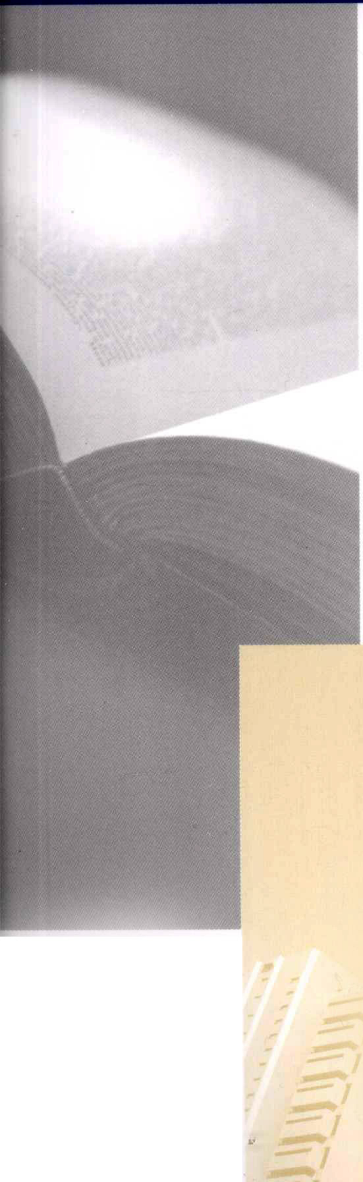
高等院校经济学管理学系列教材
GAODENG YUANXIAO JINGJIXUE GUANLIXUE XILIE JIAOCAI



概率论与数理统计（习题精选）

GAILÜLUN YU SHULITONGJI (XITI JINGXUAN)

王蓉华 徐晓岭
叶中行 白云芬 ⊙编

北京大学出版社

概率论与数理统计(习题精选)

GAILÜLUN YU SHULITONGJI (XITI JINGXUAN)

王蓉华 徐晓岭
叶中行 白云芬 ⊙编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(习题精选)/王蓉华等编. —北京:北京大学出版社，2010.8
(高等院校经济学管理学系列教材)
ISBN 978-7-301-17565-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①概率论-高等学校-习题 ②数理统计-高等学校-习题 Ⅳ. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 144522 号

书　　　名:概率论与数理统计(习题精选)
著作责任者:王蓉华　徐晓岭　叶中行　白云芬
责 任 编 辑:朱梅全　王业龙
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-17565-1/O·0818
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn　电子邮箱:law@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752027
　　　　　　出版部 62754962
印　刷　者:北京宏伟双华印刷有限公司
经　销　者:新华书店
　　　　　　730 毫米×980 毫米　16 开本　35 印张　666 千字
　　　　　　2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
定　　　价:58.00 元

前　言

《概率论与数理统计》自出版发行以来，已被上海对外贸易学院及上海海洋大学等高等院校作为教材使用并得到了广大师生的好评. 在使用过程中，任课教师及部分学生来信或通过邮件方式对教材的使用谈了收获和体会，并提出希望针对教材出版一本配套的习题指导书.

这次应北京大学出版社之邀，编写与《概率论与数理统计》相配套的习题指导书——《〈概率论与数理统计〉(习题精选)》. 本书的编排分两部分，第一章至第五章是概率论，第六章至第十章是数理统计. 每一章由内容提要、例题精选、习题解答和阅读材料四部分组成，并将一些新的研究成果融入本书之中，考虑到不同院校和不同专业的需要，有些章节的内容作了较多的充实，读者在使用中可以根据自身实际情况作取舍.

本书是上海师范大学的王蓉华、上海对外贸易学院的徐晓岭、上海交通大学的叶中行和石家庄学院的白云芬四位作者通力合作完成的. 本书由王蓉华组织和统筹编写，其中叶中行编写了第一、四、五章的习题解答，白云芬编写了第二、三章的习题解答，王蓉华编写了第六、七章的习题解答以及第一章至第五章的习题精选与阅读材料，徐晓岭编写了第八、九、十章的习题解答以及第六章至第十章的习题精选与阅读材料，王蓉华和叶中行对全书进行了统稿.

本书的写作得到了北京大学出版社的大力支持，同时还得到了上海对外贸易学院的顾蓓青老师、上海师范大学数理学院的部分研究生——吴慧玲、井维兰、申永惠和张平的大力协助，在此一并深表感谢!

本书在写作中得到了上海市教委 2009 年概率论与数理统计重点课程(编号：A-2802-10-001012)建设的资助.

由于我们水平有限，本书一定存在不少缺点，真诚地欢迎读者和专家批评指正.

作者

2010 年 3 月于上海

目　录

第一章　随机事件与概率

一、内 容 提 要

1. 随机现象

在现实生活中,有的过程会产生多种可能的结果,但究竟会出现哪种结果却是不确定的,这种现象被称为**随机现象**.

2. 随机试验

概率论约定为研究随机现象所作的**随机试验**应具备以下三个特征:

(1) 重复性:在相同条件下试验是可重复的;

(2) 确定性:试验的全部可能结果不止一种,且都是事先可以知道的;

(3) 不确定性:每一次试验都会出现上述可能结果中的某一种结果,至于是哪一种结果则事前无法预知.

为简单计,今后凡是随机试验皆简称试验,并记之以英文字母 E.

3. 样本空间

试验的每种可能结果称为**样本点**,用希腊字母 ω 表示.

全体样本点的集合称为试验的**样本空间**,用 Ω 表示.

注　样本空间并不完全由试验所决定,它部分地取决于实验的目的.

样本空间在大多数应用中可以分为三类:

(1) 样本空间只可能包含有限结果. 如在掷一枚均匀硬币的试验中只有两种可能的结果.

(2) 样本空间是可数无穷的. 即试验结果与可以计数的整数一一对应.

(3) 样本空间是不可数无穷的,或者是连续的. 即试验结果可以想象为落在一个充分大的实数区间里.

在许多情况下,不必要区分有限样本空间和可数无穷的样本空间. 因此,如果样本空间是有限的或是可数无穷的,称它是可数的样本空间. 习惯上,把可数样本空间当做离散的样本空间,而把不可数样本空间当做连续的样本空间.

注　看似相同的试验,不同的试验目的要求的样本空间可能不同.

4. 随机事件

随机试验的结果称为**随机事件**,简称事件.用英文大写字母 $A,B,\cdots$ 来表示.事实上,事件就是样本空间 Ω 的子集合.

随机事件可以分为:

(1) 对含有有限个或可数个样本点的样本空间,可将其任意一个子集称作事件.

(2) 对含不可数个样本点的试验而言,可将试验的样本空间的任意一个子集称作事件.

(3) 对具有不可数个样本点的样本空间而言,不能将其任意子集称作事件.

5. 事件与集合的对应

事件的相互关系与运算同集合论中集合的相互关系与运算等概念对应.假设涉及的集合 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 等都是 Ω 的子集,则:

(1) 事件的包含—集合的包含

集合 $A\subset B$ 即"A 包含于 B",意为 A 中元素都在 B 中,或说如果 $\omega\in A$,必有 $\omega\in B$.对应于事件,表示 A 的样本点都在 B 中,即当 A 的样本点出现于试验结果 B 之中,即 A 发生时,B 当然也就发生了,或说"A 的发生必导致 B 的发生".

(2) 事件的相等—集合的相等

集合 A 和 B 相等,并记为 $A=B$,是说"$A\subset B$ 且 $B\subset A$".对应于事件,称 A 和 B 相等,记为 $A=B$,就是"如果 A 发生,则 B 必然发生,同样如果 B 发生,则 A 必然发生".

注 在一次试验中,相等的事件含有相同的样本点,相等的两个事件要么同时发生要么同时不发生.

(3) 事件的并(和)—并集

集合 A 和 B 的并集记为 $A\cup B$,它的元素或者属于 A,或者属于 B(当然有的可能同时属于 A 和 B),即 $A\cup B=\{\omega:\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.对应事件的并 $A\cup B$ 表示"A 或 B 至少有一个发生".

推广 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示"n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生";$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots$ 表示"可数个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 中至少有一个发生".

(4) 事件的交(积)—交集

集合 A 和 B 的交集记为 $A\cap B$,它是由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合,即

$$A\cap B=\{\omega:\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$$

对应于事件的交 $A\cap B$ 表示"A 和 B 同时发生",$A\cap B$ 常简记作 AB.

推广　$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示"n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$同时发生",$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cdots$表示"可数个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$同时发生".

(5) 逆事件(对立事件)—补集

Ω 的子集 A 的补集记为 $\overline{A}$,它是由属于 Ω 但不属于 A 的元素构成的集合,因为仅牵涉到属于 Ω(样本空间)的点,集合 $\overline{A}$ 就是由那些不属于 A 的元素组成的. 记为

$$\overline{A}=\{\omega:\omega\in\Omega \text{ 且 } \omega\notin A\}$$

对应于事件,$\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生,称作**事件 A 的逆事件**. 显然有 $A\cup\overline{A}=\Omega$ 及 $A\overline{A}=\varnothing$.

(6) 事件的差—差集

集合 A 与 B 的差集 $A-B$ 由 A 中那些不属于 B 的元素全体组成. 对应地,事件的差 $A-B$ 表示"A 发生而 B 不发生",即 $A-B=A\overline{B}$.

(7) 互斥(或不相容)—事件不交集

在集合论中,若 $AB=\varnothing$,则表明 A,B 没有公共元素,它们**互不相交**. 对应于事件,若 $AB=\varnothing$,则表明 A,B 不同时发生,称 **A 与 B 互斥(或不相容)**.

(8) 必然事件和不可能事件—样本空间和空集

称试验必然会出现的结果为**必然事件**. 必然事件含有样本空间的全部样本点,因此用样本空间的字母 Ω 表示必然事件. 不可能出现的结果称作**不可能事件**,用$\varnothing$表示.

6. 事件的运算规律

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

推广　$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i),A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i),\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=$

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

7. 频率与概率

(1) 频率定义

称在相同条件下所做的 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 为 A 发生的频数，并称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

事件发生的频率在一定程度上反映了事件发生的可能性大小. 当试验次数 n 足够大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，此时频率能够真实地反映事件发生的可能性大小.

(2) 频率的基本性质

(i) 有界性：频率介于 0 与 1 之间；

(ii) 规范性：必然事件的频率为 1；

(iii) 有限可加性：假设 A 和 B 是互斥事件，n_A，n_B 和 $n_{A\cup B}$ 分别表示在最初 n 次试验中事件 A，B 和 $A\cup B$ 发生的次数，则 $\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}$.

推广 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥，则 $\frac{n_{\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i}}{n}=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{n_{A_i}}{n}\right)$.

(3) 概率的统计定义

在相同条件下所做的 n 次试验中，当 $n\to\infty$ 时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数 p 附近，称此常数 p 为**事件 A 发生的概率**，记作 $P(A)=p$. 此定义是建立在试验及其统计数据的基础上，称之为**概率的统计定义**.

(4) 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$，它具有以下三个基本性质：

(i) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(iii) 可列可加性：如果 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 是 Ω 中任意一列两两互斥的事件(即 $A_iA_j=\varnothing$，当 $i\neq j$ 时)，无论有限或无限，如果 $B=A_1\cup A_2\cup A_3\cdots$ 表示事件“至少出现一个 A_i”，则 $P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$ 或表示为 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率的其他性质：(a) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(b) $P(\varnothing)=0$.

注　不可能事件的概率为 0，反之，不成立.

(c) 有限可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(d) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$.

(e) (加法定理)如果 A_1 和 A_2 是任何事件，不必是互斥事件，则

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$

推广　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任何事件，不必是互斥事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

8. 古典概型

(1) 古典概型的定义

设试验 E 的样本空间有有限多个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，且每个样本点出现的可能性相同，称此试验为**古典概型**.

注　古典概型的样本点具有有限等可能性.

(2) 一般古典概型题目的解题步骤

(i) 判断试验为古典概型，即试验结果具有有限等可能性；

(ii) 分析样本的构成，重要的是能计算出样本空间中样本点个数 n；

(iii) 考察所讨论的事件 A 的构成，计算 A 包含的样本点个数 n_A；

(iv) 由公式 $P(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 计算.

9. 乘法原理

假设一项试验有 m 个步骤，实施第 $k(k=1,2,\cdots,m)$ 个步骤有 n_k 个不同的方案，则完成此项试验共有 $\prod\limits_{k=1}^{m}n_k$ 个不同方案.

10. 两个事件的独立性

称两个事件 A 和 B 互相独立(或者构成统计意义下的独立)，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$.

注　(1) 任意事件均与 Ω(或 $\varnothing$)相互独立；

(2) 设事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 亦相互独立;

(3) 当 A,B 都具有正概率时,若 A,B 独立,则 $P(AB)\neq 0$,从而 A,B 相容而不是互斥;而当 A,B 互斥时,则因 $P(AB)=0$,但 $P(A)P(B)\neq 0$,所以 A,B 不独立.

11. 多个事件的独立性

称三个事件 A_1,A_2,A_3 两两独立,如果$\begin{cases}P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)\\P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)\\P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)\end{cases}$

进一步称 A_1,A_2,A_3 互相独立,如果上式成立,并且 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$也成立.显然互相独立强于两两独立.

推广 (1) 称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两相互独立,如果对任何 $i\neq j$,$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$;

(2) 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足以下 2^n-n-1 个等式:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$
$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\quad 1\leqslant i<j<k\leqslant n$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注 (i) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的相互独立性保证了其中的任意 $k(1<k\leqslant n)$个事件亦相互独立,称一列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是相互独立的,如果其中任意有限多个事件相互独立;

(ii) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的相互独立性保证了其中的任意一部分事件换成各自的对立事件后亦相互独立;

(iii) 在实际应用中,对于事件的独立性往往不是通过定义来判断的,而是根据实际意义或题目条件来判断的.

12. 伯努利概型

像掷硬币试验那样只有两种可能结果 A 与 $\bar{A}$ 的试验称之为**伯努利(Bernoulli)试验**.

称独立重复进行的 n 次伯努利试验为 **n 重伯努利试验**.称独立重复进行的可数次伯努利试验为一个**伯努利独立试验序列**.

注 设伯努利试验中事件 A 发生的概率为 $p(p>0)$,如果记 n 重伯努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率为 $P_n(k)$,则 $P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}$,$k=0,1,2,\cdots,n$,其中 $p+q=1$.

13. 条件概率

设 A,B 为两个事件,若 $P(B)>0$,则定义事件 B 发生条件下事件 A 发生的**条件概率**为:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

注　此定义适用于任何随机试验(而非只适用于古典概型)的条件概率定义,它同时提供了用无条件概率计算条件概率的方法.条件概率仍是概率,因此具备概率的三个基本性质:

(1) 非负性:$0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$P(\Omega|B)=1$;

(3) 可列可加性:对两两互斥的事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B)$$

除此之外,也具备概率的其他性质.

推广　如果 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个事件,给定 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 出现,那么 A_n 的条件概率由下面的公式给出:$P(A_n|A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-1})=\dfrac{P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$.

14. 乘法公式

设 A,B 为两个事件,则当 $P(B)>0$ 时,$P(AB)=P(B)P(A|B)$,称此公式为**乘法公式**.

注　设 $P(B)>0$,则事件 A,B 相互独立的充要条件是:$P(A|B)=P(A)$.

推广　设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

15. 全概率公式和贝叶斯公式

为了引进全概率公式和贝叶斯公式,首先引进分割的定义.

(1) 分割的定义:假设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是某试验的样本空间 Ω 的一组互不相容的事件,也就是满足 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,如果还满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,则称事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个**分割**.即任两个 B_i 不可能同时出现,但其中一个必须出现.或称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成 Ω 的一个完备事件组.

(2) 全概率公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个分割,且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意的事件 A 有:$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$,通常称此公式为

全概率公式.

(3) 贝叶斯公式：如果观测到事件 A 实际发生，要计算条件概率 $P(B_j|A)$，则

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_jA)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

上述公式称为**贝叶斯(Bayes)公式.**

注 (i) 全概率公式可以推广到可数个子集构成的分割的情形.即假设 B_1，B_2，B_3，…是可数多个互不相容事件，而且满足 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=\Omega$，如果有 $P(B_i>0)(i=1,2,\cdots)$，则对任意事件 A 有：$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i)P(B_i)$.

(ii) 贝叶斯公式可以推广到可数个子集构成的分割的情形.即假设 B_1，B_2，B_3，…是可数多个互不相容事件，且满足 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=\Omega$，如果有 $P(B_i>0)(i=1,2,\cdots)$，则对任意事件 A 有：

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i)P(B_i)}.$$

二、例 题 精 选

例 1.1 甲、乙、丙三人轮流抛一硬币，甲先抛，然后乙抛，如此继续下去，规定首先抛出正面者获胜，试写出该试验的样本空间.

解 记 ω_n=“第 n 次抛掷时首次出现正面”，ω_u=“各次抛掷均出现反面”

$$\Omega = \{\omega_n: n = 0,1,2,\cdots\}$$

例 1.2 某电视台招聘播音员，现有三位符合条件的女士和两位符合条件的男士前来应聘，(1) 写出招聘男女播音员各一名的样本空间和样本点；(2) 写出招聘两名播音员的样本空间和事件 A=“招聘到两名女士” 所含的样本点.

解 本试验是招聘播音员. 用 W_1，W_2，W_3 分别表示第 1，2，3 位女士，用 M_1，M_2 分别表示第 1，2 位男士. 用 W_1M_1 表示招聘到第 1 位女士和第 1 位男士，用 W_1M_2 表示招聘到第 1 位女士和第 2 位男士，……

(1) 招聘男女播音员各一名时，样本空间是：

$\Omega = \{W_1M_1, W_1M_2, W_2M_1, W_2M_2, W_3M_1, W_3M_2\}$，$\Omega$ 中的元素是样本点.

(2) 招聘两名播音员时，样本空间是：

$$\Omega = \{W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3, W_1M_1, W_1M_2, W_2M_1, W_2M_2, W_3M_1, W_3M_2, M_1M_2\}$$

招聘到两名女士的事件 $A=\{W_1W_2,W_1W_3,W_2W_3\}$.

例 1.3　(1) 某射手练习射击，直到击中目标为止，这一随机试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$；

(2) 在一批灯泡中任意取一只，测试它的寿命，则样本空间为 $\Omega=\{t\in R\mid t\geqslant 0\}$.

例 1.4　将黑白两球随机地放到三个盒子中去，试写出该试验的样本空间，并确定下列事件所含的样本点：(1) $A=$“第一个盒子中恰有一个球”；(2) $B=$“黑球在第一个盒子中”；(3) $C=$“第一个盒子中至少有一个球”.

解　记 $\omega_{ij}=$“黑球、白球分别放入第 i,j 个盒子”，$\Omega=\{\omega_{ij}: i,j=1,2,3\}$

$$A=\{\omega_{ij}: \min(i,j)=1;i,j=1,2,3;i\neq j\},\quad B=\{\omega_{ij}: j=1,2,3\}$$

$$C=\{\omega_{ij}: \min(i,j)=1;i,j=1,2,3\}$$

例 1.5　掷一颗均匀的骰子，设 $A=\{$出现 2 点$\}$，$B=\{$出现偶数点$\}$，则 $A\subset B$.

例 1.6　在例 1.5 中，设事件 $C=\{$掷出的点数最小$\}$，则有 $A=C$. 若设 $C=\{$出现的点数为 4 或 6$\}$，则 $C=B-A$.

例 1.7　某厂生产袋装食品，规定每袋质量在 490 g 到 510 g 之间为合格品. 设 $A=\{$产品不合格$\}$，$B=\{$质量少于 490 g$\}$，$C=\{$质量大于 510 g$\}$，则 $A=BC$.

例 1.8　掷一颗均匀的骰子，设 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现奇数点$\}$，则 $A=\overline{B}$，$B=\overline{A}$.

例 1.9　一袋中有分别编号为 $1,2,\cdots,10$ 的十个球，先从袋中任取一个球，设 $A=\{$取到 1 号球$\}$，$B=\{$取到编号为偶数的球$\}$，则 $AB=\varnothing$.

例 1.10　向指定目标射三枪，观察射中目标的情况. 用 A_i 表示事件“第 i 枪击中目标”，$i=1,2,3$，用 A_i 表示下列各事件：(1) 只击中第一枪；(2) 只击中一枪；(3) 三枪都没击中；(4) 至少击中一枪；(5) 至少击中两枪.

解　(1)“只击中第一枪”意味着 A_1 发生同时 A_2,A_3 不发生，故可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(2)“只击中一枪”意味着“只击中第一枪”发生，或者“只击中第二枪”发生，或者“只击中第三枪”发生，故表示为此三个事件的并 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(3)“三枪都没击中”当且仅当 A_1,A_2,A_3 都不发生，即 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(4)“至少击中一枪”当且仅当 A_1,A_2,A_3 中至少有一个发生，即 $A_1\cup A_2\cup A_3$；或者“至少击中一枪”的逆事件为“三枪都没击中”，则事件可表示为 $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$，由对偶律可得 $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}=A_1\cup A_2\cup A_3$；

(5)“至少击中两枪”当且仅当事件“正好击中两枪”发生，或“三枪都击中”发生，故可以表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$；换个角度，“至少击

中两枪"等价于三个事件 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3 至少有一个发生,即 $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

注　一个事件的表示方法不是唯一的.

例 1.11　以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为(D):

(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销"　(B)"甲、乙两种产品均畅销"

(C)"甲种产品滞销"　(D)"甲种产品滞销,或乙种产品畅销"

解　设甲、乙两种产品畅销的事件分别为 B,C,则 $A=B\overline{C}$,$\overline{A}=\overline{B\overline{C}}=\overline{B}\cup C$,$\overline{A}$ 为甲种产品滞销或乙种产品畅销.

例 1.12(先下手为强)　甲、乙两人的射击水平相当,于是约定比赛规则:双方对同一目标轮流射击,若一方失利,另一方可以继续射击,直到有人命中目标为止.命中一方为该轮比赛的获胜者.你认为先射击者是否一定处于优势地位?为什么?

解　设甲、乙两人每次命中的概率均为 p,失利的概率为 $q(0<q<1,p+q=1)$,令 $A_i=\{$第 i 次射击命中目标$\}$,$i=1,2,\cdots$.假设甲先发第一枪,则

$$\begin{aligned}P(\text{甲胜})&=P(A_1\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5\cup\cdots)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5)+\cdots\\&=p+q^2p+q^4p+\cdots=\frac{1}{1+q}\end{aligned}$$

又可得 $P(\text{乙胜})=1-P(\text{甲胜})=\dfrac{q}{1+q}$,因为 $0<q<1$,所以 $P(\text{甲胜})>P(\text{乙胜})$.

例 1.13　在分别写有 1,2,3,4,5,8 的六张卡中任取两张,把卡片上的两个数字组成一个分数,求所得分数为既约分数的概率.

解　以 A 记事件"所得分数为既约分数",它相当于"所取两个数中至少有一个是奇数",它的逆事件 $\overline{A}$ 是"所取两个数都不是奇数",$P(\overline{A})=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$,$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{4}{5}$.

例 1.14　设掷 n 次均匀硬币,求出现正面的次数多于反面的次数的概率.

解　以 A 记事件"出现正面的次数多于反面的次数".

(1) 当 n 为奇数时,正面次数与反面次数不会相等,A 的逆事件 $\overline{A}$,正面次数不多于反面次数,即反面次数多于正面次数.由于正、反面地位对称,所以 $P(A)=P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 n 为偶数时,正、反面次数可能相等,且相等的概率为:$C_n^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{2^n}$,

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}\right)$$

例 1.15 从数字 1,2,…,9 中(可重复地)任取 n 次,求 n 次所取的数字的乘积能被 10 整除的概率.

解 乘积要能被 10 整除必须既取到数字 5(事件 A),又取到偶数(事件 B),即要求 $P(AB)$.

$$P(\overline{A})=\frac{8^n}{9^n},\quad P(\overline{B})=\frac{5^n}{9^n},\quad P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{4^n}{9^n}$$

$$\begin{aligned}P(AB)&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})]\\&=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}\end{aligned}$$

例 1.16 同时掷五颗骰子,求下列事件的概率:(1) A=“点数各不相同”;(2) B=“至少出现两个 6 点”;(3) C=“恰有两个点数相同”;(4) D=“某两个点数相同,另三个同是另一个点数”;(5) E=“点数总和等于 10”.

解 (1) $P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}$;

(2) $P(B)=1-\frac{5^5}{6^5}-5\times\frac{5^4}{6^5}$;

(3) $P(C)=\frac{C_5^2\times6\times5\times4\times3}{6^5}=\frac{25}{54}$;

(4) $P(D)=\frac{C_5^2\times6\times5}{6^5}=\frac{25}{648}$;

(5) E 中的元素个数为 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10(1\leqslant x_i\leqslant6)$ 中正整数解的个数.

令 $y_i=x_i-1$,即为 $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5(0\leqslant y_i\leqslant5)$ 的非负整数解的个数,由本章阅读材料二可得所求概率为:

$$\frac{C_9^5}{6^5}=\frac{7}{432}$$

例 1.17 一部五卷的文集,按任意次序放在书架上,求自左至右,第一卷不在第一位置且第二、三卷也不在第二、三位置的概率.

解 设 A_1,A_2,A_3 分别表示第一、二、三卷在其相应位置上,所求概率 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$ 为:

$$\begin{aligned}P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)&=P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)]\end{aligned}$$

而 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{4!}{5!}$,$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=\frac{3!}{5!}$,