高等学校“十一五”精品规划教材

弹性力学

主 编 戴纳新 申向东

TANXING LIXUE

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校“十一五”精品规划教材

弹性力学

主　编　戴纳新　申向东

副主编　高　潮

参　编　梁昌俊　周　利

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是弹性力学的基础教材，重点阐述弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法，为读者今后继续学习和掌握新方法、新技术提供必要的弹性力学基础知识，也为读者的独立思考留有空间。全书主要包括：绪论、平面问题的基本理论、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、有限元的基本理论——变分法、用有限元法解平面问题、空间问题简介、薄板问题等内容。

本书可作为高等学校土木、水利类各专业弹性力学的课程教材，也可供相关工程技术人员参阅。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学 / 戴纳新，申向东主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2010.5
高等学校"十一五"精品规划教材
ISBN 978-7-5084-7490-8

Ⅰ. ①弹… Ⅱ. ①戴… ②申… Ⅲ. ①弹性力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第084393号

书　　名	高等学校"十一五"精品规划教材 **弹性力学**
作　　者	主编　戴纳新　申向东
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16开本　9印张　213千字
版　　次	2010年5月第1版　2010年5月第1次印刷
印　　数	0001—4000册
定　　价	**18.00**元

前言

为了满足目前各农业院校工科专业教育教学改革的需求，在高等学校水电类精品规划教材指导委员会与中国水利水电出版社共同组织下，内蒙古农业大学、大连水产学院、华南农业大学、五邑大学、嘉应学院等5所高校为土木工程、水利水电工程、森林工程及相关专业编写了这本弹性力学教材。本书成书之前，大部分内容以讲义形式经过上述5所高校有关专业试用。

本书主要参照教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会提出的弹性力学课程教学基本要求进行编写。在编写过程中力求做到内容精炼，由浅入深，便于自学。同时全面体现了5所高校近年来的教学成果，并特别重视反映现代土木、水利工程的特点。以培养和造就“厚基础、强能力、高素质、广适应”的创造性应用型人才为宗旨，在阐述弹性力学基本概念、基本原理和基本方法的基础上，将经典内容与计算机数值分析方法相结合，力求实现在经典基础上的更新，为读者今后继续学习和掌握新方法、新技术提供必要的材料力学基础知识，也为读者的独立思考留有空间，以利于创新能力的培养。

本书带*的章为专题部分，读者可根据各专业的不同要求和学时对内容酌情取舍。

本书在编写过程中参阅了书后所列参考文献的相关内容，作者在此表示衷心感谢！

参加本书编写的有：内蒙古农业大学申向东（第一章、第七章、第八章），华南农业大学戴纳新、嘉应学院梁昌俊（第二章），华南农业大学戴纳新（第五章、第六章），大连水产学院高潮（第三章、第四章）。五邑大学周利对第五章、第六章进行了审稿。全书由戴纳新、申向东任主编。

由于作者水平和时间所限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

作者

2010年3月

电子技术
电工技术
电路基础
电工学（少学时适用）
电工学实验教程
电力系统分析
可编程控制器原理与应用
电工仪表及测量
自动控制理论
自动控制原理
变电站电气部分
电力系统微机继电保护
传感器与信号处理电路
电气控制与PLC原理及应用
高电压技术
单片机原理接口及应用（C语言版）
单片机原理与应用开发技术
单片机原理及接口技术
工程训练教程
计算机辅助设计－AutoCAD
大学数学（一）
大学数学（二）
工程制图
工程制图习题集
机械制图
测量学
理论力学
材料力学
弹性力学
汽车构造

目录

第一章 绪 论

教学提示：了解弹性力学的研究对象、任务和性质，本课程与其他课程的关系，弹性力学的研究方法，弹性力学的基本概念及基本假定。

教学要求：理解弹性力学的基本假设，理解体力、面力、应力、应变和位移的基本概念，了解弹性力学在土木工程和水利工程中的应用，掌握弹性力学几个主要物理量的定义、量纲、正负方向及符号规定等。

第一节 弹性力学的任务

弹性力学又称弹性理论，它是材料力学课程的延续，是固体力学的一个分支学科，是研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移的科学。这里指出了弹性力学的研究对象是弹性体。所谓弹性体，是指物体在荷载除后能完全恢复其初始形状和尺寸的物体，物体的应力和应变力之间有着一一对应的关系，呈线性关系。若这种关系是非线性的，则称物体具有非线性弹性性质，但本教材只研究线性弹性力学问题。

在材料力学课程中运用胡克定律讨论各种简单的构件，材料力学中主要研究对象是杆状构件（直杆、小曲率杆），如柱体、梁和轴，在拉压、剪切、弯曲和扭转等作用下的应力、形变和位移。结构力学研究杆系结构，如桁架、刚架或两者混合的构架等。而弹性力学研究各种形状的弹性体，除杆件外，还研究平面体、空间体，板和壳等。因此，弹性力学的研究对象更广泛。

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中发展起来的。弹性力学在土木、水利、机械、航空等工程学科中占有重要的地位。这是因为，许多工程结构是非杆件形状的，需要用弹性力学进行分析；并且对于许多现代的大型工程结构，安全性和经济性的矛盾十分突出，既要保证结构的安全使用，又要尽可能减少巨大的投资，因此必须对结构进行严格而精确的分析，这就需要用弹性力学来解决。例如，现在许多大型体育场馆的高达到几十米，常采用复杂的钢结构形式（见图 1－1），而体育场馆等的安全性又十分重要，就需要用弹性力学方法进行分析。

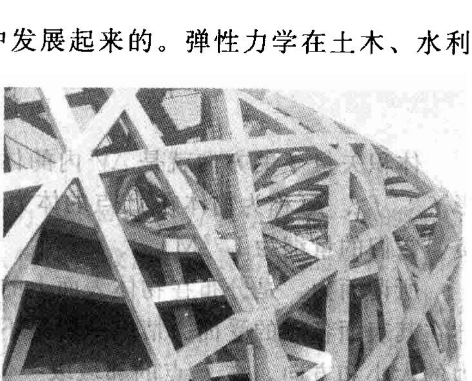

图 1－1 大型体育场钢架

学习本课程的主要任务是：解决实际工程结构的强度与刚度分析问题。从研究方法来

看，弹性力学和材料力学既有相似之处，又有一定的区别。材料力学引入了很多假定，解答也是近似的。弹性力学研究问题，在弹性区域内必须严格考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，在边界上严格考虑受力条件或约束条件，由此建立微分方程和边界条件进行求解，得出较精确的解答，即做出的力学分析被广泛的实验与工程实践证实可行。

第二节 弹性力学的基本概念

一、体力与面力

作用在物体上的外力有两种类型，即面力和体力。

所谓体力就是作用在物体微粒体积上的力，称为质量力，如重力、惯性力、电磁力等。物体各点的受体力一般是不相同。为了表明物体在 $Oxyz$ 内的一点 P 所受体力的大小和方向，在 P 点的邻域取一包含 P 在内的微小体积 ΔV，图 1-2（a），设其上的体力为 ΔF，则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$（单位体积上的力），当 ΔV 无限缩小而趋于 P 点时，$\Delta F/\Delta V$ 趋于一定的极限矢量 f，即

$$f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta V} \tag{1-1}$$

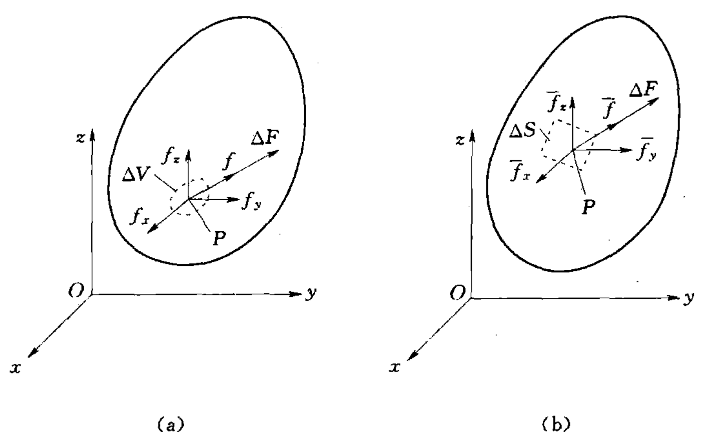

图 1-2 体力和面力图

体积矢量 f 的方向就是 ΔV 内的体力的极限方向。体积矢量 f 在 x、y、z 轴上的投影 f_x、f_y、f_z 称为物体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$。

所谓面力，是分布在物体表面上的力，如风力、液体压力、两物体间的接触力等。物体在其表面各点的受面力情况一般是不相同。为了表明物体在 $Oxyz$ 内的某一点 P 所受面力的大小和方向，在 P 点的邻域取一包含 P 在内的微小面积 ΔS，图 1-2（b），设其上的面力为 ΔQ，则面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta S$。

$$\overline{f}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{1-2}$$

同体力相似，当 ΔS 无限缩小而趋于 P 点时，$\Delta F/\Delta S$ 将趋于 P 点，则 $\Delta Q/\Delta S$ 将趋

于一定的极限$\overline{f}$，即极限矢量$\overline{f}$就是该物体在P点度受面力的集度，$\overline{f}$的方向就是ΔQ的极限方向。矢量$\overline{f}$在坐标轴x、y、z的投影$\overline{f_x}$、$\overline{f_y}$、$\overline{f_z}$称为该物体在P点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿重标轴负方向为负。它们的量纲是$L^{-1}MT^{-2}$。

二、内力和应力

当荷载作用于物体时将引起物体内相邻部分间的相互作用力，称为内力。为了研究物体在其某一点P处的内力，假想用经过P点的一个截面mn将该物体分为Ⅰ和Ⅱ两部分，而将Ⅱ部分抛去，抛去的部分Ⅱ将在截面mn上对保留的部分Ⅰ作用一定的内力，图1-3。

取保留截面的包含P点的微小面积ΔA，设作用ΔA上的内力ΔF，则内力的平均集度（平均应力）为$\Delta F/\Delta A$，令ΔA无限减小而趋于P点，则$\Delta F/\Delta A$将趋于一定的极限p，即

$$\lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=p$$

这个极限矢量p就是物体在截面mn上的、在P点的应力。因为ΔA是标量，所以应力p的方向就是ΔF的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量与物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量，也就是正应力σ及切应力τ，如图1-3所示。应力及其分量的量纲是$L^{-1}MT^{-2}$。

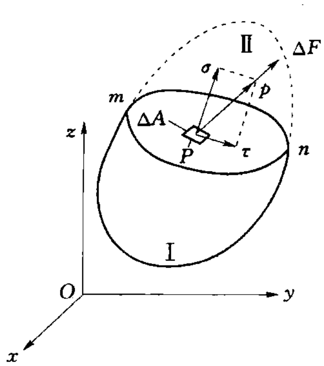

图1-3 内力与应力

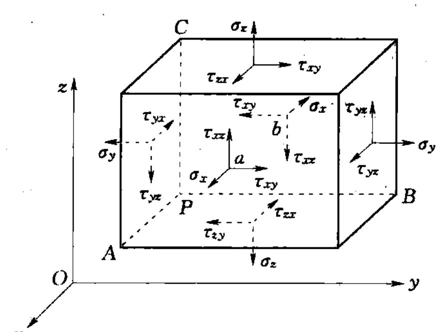

图1-4 空间应力状态

可见，在物体内的同一点P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体，它的棱边分别平行于三个坐标轴而长度为$PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$，如图1-4所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用σ表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个下标字母。例如，正应力σ_x是作用在垂直于x轴的面上，同时也是沿着x轴的方向作用的。切应力用τ表示，并加上两个下标字母，前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上而沿着y轴方向作用的。

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1－4 所示的应力全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于切应力说来，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\,\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\,\frac{\Delta z}{2}=0$$

同样可以列出其余两个相似的方程，简化以后，得出

$$\begin{cases}\tau_{yz}=\tau_{zy}\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}\\ \tau_{xy}=\tau_{yx}\end{cases}\tag{1-3}$$

这就证明了切应力互等性：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，切应力记号的两个下标字母可以对调。

在这里，没有考虑应力由于位置不同而变化，也就是把六面体中的应力当作均匀应力，而且也没有考虑体力的作用。即使考虑到应力的变化和体力的作用，仍然可以推导出切应力的互等性。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

三、形变与位移

所谓形变，就是形状的改变，物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个微小的线段 PA、PB、PC（图 1－4）。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为线应变，亦称正应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。线应变用字母 ε 表示，ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变，其他依此类推。线应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变字母 γ 表示，γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 PB 与 PC）之间的直角的改变，同样其他依此类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。

在外荷、温度或其他因素作用下，弹性体内各点一般要发生位置的变化，位置的变化包括两种情形，一种是整个物体由原来的位置移到了新的位置，另一种是物体内部各点之间的距离有所变化。这前一种变化叫做刚体位移，它包括物体的移动和转动，后一种则叫物体的变形。物体的位移常包括这两种情形，在本教材中，将主要研究物体的变形。物体中每点的位移是不同的，因此每点的位移都是点的函数，即 x、y、z 的函数。在坐标系

$Oxyz$ 中，取物体中任意一点 $P(x, y, z)$，变形后这点移至 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则矢量 PP_1 就是物体在变形过程中 P 点的位移，将这一位移分别投影到三个坐标轴上，称为位移分量并用 u、v、w 来表示，各位移分量用坐标表示为

$$u=x_1-x$$
$$v=y_1-y$$
$$w=z_1-z$$

式中的位移分量 u、v、w 应随点不同而异，它同时是 P 点到达 P_1 点产生的一个位移矢量，因此 u、v、w 不但是 x、y、z 的函数，亦必须是单值的，即一个点位移后不得有几个新的位置。

第三节　弹性力学的基本假定

自然科学中的各门学科都有自己的前提条件和研究范围，弹性力学亦不例外。在这里，先对弹性力学研究的物体给出一个限定范围，如果超出该范围，弹性力学的理论将不再适用，这一范围和前提条件，即为下面的几个基本假定：

(1)连续性假定。物体内部由连续介质组成没有空隙，因而各个力学量，如内力、位移、形变等量是连续的，可以用坐标变量的连续函数表示。严格地说，物体是由分子组成的，分子和分子相互存在着间隙。考虑的是物体的宏观力学过程，物体的宏观尺寸远大于粒子之间的相对距离，故此假定被视为是成立的，且这一假定已被实验所证实是合理的。

(2)线性弹性假定。物体在外界因素(外荷载、温度变化等)作用下引起的变形，在外界因素撤除后，完全恢复其变形前的形状而无残余变形。从数学角度看，即为应力与应变之间互为单值函数，且与变形过程无关，此为弹性。同时还假定物体变形服从胡克定律，即应力与应变成正比，此为线性。满足弹性和应力应变线性关系即为线弹性物体。

(3)均匀性假定。整个物体是由同一材料组成的，其弹性性质不随点而变，任何一点的弹性性质可代替整个物体的弹性性质。

(4)各向同性假定。物体的弹性在所有方向都相同，物体的弹性常数不随方向而变。例如木材不符合这一假定。

(5)微小变形假定。在外力或温变作用下，物体变形所产生的位移量与物体本身尺寸相比是微小的。即在研究物体受力后的平衡状态时，可以不考虑其原始尺寸的改变。在计算形变时，可略去形变的二次项，得到弹性理论的微分方程将是线性的，而且求解可以应用叠加原理。

上述基本假定中，第(5)条属于几何假定，其余假定是对材料物性的假定。这些假定将是本教材所介绍的弹性力学的基础和前提条件。以后各章推导的基本公式及各种应用均在此基础上。

第四节　有关弹性力学的基本方法

弹性力学是一门古老的学科，但现代科学技术的发展给弹性力学提出了越来越多的理论问题和工程应用问题。弹性力学在不少重要领域展现出它的重要性。

弹性力学问题的求解方法可分为三种类型。

一、教学方法

（1）经典的静力（动力学）——几何——物性关系式。

（2）能量方式——变分方法。

二、实验方法

机电方法、光学方法、声学方法等。

三、实验与教学相结合的方法

特殊部位的应力状态难以确定，可用光弹等方法测定，作为已知量，尔后进入数值计算。

数学方法是利用数学分析的方法，对弹性力学边值问题进行求解，由此求得所研究的弹性体的应力场和位移场，该方面的研究成果构成了弹性力学的基本内容。实际上，数学求解时，必须解含有 15 个未知函数的偏微分方程组，只能求得很少特殊问题的解析解，一般问题的求解难度相当大，甚至不可能。因此，发展了一些近似解法。例如逆解法、半逆解法和基于能量原理的变分方法等。除此之外，数值方法也是一种十分有效的方法，主要的方法有：差分法、有限元法和边界元法。目前在计算机普及的情况下，数值方法已成为一种普遍而实用的方法。

实验方法是用机械的、电学的、光学的、声学的方法等来测定所研究的弹性体在外力作用下应力和应变的分布规律，如光弹性法、云纹法等。在弹性力学中，许多难于用数学求解的问题往往借助实验方法求解。

对于较为复杂的弹性结构还可结合上述两种方法来求解，以便求得可靠的解答。

思　考　题

1-1　弹性力学和材料力学相比，其研究对象有什么区别？

1-2　弹性力学和材料力学相比，其研究方法有什么区别？

1-3　试考虑在土木、水利工程中有哪些非杆件和杆系的结构？

第二章　平面问题的基本理论

教学提示： 本章首先推导弹性力学平面问题基本方程，再以平面问题为主线，给出弹性力学问题的边界条件、圣维南原理及其具体写法。最后探讨位移法、应力法以及应力函数法等常用解法所必须满足的方程。

教学要求： 熟练掌握八个弹性力学平面问题的基本方程（平衡微分方程、几何方程、物理方程），理解圣维南原理，理解位移法、应力法和应力函数法解平面问题的基本原理，为第三、四章的学习打下理论基础。

第一节　平面问题的基本概念

在学习方法上，弹性力学从最简单的二维平面问题开始（因为一维的杆件和杆系已经在材料力学和结构力学中研究了），再推广到三维的空间问题（本书第七、八章），这样才符合人类认识问题的规律，学习和理解也容易些。

在实际工程中，许多弹性力学的空间问题都可以转化为平面问题来研究，虽然任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，严格说来，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是，如果所考察的弹性体具有某种特殊的形式，并且承受的是某些特殊的外力和约束，就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理，分析和计算的工作量将大为减少，而所得的成果却仍然可以满足工程上对精确度的要求。总之，平面问题是弹性力学的起点和重点。

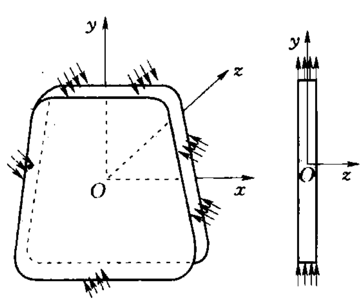

图 2-1　平面应力问题

工程实际问题简化为平面问题时，一般可分为两种情况：

(1) 平面应力问题。设有很薄的等厚度薄板，如图2-1所示，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力或约束。同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。

设薄板的厚度为 δ。以薄板的中面为 xy 面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。因为板面上$\left(z\pm\dfrac{\delta}{2}\right)$不受力，所以有

$$\begin{cases}(\sigma_z)_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0\\(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0\\(\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0\end{cases}$$

由于板很薄，外力又不沿厚度变化，应力沿着板的厚度又是连续分布的，因此，可以

认为在整个薄板的所有各点都有

$$\begin{cases}\sigma_z=0\\ \tau_{zx}=0\\ \tau_{zy}=0\end{cases}$$

注意到切应力的互等性，又可见 $\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$。这样，只剩下平行于 xy 面的三个平面应力分量，即 σ_x、σ_y、τ_{xy}，所以这种问题称为平面应力问题。同时，也因为板很薄，作用于板上的外力和约束都不沿厚度变化，这三个应力分量以及相应的形变分量，都可以认为是不沿厚度变化的。这就是说，它们只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变化。但要注意到 $\varepsilon_z\neq 0$。

（2）平面应变问题。与上相反，设有很长的柱形体，它的横截面不沿长度变化，如图 2-2 所示，在柱面上受有平行于横截面而且不沿长度变化的面力或约束，同时，体力也平行于横截面而且不沿长度变化（内在因素和外来作用都不沿长度变化）。

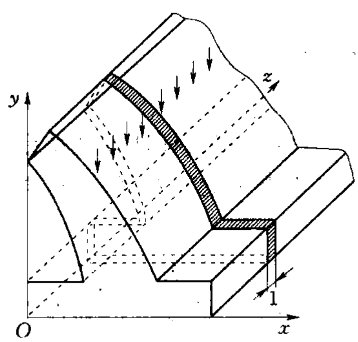

图 2-2 平面应变问题

假想该柱形体为无限长，以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴，则所有一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿 z 方向变化，而只是 x 和 y 的函数，此外，在这种情况下，由于对称（任一横截面都可以看作是对称面），所有各点都只会沿 x 和 y 方向移动，即只有 u 和 v，而不会有 z 方向的位移，也就是 $w=0$。因为所有各点的位移矢量都平行于 xy 面，所以这种问题称为平面位移问题。又由对称条件可知，$\tau_{zx}=0$，$\tau_{zy}=0$。根据切应力的互等性，又可以断定 $\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$。由胡克定律，相应的切应变 $\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$。又由于 z 方向的位移 w 处处均为零，就有 $\varepsilon_z=0$。因此，只剩下平行于 xy 面的三个形变分量，即 ε_x、ε_y、γ_{xy}，所以这种问题在习惯上称为平面应变问题。由于 z 方向的伸缩被阻止，所以 σ_z 一般并不等于零。

有些问题，例如挡土墙和很长的管道、隧洞问题等，是很接近于平面应变问题的。虽然由于这些结构不是无限长的，而且在两端面上的条件也与中间截面的情况不同，并不符合无限长柱形体的条件，但是实践证明，对于离开两端较远之处，按平面应变问题进行分析计算，得出的结果却是工程上可用的。

如果所研究的情况是 $\varepsilon_z\neq 0$，$\sigma_z\neq 0$，则该问题是空间问题，请参阅第七章。

研究平面问题时，分析一个物体的受力和变形情况，应从静力学、几何学和物理学三方面考虑，分别建立三套方程，即为平衡微分方程、几何方程、物理方程，下面三节将分别讨论。

第二节 平衡微分方程

本节研究平面问题的静力学，亦即平衡微分问题在弹性体内任一点取出一个微分体，根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式，也就是平面问题的平衡微分方程。

如图 2-1 所示的薄板，或图 2-2 所示的柱形体，取出一个微小的正平行六面体，它在 x 和 y 方向的尺寸分别为 dx 和 dy，如图 2-3 所示。为了计算简便，它在 z 方向的尺

寸取为一个单位长度。

一般而论，应力分量是位置坐标 x 和 y 的函数，因此，作用于左右两对面或上下面对面的应力分量不完全相同，而具有微小的差量。例如，设作用于左面的正应力是 σ_x，则作用于右面的正应力，由于 x 坐标的改变，将是 $\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\times\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots$，略去二阶以及二阶以上的微量后便是 $\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$（若 σ_x 为常量，则$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x=0$，而左右两面的正应力将都是 σ_x，这就是第一章第二节中所说的均匀应力的情况）。同样，设左面的切应力是 τ_{xy}，则右面的切应力将是 $\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$；设上面的正应力及切应力分别为 σ_y 及 τ_{xy}，则下面的正应力及切应力分别为 $\sigma_y+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y$ 及 $\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$。因为六面体是微小的，所以它在个面上所受的应力可以认为是均匀分布，作用在对应面的中心。同理，六面体所受的体力，也可以认为是均匀分布，作用在它的体积的中心。

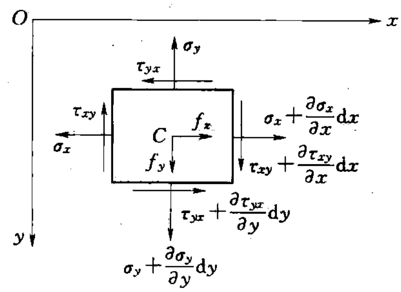

图 2－3　微元体的应力平衡状态

（1）以通过中心 C 并平行于 z 轴的直线为矩轴，列出力矩的平衡方程 $\sum M_c=0$

$$\left(\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\times1\times\frac{\mathrm{d}x}{2}+\tau_{xy}\mathrm{d}y\times1\times\frac{\mathrm{d}x}{2}-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times1\times\frac{\mathrm{d}y}{2}-\tau_{yx}\mathrm{d}x\times1\times\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

在建立这一方程时，按照第一章第三节中的第（5）条基本假定，用了弹性体变形以前的尺寸，而没有用平衡状态下的、变形以后的尺寸。在以后建立任何平衡方程时，都将同样地处理，不再加以说明，将上式除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，并合并相同的项，得到

$$\tau_{xy}+\frac{1}{2}\times\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x=\tau_{yx}+\frac{1}{2}\times\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

略去微量不计（亦即命 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 都趋于零），得出

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2-1}$$

这不过是再一次证明了切应力的互等性。

（2）以 x 轴为投影轴，列出投影的平衡方程 $\sum F_x=0$

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\times1-\sigma_x\times\mathrm{d}y\times1+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times1-\tau_{yx}\mathrm{d}x\times1+f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times1=0$$

约简后，两边除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0$$

（3）由平衡方程 $\sum F_y=0$ 可得一个相似的微分方程。于是得出平面问题中应力分量与体力分量之间的关系式，即平面问题中的平衡微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{cases} \tag{2-2}$$