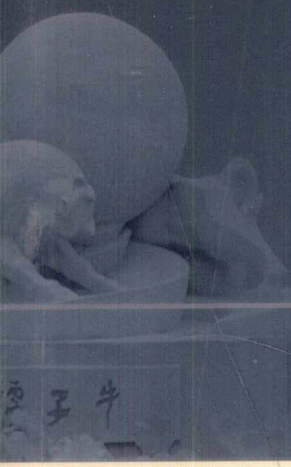
"十一五"国家重点图书
中国科学院指定考研参考书

中国科学技术大学精品教材



线性代数

第 2 版

李炯生　查建国　王新茂　编著

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2}$$

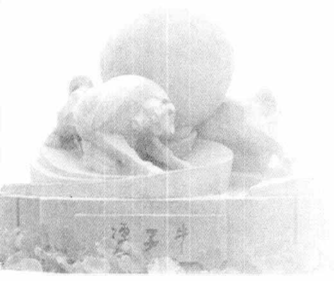
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

中国科学技术大学出版社



中国科学技术大学精品教材

线性代数

XIANXING DAISHU

第 2 版

李炯生　查建国　王新茂　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书是作者在中国科学技术大学数学系多年教学的基础上编写成的. 它由多项式、行列式、矩阵、线性空间、线性变换、Jordan 标准形、Euclid 空间、酉空间和双线性函数等九章组成. 在内容的叙述上，力图做到矩阵方法与几何方法相并重. 每章都配有丰富的典型例题和充足的习题.

本书适合作为综合性大学理科数学专业的教材，也可以作为各类大专院校师生的教学参考书，以及关心线性代数与矩阵论的科技工作者的自学读物或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李炯生，查建国，王新茂编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010.1

(中国科学技术大学精品教材)

“十一五”国家重点图书

中国科学院指定考研参考书

ISBN 978-7-312-02298-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①李…　②查…　③王…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 100473 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址　安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址　http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：710×960 1/16　印张：28.75　插页：2　字数：560 千

1989 年 4 月第 1 版　2010 年 1 月第 2 版　2010 年 1 月第 3 次印刷

印数：6001—9000 册

定价：48.00 元

总　　序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.为了反映五十年来办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

1958年学校成立之时,教员大部分都来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据"全院办校,所系结合"的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.五十年来,外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校.在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材.五十年来，进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术.

这次入选的50种精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校五十年教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.该系列精品教材的出版，既是向学校50周年校庆的献礼，也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念.

侯建国

2008年8月

第2版序言

自1989年4月第1版面世以来，本书已经伴随着一届又一届的学子度过了二十年的春秋，并受到了读者的广泛好评.为了满足读者的需求，本书经历了多次的增印.2002年，本书被列入了《中国科学院指定考研参考书》;2008年，本书又被列入《中国科学技术大学精品教材》丛书，作为向中国科学技术大学建校五十周年的献礼教材.

然而，在本书二十年的教学实践和使用过程中，广大读者和作者都发现了书中存在着一些缺点和错误.其中既有正文表述中的语病或错误的习题，也有多次重印所带来的印刷排版错误.为此，我们特地邀请了中国科学技术大学数学系1990级学生王新茂同我们一起对原书进行了仔细的全面的修订.

在保留原书的章节结构和主体内容的基础之上，新版修改或删除了一些错误的表述和错误的习题，简化了一些定理的冗长证明，突出了矩阵方法和几何方法并重的思想.但百密难免一疏，新版中还会留有许多缺点和错误.衷心希望广大读者和同行批评指正或提出建议.我们的联络方式:安徽省合肥市金寨路96号，中国科学技术大学数学系，王新茂收，邮政编码230026.

编著者

2009年1月

第 1 版序言

本书初稿完成于 1983 年.当时中国科学技术大学数学系领导冯克勤教授委托编著者编写一本供数学系用的线性代数讲义.接受这项任务后,我们专程到北京,拜访了中国科学院系统科学研究所万哲先研究员、中国科学院数学研究所许以超研究员、北京大学数学系聂灵沼教授和中国科学院研究生院曾肯成教授,请教他们对数学系线性代数教学的设想.他们都热情地给予指导,从而为编写讲义提供了坚实的基础.1984 年春天,讲义便开始在数学系 1983 级使用,并作为数学系线性代数教材一直使用到现在.1985 年,讲义曾获得中国科学技术大学首次颁发的优秀教材一等奖.此后,在使用过程中对讲义又作了进一步的修改.出版前编著者又作了全面的加工和充实.

线性代数研究的是线性空间以及线性空间的线性变换.在线性空间取定一组基下,线性变换便和矩阵建立了一一对应关系.这样,线性变换就和矩阵紧密联系起来.于是,研究线性空间以及线性空间关于线性变换的分解即构成了线性代数的几何理论,而研究矩阵在各种关系下的分类问题则是线性代数的代数理论.本书编写的一个着眼点是,着力于建立线性代数的这两大理论之间的联系,并从这种联系去阐述线性代数的理论.当然,线性代数内容非常丰富,本书尽可能地按照 1980 年教育部颁发的综合性大学理科数学专业高等代数教学大纲进行选择,并在体系安排与叙述方式上尽量吸收中国科学技术大学数学系长期从事线性代数教学的老师与同事们,特别是曾肯成教授、许以超研究员的教学经验.在处理行列式理论时,采用了曾肯成教授 1965 年首先在中国科学技术大学数学系使用的将 n 阶行列式视为数域 F 上 n 维向量空间的规范反对称 n 重线性函数的讲法;在处理线性方程组理论时,利用了矩阵在相抵下的标准形理论;在处理 Jordan 标准形时,先考虑了线性空间关于线性变换的分解,然后再用纯矩阵方法处理了 Jordan 标准形.同时也

着重于阐述已故著名数学家华罗庚教授的独具特色的矩阵方法.

为了便于读者掌握解题技巧,提高分析问题、解决问题的能力,本书几乎每一章都专门用一节讲述各种典型例题.这部分内容是为习题课安排的.每一节后面都附有大量习题,教师与读者可以根据具体情况选择使用.这些习题除了在众多的线性代数、矩阵论教材以及习题集中选取之外,有一些是取自我国历届研究生试题,还有一些是自己编撰的.在教学过程中,有些同学对线性代数的某些课题产生了兴趣,进行了一些研究.有些结果即成为本书的习题.这里应该提到的有中国科学技术大学数学系 1981 级同学陈贵忠、黄渝、窦昌柱,1982 级同学陈秀雄等.

冯克勤教授对本书的编写自始至终都给予了热情的关心与帮助.在编写过程中,得到了万哲先、许以超、聂灵沼、曾肯成诸教授的热心指导,编著者谨致衷心感谢.中国科学技术大学数学系陆洪文教授、杜锡录和李尚志副教授曾经使用本书的前身——《线性代数讲义》作为教材,他们对讲义的修改提出了许多有益的意见.中国科学技术大学数学系讲师屈善坤、徐俊明协助编著者仔细地审核了原稿,安徽大学数学系夏恩虎同志、中国科学技术大学 1986 级硕士研究生黄道德审核了习题,在此一并致谢.

由于编著者水平所限,错误与缺点在所难免.热忱欢迎同行们和广大读者批评指正.

李炯生　查建国

1988 年 1 月

目　　次

第 1 章　多　项　式

本章将介绍数域上的多项式理论，读者如果有机会学习抽象代数中的环论的话，将会对本章的内容有更深刻的理解. 1.1 节从代数的观点定义了数环与数域，即具有加法与乘法两种运算且满足一定的运算规则的数的集合. 1.2 节给出了一元多项式环的定义，以及多项式的加法与乘法的基本性质. 读者将会看到，多项式有许多性质与整数相类似. 1.3 节讨论了多项式的整除性以及一组多项式的最大公因式，这里的关键是两个多项式的辗转相除法. 1.4 节给出了本章的第一个主要定理——唯一析因定理，即每一个多项式都可以唯一地写成不可约多项式的乘积. 读者把它同整数中的算术基本定理进行比较，就可知道这一定理的重要意义. 根据唯一析因定理，不可约多项式的地位相当于整数中素数的地位. 因此，自然需要一些方法来判定多项式的不可约性. 1.5 节说明了复系数不可约多项式只能是一次多项式，而实系数不可约多项式只能是一次或二次多项式. 1.6 节给出了最有应用价值的判断整系数多项式不可约性的 Eisenstein 准则. 1.7 节把一元多项式推广为多元多项式. 1.8 节讲述了本章的第二个主要定理——对称多项式基本定理，即每一个对称多项式都是基本对称多项式的多项式.

1.1　整数环与数域

迄今为止，我们已经接触到的数系有自然数系、整数系、有理数系、实数系与复数系. 在这些数系中，都可以进行加法运算与乘法运算. 譬如，自然数系中的加法运算是指一个对应关系，即对于任意一对自然数 m 与 n，按照加法，可以确定唯一一个自然数与它们对应，这个自然数就是 m 与 n 的和 $m+n$；而自然数系中的乘法

运算也是一个对应关系，即对于任意一对自然数 m 与 n，按照乘法，可以确定唯一一个自然数与它们对应，这个自然数就是 m 与 n 的积 mn. 抽象地说，所谓集合 S 中的代数运算是指一个对应关系，即对于集合 S 中任意一对元素 a 与 b，按照这一对应关系，可以确定集合 S 中的唯一一个元素 c 与它们对应. 例如，复数的加、减、乘、除四则运算都是复数系中的代数运算. 一个集合引进了代数运算，这些代数运算往往具有某些性质. 例如，整数系的加法运算与乘法运算具有以下的性质：

(A1) 加法结合律：
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
(A2) 加法交换律：
$$a+b=b+a;$$
(A3) 有整数 0，它具有性质：
$$a+0=0+a=a;$$
(A4) 对每个整数 a，总有相反数 $-a$，使得
$$a+(-a)=(-a)+a=0;$$
(M1) 乘法结合律：
$$(ab)c=a(bc);$$
(M2) 乘法交换律：
$$ab=ba;$$
(M3) 有整数 1，它具有性质：
$$a1=1a=a;$$
(D) 加乘分配律：
$$a(b+c)=ab+ac.$$
其中 a,b 和 c 是任意整数.

集合 S 的每一种代数运算所适合的一些最基本的性质，以及不同代数运算之间最基本的联系便构成了界定这些代数运算的公理，例如，上面提到的整数的加法与乘法就适合结合律、交换律以及加乘分配律等. 把整数系连同加法与乘法运算的特性抽象化，便引出以下的定义.

定义 1 在非空集合 R 中规定两种代数运算. 一种称为加法运算，即对于集合 R 中任意一对元素 a 与 b，按照加法运算，集合 R 中有唯一一个元素 $a+b$ 与它们对应，元素 $a+b$ 称为 a 与 b 的和. 另一种称为乘法运算，即对于集合 R 中任意一对元素 a 与 b，按照乘法运算，集合 R 中有唯一一个元素 ab 与它们对应，元素 ab 称为 a 与 b 的积. 并且，加法运算与乘法运算适合下列公理：对于集合 R 中任意元素 a,b 与 c，有

(A1) 加法结合律:

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

(A2) 加法交换律:

$$a+b=b+a;$$

(A3) R 中存在一个元素,它称为 R 的零元素,记作 0,使得

$$a+0=0+a=a;$$

(A4) 对于 R 中每个元素 a,存在元素 b,使得

$$a+b=b+a=0,$$

元素 b 称为元素 a 的负元素,记为 $-a$;

(M1) 乘法结合律:

$$a(bc)=(ab)c;$$

(M2) 乘法交换律:

$$ab=ba;$$

(M3) R 中存在一个元素,它称为单位元素,记为 1,使得

$$a1=1a=a;$$

(D) 加乘分配律:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

则集合 R 称为交换环.

容易验证,整数系是一个交换环,称为整数环,记为 $\mathbf{Z}$. 另外,有理数系、实数系与复数系也都是交换环,都是复数系的子集合. 凡复数系的子集合,如果对复数的加法与乘法成为交换环,则称为数环.

应当指出,有理数系、实数系和复数系的乘法运算所具有的性质有些是和整数环的乘法性质不同的. 例如,在整数环中,对于非零数 $a\neq\pm1$,不存在整数 b,使得 $ab=ba=1$;但在实数环中,对于非零实数 a,一定存在实数 b,使得 $ab=ba=1$. 为区别起见,引进以下的定义.

定义 2 设 F 是至少有两个元素的交换环. 如果对于 F 中每个非零元素 a,存在元素 $b\in F$,使得 $ab=ba=1$,则 b 称为 a 的逆元素,记作 a^{-1},这时交换环 F 称为域.

例如,有理数系、实数系与复数系都是域,它们依次称为有理数域、实数域与复数域,并依次记为 $\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$. 如果复数域 $\mathbf{C}$ 的子集合 F 对复数的加法与乘法成为一个域,则 F 称为数域. 可以验证,复数域的子集合

$$\mathbf{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbf{Q}\}$$

对复数的加法与乘法成为一个域,所以,$\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$是一个数域.

习　题

1. 记$\mathbf{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbf{Q}\}$.验证$\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$是数域.

2. 记$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]=\{m+n\sqrt{2}:m,n\in\mathbf{Z}\}$.验证$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$是数环.$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$是数域吗?

3. 设F是数域,a,b和c是F中的任意三个元素,证明下列性质成立:

(1) 如果$a+b=a+c$,则$b=c$;

(2) 定义$a-b=a+(-b)$,则$a+(b-a)=b$;

(3) $a0=0a=0$;

(4) $(-1)a=-a$;

(5) 如果$ab=0$,则$a=0$或$b=0$.

4. 设F是所有有序实数对(a,b)的集合,其中$a,b\in\mathbf{R}$.

(1) 如果集合F的加法与乘法分别定义为

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)(c,d)=(ac,bd).$$

那么F是否成为域?

(2) 如果F的加法与乘法分别定义为

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

与

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

那么F是否成为域?

(3) 如果F表示所有有序复数对的集合,加法与乘法仍如(1)与(2)那样规定,结论又怎样?

5. 证明:在交换环的定义中,如果除加法交换律外,其他公理都假定成立,则可以推出加法交换律也成立.换句话说,在交换环的定义中,加法交换律这一公理可以去掉.

1.2　一元多项式环

在中学里,我们遇到过一次方程与二次方程,它们可以从两方面推广.一方面从次数推广,即推广为三次、四次以至n次的方程;另一方面从系数所属的范围推广.由上节可以看到,系数所属的实数域可以推广为其他的数域.这就引出以下的

定义.

定义　设 F 是数域,x 是未定元,$a_0,a_1,\cdots,a_n\in F,a_n\neq 0$,$n$ 是非负整数,则

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 F 上一元多项式,其中 a_ix^i 称为多项式 $f(x)$ 的 i 次项,数 a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数,$i=0,1,2,\cdots,n$.特别地,a_0 称为 $f(x)$ 的常数项,a_nx^n 称为 $f(x)$ 的首项(或最高次项),a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数.如果 $a_n=1$,则 $f(x)$ 称为首一多项式.非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数,记为 $\deg f(x)$.如果多项式 $f(x)$ 的系数全为零,则 $f(x)$ 称为零多项式,记为 0.约定零多项式的次数为 $-\infty$.

注意,零次多项式不是零多项式.有时也称零次多项式为纯量多项式.如果上述定义中,把数域 F 改成数环,则 $f(x)$ 称为数环 F 上一元多项式,其他的规定是相同的.

数域 F 上一元多项式 $f(x)$ 的全体所成的集合记为 $F[x]$.设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0$$

是数域 F 上两个多项式.如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $a_i=b_i,i=0,1,2,\cdots$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 称为相等,记为 $f(x)=g(x)$.多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和定义为多项式 $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots$,即多项式 $f(x)+g(x)$ 的 i 次项系数为 $a_i+b_i,i=0,1,2,\cdots$,其中当 $n\geqslant m$ 时,约定 $g(x)$ 的系数 $b_{m+1},b_{m+2},\cdots,b_n$ 都为零,而当 $n<m$ 时,约定 $f(x)$ 的系数 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_m$ 都为零.于是便定义了多项式的加法,容易看出

$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max\{\deg f(x),\deg g(x)\}.$$

容易验证,多项式的加法满足以下公理.设多项式 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,则有

(A1) 加法结合律:

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x));$$

(A2) 加法交换律:

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

(A3) 存在零元素,即存在零多项式 $0\in F[x]$,使得

$$f(x)+0=0+f(x)=f(x);$$

(A4) 对每个多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

都存在多项式

$$-f(x)=-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0,$$

它称为多项式 $f(x)$ 的负多项式,使得

$$f(x)+(-f(x))=(-f(x))+f(x)=0.$$

对于 $F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$,其乘积 $f(x)g(x)$ 定义为

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中

$$c_{n+m}=a_nb_m,$$

$$c_{n+m-1}=a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m,$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_i=\sum_{j+k=i}a_jb_k,$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_0=a_0b_0.$$

于是规定了多项式的乘法. 因为 $a_n\neq0, b_m\neq0$,故 $a_nb_m\neq0$. 所以

$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x).$$

容易验证,多项式的乘法适合以下的公理. 设多项式 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,则有

(M1) 乘法结合律:

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x));$$

(M2) 乘法交换律:

$$f(x)g(x)=g(x)f(x);$$

(M3) 存在单位元素,即存在纯量多项式 $e(x)=1$,使得

$$f(x)e(x)=e(x)f(x)=f(x);$$

(D) 加乘分配律:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

于是根据定义,$F[x]$ 是交换环,称为数域 F 上一元多项式环.

习　题

1. 设多项式 $f(x),g(x)\in F[x]$. 证明:当且仅当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 时,$f(x)g(x)=0$.

2. 设多项式 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,且 $f(x)\neq0$. 证明:如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$,则 $g(x)=h(x)$.