf{C}$ 可以看成实数域 $\mathbf{R}$ 的扩充.

3. 复数的模

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 则 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$. 如果有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则有 $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, 称为 z_1,z_2 **两点的距离**, 记作 $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$.

4. 复数的共轭

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 则称 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数** (complex conjugate quantity).

如图 1.2.1 所示, $z=x+\mathrm{i}y$ 与 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 关于 x 轴对称. 当 $\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$ 时, 则 $z=\bar{\bar{z}}=\overline{x-\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y$.

5. 复数的乘幂

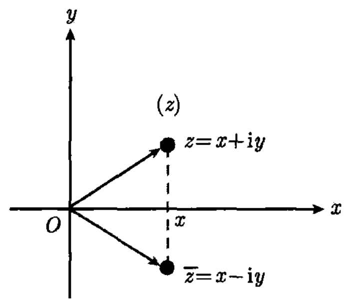


图 1.2.1

设 $n(n \geqslant 2)$ 是正整数, $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\neq 0, \infty)$, 则复数 z 的 n 次幂, 记作 $z^n = \overbrace{zz\cdots z}^{n} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. 特别地, 当 $|z| = 1$ 时, 有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \qquad (1.2.1)$$

(1.2.1) 式称棣莫弗 (A. DeMoivre, 1667~1754) 公式.

6. 复数的方根

设 $n(n \geqslant 2)$ 是正整数, 由方程 $\omega^n = z(z \neq 0, \infty)$ 所确定的复数 ω 称为**复数 z 的 n 次方根**, 记作 $\omega = \sqrt[n]{z}$. 计算公式为

$$\omega = \omega_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}}, \qquad (1.2.2)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, θ 是 z 的辐角.

下面是公式 (1.2.2) 推导过程.

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, $\omega = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, 则由 $\omega^n = z$ 及乘方运算, 有 $\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. 考虑辐角的多值性, 得 $\rho^n = r$, $n\varphi = \theta + 2k\pi(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 从而有

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

即

$$\omega = \omega_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\theta+2k\pi}{n}\mathrm{i}},$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

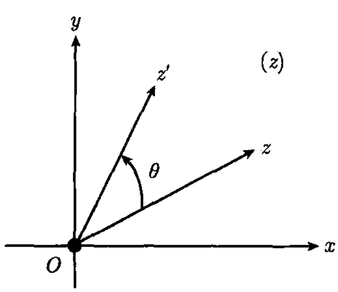


图 1.2.2

7. 复数的旋转

如图 1.2.2 所示, 设复数 $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$. 复数 $z' = x' + \mathrm{i}y'$ 是在复数 z 的基础上, 逆时针旋转 θ 得到的, 则有 $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 其中 $\theta = \mathrm{Arg}\,\dfrac{z'}{z}$ 或 $\theta = \arg\dfrac{z'}{z}$.

旋转公式为 $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$.

例题 1.2.1　复数可以用向量表示, 复数的运算与向量的运算是否相同?