

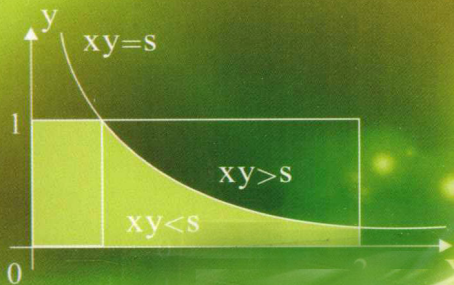
高等学校经典教材“三点”丛书

概率统计简明教程

(同济·第一版)

重点 难点 考点辅导与精析

主编 李昌兴



西北工业大学出版社

高等学校经典教材“三点”丛书

概率统计简明教程

(同济·第一版)

重点 难点 考点 辅导与精析

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与同济大学编写的《工程数学·概率统计简明教程》相配套的学习辅导书。参考原教材各章的顺序,每章包括重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分。本书着重于基本概念、基本原理和基本方法的归纳总结,并注重于分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考,培养学习兴趣。

本书可作为在校大学生学习概率统计课程的学习辅导书,也可供考研应试复习以及从事概率统计教学工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计简明教程重点难点考点辅导与精析/李昌兴主编. —西安:西北工业大学出版社,2010.8

(高等学校经典教材“三点”丛书)

ISBN 978-7-5612-2868-5

I. ①概… II. ①李… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158349 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpu.com

印 刷 者:陕西向阳印务有限公司

开 本:727 mm×960 mm 1/16

印 张:19

字 数:322 千字

版 次:2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷

定 价:28.00 元

前 言

概率论与数理统计是高等学校工科和经济管理学科各专业必修的一门重要的数学基础课,也是全国硕士研究生统一入学考试数学科目的重要组成部分.它的数学思想和计算方法已经成为科学技术、经济管理和人文社会等各个领域中分析问题和解决问题的有效手段,因而备受广大科技工作者的重视.然而,这门课程的理论体系抽象,概念难以理解,方法难以掌握,思维难以展开,问题难以入手和习题难以解答等,本书从读者的角度出发,帮助大家解决学习过程中遇到的一些困难.

本书根据教育部组织制定的新《概率论与数理统计课程的教学基本要求》和《硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写,并在此基础上略有提高,以适应在校大学生和有志于考研读者的学习和应试复习的需要.

本书每章分为重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分.重点及知识点辅导与精析部分简述了本章的基本概念、主要定理、性质及计算公式,指出了各章知识点的有机联系,使读者从整体上把握各章所涵盖的知识要点.难点及典型例题辅导与精析部分,精选了若干具有代表性的典型例题,力求做到选题全面,重点突出,解答详细,通过典型例题的示范,指导读者解题,帮助读者掌握解题要领与步骤,澄清错误概念与想法,使读者在解题过程中达到举一反三,触类旁通,以期提高读者解题方法的多样性和灵活性.考点及考研真题辅导与精析部分,收集了国内许多知名院校课程考试题及部分考研试题,以使读者明确考点,做到心中有数,有的放矢,着重于解题思路,揭示命题规律.课

后习题解答部分,我们按照习题所在章节,提供与教材内容相一致的解题方法。对于简单题目给出解题思路,概念性较强或难以理解的习题做了详尽的解答,以便读者对照检查。

本书可作为在校大学生学习概率论与数理统计课程的同步学习辅导书,并可作为考研应试复习资料,也可供从事概率论与数理统计教学人员参考。

全书共分12章,其中第8,9章由赵美霞编写,第10,11,12章由林椹勘编写,其余各章由李昌兴编写。全书由李昌兴统稿、定稿。张素梅、邢务强详细阅读了本书的初稿,提出了许多宝贵的意见,编者在此一并致谢。

在本书的编写过程中,参阅了大量国内同类教材及相关辅导书,得到了有益的启迪和教益,谨向有关作者深致谢意!

我们恳切希望本书能对广大读者朋友学习概率论与数理统计有所帮助。由于我们水平有限,书中疏漏不妥之处,恳请读者指教。

编者

2010年4月

目 录

第 1 章 随机事件	1
1.1 重点及知识点辅导与精析	1
1.2 难点及典型例题辅导与精析	2
1.3 考点及考研真题辅导与精析	6
1.4 课后习题解答	8
第 2 章 事件的概率	12
2.1 重点及知识点辅导与精析.....	12
2.2 难点及典型例题辅导与精析.....	13
2.3 考点及考研真题辅导与精析.....	23
2.4 课后习题解答.....	27
第 3 章 条件概率与事件的独立性	31
3.1 重点及知识点辅导与精析.....	31
3.2 难点及典型例题辅导与精析.....	32
3.3 考点及考研真题辅导与精析.....	45
3.4 课后习题解答.....	55
第 4 章 随机变量及其分布	61
4.1 重点及知识点辅导与精析.....	61
4.2 难点及典型例题辅导与精析.....	64
4.3 考点及考研真题辅导与精析.....	78
4.4 课后习题解答	85

第 5 章 二维随机变量及其分布	96
5.1 重点及知识点辅导与精析	96
5.2 难点及典型例题辅导与精析	100
5.3 考点及考研真题辅导与精析	109
5.4 课后习题解答	118
第 6 章 随机变量的函数分布	128
6.1 重点及知识点辅导与精析	128
6.2 难点及典型例题辅导与精析	130
6.3 考点及考研真题辅导与精析	144
6.4 课后习题解答	155
第 7 章 随机变量的数字特征	166
7.1 重点及知识点辅导与精析	166
7.2 难点及典型例题辅导与精析	170
7.3 考点及考研真题辅导与精析	187
7.4 课后习题解答	197
第 8 章 统计与统计学	204
8.1 重点及知识点辅导与精析	204
8.2 难点及典型例题辅导与精析	205
第 9 章 统计量和抽样分布	207
9.1 重点及知识点辅导与精析	207
9.2 难点及典型例题辅导与精析	210
9.3 考点及考研真题辅导与精析	216
9.4 课后习题解答	224
第 10 章 点估计	229
10.1 重点及知识点辅导与精析	229
10.2 难点及典型例题辅导与精析	231
10.3 考点及考研真题辅导与精析	241

10.4	课后习题解答	249
第 11 章	区间估计	256
11.1	重点及知识点辅导与精析	256
11.2	难点及典型例题辅导与精析	259
11.3	考点及考研真题辅导与精析	264
11.4	课后习题解答	267
第 12 章	假设检验	272
12.1	重点及知识点辅导与精析	272
12.2	难点及典型例题辅导与精析	276
12.3	考点及考研真题辅导与精析	285
12.4	课后习题解答	289
	参考文献	296

随机事件

1.1 重点及知识点辅导与精析

1.1.1 随机试验的概念

具有以下两个特点的试验称为随机试验.

- (1) 试验的所有可能结果是已知的或是可以确定的;
- (2) 每次试验将要发生什么样的结果是事先无法预知的.

随机试验又依其可否在相同条件下重复进行,分为可重复试验及不可重复试验.本书绝大部分涉及的都是可重复试验.

1.1.2 样本空间和随机事件

试验所有可能结果的全体构成样本空间;称试验的每一个可能结果为样本点,样本空间为全体样本点的集合;随机事件是对随机试验中出现的某些现象或某种情况的陈述;它可以用试验的某些可能结果加以描述,因而是样本空间的子集.也简称随机事件为事件.

1.1.3 事件的关系

随机事件之间有如下四种关系.

- (1) 包含关系.如果 A 发生必导致 B 发生,称 A 蕴含于 B ,且记之为 $A \subset B$.
- (2) 相等关系.如果 $A \subset B, B \subset A$ 同时成立,称 A 与 B 相等,且记之为 $A = B$.
- (3) 互斥关系.如果 A, B 不能在一次试验中同时发生,称 A 与 B 互斥.

(4) 互补关系. 如果 A, B 在一次试验中必发生一个, 且只能发生一个, 称 A 与 B 互补.

1.1.4 事件的运算

随机事件之间有如下三种运算.

(1) 并的运算. A 与 B 的并产生这样一个事件, 即 A, B 至少发生一个, 记之为 $A \cup B$.

(2) 交的运算. A 与 B 的交产生这样一个事件, 即 A, B 同时发生, 记之为 $A \cap B$ 或 AB .

(3) 差的运算. A 与 B 的差产生这样一个事件, 即 A 发生且 B 不发生, 记之为 $A - B$.

1.2 难点及典型例题辅导与精析

例 1 样本空间有哪些主要性质?

解 样本空间有两个主要性质: 每次试验必有属于样本空间中的某个样本点发生; 样本空间中的任意两个样本点不会出现在同一次试验中.

例 2 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 生产某种产品直到生产出 10 件正品为止, 描述总生产的产品件数的样本空间.

(2) 某人射击一个目标, 若击中目标, 射击就停止, 记录射击的次数的样本空间.

(3) 在半径为 1 的圆内任取一点, 描述该点位置的坐标的样本空间.

(4) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(5) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格品的记上“正品”, 不合格品的记上“次品”. 如果连续查出了 2 件次品, 就停止检查; 或检查了 4 件产品就停止, 记录检查的结果.

分析 确定随机试验的样本空间是概率论的基本问题, 也是重要的问题. 样本空间就是随机试验所有可能结果组成的集合, 即找出试验所有可能结果是写出样本空间的关键. 样本空间的描述就是集合的描述, 其描述的方法通常有枚举法和特性刻画法.

解 (1) 设生产产品的总数为 n , 那么这一试验的样本空间 Ω 应该是从

10 开始的一切整数, 即 $\Omega = \{n \mid n \geq 10 \text{ 的整数}\}$. 这是有限型的样本空间.

(2) 射击是一次一次地进行下去. 若击中目标, 不再进行下次射击; 若未击中目标, 射击就要继续进行. 因此, 射击进行的次数就是一切正整数, 即样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. 这是无限可列型的样本空间.

(3) 设圆心与原点重合, 该点的坐标为 (x, y) , 那么这一试验的样本空间为 $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. 这是无限不可列型的样本空间.

(4) 以 n 表示该班级的学生数, 总成绩的可能取值为 $0, 1, 2, 3, \dots, 100n$, 样本空间为 $\Omega = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 100n\}$.

(5) 用 0 表示检查到一件次品, 用 1 表示检查到一件正品. 如 0110 表示第一次与第四次检查到次品, 而第二次与第三次检查到的是正品, 样本空间可表示为

$$\Omega = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111\}$$

例 3 设 A, B, C 为三个随机事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件.

- (1) A 发生, B 与 C 都不发生.
- (2) A, B, C 中恰有两个发生.
- (3) A, B, C 中不多于一个发生.
- (4) A, B, C 中至多有两个发生.
- (5) A, B, C 不都发生.

分析 利用事件的运算关系表示事件, 关键是要正确理解事件的运算和事件的关系. 理解的思路不同, 得到的表达式也不尽一样, 但只要思路正确, 所得到不同表达式相互等价. 特别是在复合事件中常用“恰有”、“只有”、“不多于”、“至少”、“至多”、“都发生”和“不都发生”等词描述, 必须弄清楚这些词语的确切含义.

解 (1) “事件 A 发生, B 与 C 都不发生”等同于“ A, \bar{B}, \bar{C} 三个事件同时发生”, 所以“ A 发生, B 与 C 都不发生”可表示为事件 $A\bar{B}\bar{C}$.

也可以把“ B 与 C 都不发生”看做一个整体, 那么它的对立事件就是“ B, C 至少有一个发生”, 即 $B \cup C$, 那么“ B 与 C 都不发生”等价于 $\overline{B \cup C}$. 所以 A 发生, B 与 C 都不发生也可表示为事件 $A(\overline{B \cup C})$.

(2) “ A, B, C 中恰有两个发生”的等价事件是“ A, B 都发生, 而 C 不发生; 或 A, C 都发生, 而 B 不发生; 或 B, C 都发生, 而 A 不发生”, 所以它可以表示为

$$ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$$

另外,事件“ A, B, C 中恰有两个发生”也等价于“ A, B 同时发生,或 A, C 同时发生,或 B, C 同时发生,且 A, B, C 不同时发生”,所以“ A, B, C 中恰有两个发生”也可表示为

$$(AB \cup AC \cup BC) - ABC \quad \text{或} \quad (AB \cup AC \cup BC) \overline{ABC}$$

(3) “ A, B, C 中不多于一个发生”等价于“ A 发生,而 B, C 都不发生;或 B 发生,而 A, C 都不发生;或 C 发生,而 A, B 都不发生;或 A, B, C 都不发生”,即可表示为

$$\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

“ A, B, C 中不多于一个发生”也等价于“ A, B, C 中至少有两个都不发生”,所以它也可表示为

$$\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{C}$$

另外,“ A, B, C 中不多于一个发生”的对立事件是“ A, B, C 中至少有两个发生”,所以也可以把“ A, B, C 中不多于一个发生”表示为事件

$$\overline{AB \cup BC \cup CA}$$

(4) “ A, B, C 中至多有两个发生”等价于“ A, B, C 中至少有一个不发生”,因此它可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

也可把“ A, B, C 中至多有两个发生”分解成三个事件“ A, B, C 三个事件不同时发生”,“ A, B, C 三个事件恰好有一个发生”,“ A, B, C 三个事件恰好有两个发生”的事件,那么它可表示为

$$\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$$

此外,“ A, B, C 中至多有两个发生”的对立事件为“ A, B, C 三个事件都发生”,从而也可表示为 \overline{ABC} .

(5) “ A, B, C 不都发生”等价于“ A, B, C 三个事件至少有一个不发生”,或者等价于“ A, B, C 不能同时发生”,从而它可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 \overline{ABC} .

【注】①“两个事件的差”可用对立事件来表示,如 $A - B = \overline{AB}$, $A - BC = \overline{ABC}$. ②易犯的错误是,误将 \overline{AB} 与 $\bar{A}\bar{B}$ 等同起来.事实上, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \neq \bar{A}\bar{B}$. 又如 $\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \neq \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. ③误以为 $\Omega = A \cup B \cup C$,如将 \overline{ABC} 写成 $A \cup B \cup C - ABC$.事实上, $\Omega - (A \cup B \cup C)$ 可能不等 \emptyset .一般地, $A \cup B \cup C \subset \Omega$. ④误将 Ω 写成必然事件的概率1.如将事件 A, B, C 中至少有一个发生的对立事件写成 $1 - (A \cup B \cup C)$ 的错误结果.

例 4 一名射手连续向某个目标射击三次,事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标,其中 $i=1,2,3$. 试用文字叙述下列事件: $A_1 \cup A_2, \bar{A}_2, A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_1 A_2 A_3, A_3 - A_2, \overline{A_1 \cup A_2}, \bar{A}_1 \bar{A}_2, \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3, \overline{A_2 A_3}, A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$.

解 $A_1 \cup A_2$ 表示“前两次至少有一次击中目标”.

\bar{A}_2 表示“第二次未击中目标”.

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示“三次射击中至少有一次击中目标”.

$A_1 A_2 A_3$ 表示“三次射击都击中目标”.

$A_3 - A_2$ 表示“第三次击中目标而第二次未击中目标”.

$\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$, 表示“前两次射击中都没有击中目标”.

$\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 = \overline{A_2 A_3}$, 表示“后两次射击中至少有一次没有击中目标”.

$A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$ 表示“三次射击中至少有两击中目标”.

例 5 设两个事件 A, B , 若 $AB = \bar{A} \bar{B}$, 试问 A 与 B 是什么关系?

解 因为 $\bar{A} \bar{B} = \overline{A \cup B}$, 所以由 $AB = \bar{A} \bar{B}$ 可得 $AB = \overline{A \cup B}$. 又因为 $A \cup B \supset AB$, 所以 $AB = \emptyset$, 即 $\overline{A \cup B} = \emptyset$, 也就是 $A \cup B = \Omega$. 因此, A 与 B 是对立事件, 即 $A = \bar{B}, B = \bar{A}$.

例 6 如图 1-1 所示的电路中, 以 A 表示“信号灯亮”这一事件, 事件 B, C, D 表示继电器 I, II, III 闭合, 试用事件 B, C, D 表示事件 A .

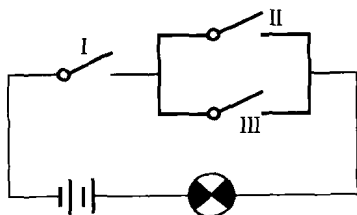


图 1-1

解 从图 1-1 可以看到, 若继电器 I, II 闭合或者 I, III 闭合, 那么信号灯亮, 即 $BC \subset A, BD \subset A$, 从而 $BC \cup BD \subset A$. 另一方面, 若信号灯亮, 那么继电器 I 闭合, 而且继电器 II, III 至少有一个闭合, 即 $A \subset B, A \subset C \cup D$, 故 $A \subset B \cap (C \cup D)$. 于是 $A = BC \cup BD$.

例 7 试用事件运算公式证明下列各式.

(1) $A - AB = A \cup B - B = \bar{A} \bar{B}$;

$$(2) A \cup B - AB = (A - B) \cup (B - A) = \overline{AB} \cup \overline{AB}.$$

证 (1) 由于

$$\begin{aligned} A \cup B - B &= (A \cup B) \overline{B} = \overline{AB} \cup B \overline{B} = \overline{AB} \\ \overline{AB} &= A(\Omega - B) = A\Omega - AB = A - AB \end{aligned}$$

所以

$$A - AB = A \cup B - B = \overline{AB}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B - A) &= \overline{AB} \cup \overline{BA} \\ A \cup B - AB &= (A \cup B) \cap (\overline{AB}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \\ &= [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = \\ &= \overline{AB} \cup \overline{BA} \end{aligned}$$

所以

$$A \cup B - AB = (A - B) \cup (B - A) = \overline{AB} \cup \overline{AB}$$

1.3 考点及考研真题辅导与精析

例 1 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有 2 个温控器的显示温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电. 以事件 E 表示“电炉断电”, 而 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增序列排列的温度值, 则事件 E 等于().

- (A) $T_{(1)} \geq t_0$ (B) $T_{(2)} \geq t_0$
 (C) $T_{(3)} \geq t_0$ (D) $T_{(4)} \geq t_0$

(2000 年研究生入学考试题)

解 由已知条件, $T_{(i)} \geq t_0$ 表示 4 个温控器中有 $4 - (i - 1)$ 个温控器的显示温度不低于临界温度 t_0 , 因为只要有 2 个温控器的显示温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电, 即事件 E 发生, 所以事件 E 等价于事件 $T_{(3)} \geq t_0$, 故选 (C).

例 2 以事件 A 表示“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 \overline{A} 为().

- (A) “甲、乙两种产品均畅销”
 (B) “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”
 (C) “甲种产品滞销”
 (D) “甲种产品滞销, 或乙种产品畅销”

(1989年研究生入学考试题)

解 因为事件 A 表示“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,设 B 表示“甲种产品畅销”, C 表示“乙种产品畅销”,所以 $A = B\bar{C}$. 于是 $\bar{A} = \overline{B\bar{C}} = \bar{B} \cup C$, 即 A 的对立事件表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”,故应选(D).

例3 对于任意两个事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是().

(A) $A \subset B$ (B) $\bar{B} \subset \bar{A}$ (C) $A\bar{B} = \emptyset$ (D) $\bar{A}B = \emptyset$

(2006年合肥工业大学)

解 $A \cup B = B$ 等价于 $A \subset B$, 或 $\bar{B} \subset \bar{A}$, 或 $A\bar{B} = \emptyset$, 而 $\bar{A}B = B - AB = B - A$. 所以(D)与 $A \cup B = B$ 不等价. 故应选(D).

例4 若事件 A, B, C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$, 则 $A = B$. ()

(1988年研究生入学考试题)

解 因为 $A \cup C = B \cup C$, 而 A, B, C 是任意三个事件, 事件 $A \cup C$ 可表示为两个互斥事件的和, 即 $A \cup C = C \cup A\bar{C}$. 同理可得 $B \cup C = C \cup B\bar{C}$, 故 $A\bar{C} = B\bar{C}$. 即 $A - C = B - C$, 两个差事件相等, 而不是 A 与 B 相等. 所以此题所给结论是错误的.

例5 设 A, B, C, D 为四个随机事件, 用事件的运算关系表示: (1) 事件 A, B, C, D 中仅有事件 A, B 两个发生 _____; (2) A, B 中至少有一个发生, C, D 中至少有一个不发生 _____; (3) A, B, C, D 不都发生 _____.

(2007年哈尔滨工业大学)

解 (1) 注意到事件 A, B, C, D 中仅有事件 A, B 两个发生, 即 A 与 B 都发生, 且 C, D 均不发生, 所以填 $ABC\bar{D}$.

(2) A, B 中至少有一个发生可表示为 $A \cup B$, 而 C, D 中至少有一个不发生可表示为 $\bar{C} \cup \bar{D}$, 所以填写 $(A \cup B)(\bar{C} \cup \bar{D})$ 或 $(A \cup B)\overline{CD}$.

(3) 事件 A, B, C, D 不都发生, 即 A, B, C, D 中至少有一个不发生, 所以填写 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$ 或 \overline{ABCD} .

例6 设 A, B, C 是三个随机事件, 事件“ A, B, C 中至少有两个发生”, 可以用 A, B, C 表示为 _____.

(2004年西安电子科技大学)

解 “ A, B, C 中至少有两个发生” 等价于“ A, B 同时发生, 或 A, C 同时发生, 或 B, C 同时发生”, 即事件 AB, BC, CA 中至少有一个发生, 即

$$AB \cup BC \cup CA$$

另外, “事件 A, B, C 中至少有两个发生” 可以分解为“ A, B, C 中恰有两个发生” 与“ A, B, C 同时发生” 的和事件, 因此它可表示为

$$ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$$

因此,填写 $AB \cup BC \cup CA$, 或填写 $ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$.

例 7 证明 $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$.

(2007 年北京化工大学)

证 方法一 用事件的关系与运算的定义.

$A \cup B$ 发生即事件 A 或事件 B 发生, 则必然导致下列三个事件之一发生: A 发生 B 不发生, B 发生 A 不发生, A 与 B 同时发生, 即 $A - B, B - A, AB$. 所以 $A \cup B \subset (A - B) \cup (B - A) \cup AB$.

反之, $A - B$ 即 A 发生 B 不发生, 那么 A 发生, 有 $A - B \subset A$. 同理, $B - A \subset B$, 同时 $AB \subset A$, 故 $(A - B) \cup (B - A) \cup AB \subset A \cup B$.

于是, $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$.

方法二 用集合关系与运算定义.

若 $x \in A \cup B$, 那么 $x \in A$ 或 $x \in B$. 当 $x \in A$ 时, 注意到 $A = (A - B) \cup AB$, 从而 $x \in (A - B) \cup AB$; 当 $x \in B$ 时, 同理可得 $x \in (B - A) \cup AB$. 因此

$$A \cup B \subset [(A - B) \cup AB] \cup [(B - A) \cup AB] = \\ (A - B) \cup (B - A) \cup AB$$

反之, 若 $x \in (A - B) \cup (B - A) \cup AB$, 则 $x \in (A - B)$, 或者 $x \in (B - A)$, 或者 $x \in AB$, 即 $x \in A$ 或 $x \in B$. 所以 $(A - B) \cup (B - A) \cup AB \subset A \cup B$.

于是, $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$.

方法三 用集合的运算关系.

$$(A - B) \cup (B - A) \cup AB = \bar{A}B \cup B\bar{A} \cup AB = \\ (\bar{A}B \cup AB) \cup (B\bar{A} \cup AB) = \\ A(\bar{B} \cup B) \cup (\bar{A} \cup A)B = A \cup B$$

所以, $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB$.

【注】事件的关系有包含、相等、互斥、对立四种. 讨论或证明时, 一般有三种方法: 用事件的关系与运算的定义; 用集合关系与运算定义; 用事件或集合的运算性质.

1.4 课后习题解答

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A .

(1) 抛一枚硬币两次, 观察出现的面, 事件 $A = \{\text{两次出现的面相同}\}$;

(2) 记录某电话总机一分钟内接到的呼叫次数,事件 $A = \{\text{一分钟内呼叫次数不超过 3 次}\}$;

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只,测试其寿命,事件 $A = \{\text{寿命在 } 2\,000 \sim 2\,500 \text{ h 之间}\}$.

解 (1) $\Omega = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$

$$A = \{(+, +), (-, -)\}$$

(2) 记 X 为一分钟内接到的呼叫次数,则

$$\Omega = \{X = k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad A = \{X = k \mid k = 0, 1, 2, 3\}$$

(3) 记 X 为抽到的灯泡的寿命(单位:h),则

$$\Omega = \{X = x \mid x \in [0, +\infty)\}, \quad A = \{X = x \mid x \in [2\,000, 2\,500]\}$$

2. 袋中有 10 个球,分别编有号码 1~10,从中任取 1 球.设 $A = \{\text{取得球的号码是偶数}\}$, $B = \{\text{取得球的号码是奇数}\}$, $C = \{\text{取得球的号码小于 5}\}$.问:下列运算表示什么事件? (1) $A \cup B$; (2) AB ; (3) AC ; (4) \overline{AC} ; (5) $\overline{A \overline{C}}$; (6) $\overline{B \cup \overline{C}}$; (7) $A - C$.

解 (1) $A \cup B = \Omega$ 是必然事件;

(2) $AB = \emptyset$ 是不可能事件;

(3) $AC = \{\text{取得球的号码是 } 2, 4\}$;

(4) $\overline{AC} = \{\text{取得球的号码是 } 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

(5) $\overline{A \overline{C}} = \{\text{取得球的号码是奇数,且不小于 5}\} = \{\text{取得球的号码为 } 5, 7, 9\}$;

(6) $\overline{B \cup \overline{C}} = \overline{B} \cap C = \{\text{取得球的号码是不小于 5 的偶数}\} = \{\text{取得球的号码为 } 6, 8, 10\}$;

(7) $A - C = A \overline{C} = \{\text{取得球的号码是不小于 5 的偶数}\} = \{\text{取得球的号码为 } 6, 8, 10\}$.

3. 在区间 $[0, 2]$ 上任取一数,记 $A = \{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$, $B = \{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$,求下列事件的表达式. (1) $A \cup B$; (2) \overline{AB} ; (3) $A \overline{B}$; (4) $A \cup \overline{B}$.

解 (1) $A \cup B = \{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

(2) $\overline{AB} = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 < x \leq 2\} \cap B =$

$$\{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x \mid 1 < x \leq \frac{3}{2}\}$$