中学各科教学重点难点解析丛书

初中数学

重点·难点·解析与训练

王立明　翁立强　刘建业
杨文焕　陆剑鸣　李荣林　编写

广西师范大学出版社

·中学各科教学重点难点解析丛书·

初中数学
重点·难点·解析与训练

王立明　翁立强　刘建业
杨文焕　陆剑鸣　李蓉林
编　写

广西师范大学出版社

（桂）新登字04号

中学各科教学重点难点解析丛书

初中数学重点·难点·解析与训练

王立明　翁立强　刘建业　编写
杨文焕　陆剑鸣　李蓉林

☆

广西师范大学出版社出版
（广西桂林市育才路3号）
广西新华书店发行　南宁地区印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张11　字数273千字
1990年1月第1版　1992年3月第5次印刷
印　数：121,001—136,200
ISBN 7—5633—0681—1/G·578
定价：3.85元

序

学习的过程就是知识积累和能力培养的过程。一个中学生要能有效地积累知识并把知识转化为能力，必须掌握所学知识的重点，突破难点。只有这样，才能收到事半功倍的效果。为了帮助初高中各年级同学特别是毕业班的同学，牢固掌握各科知识重点，融会贯通地理解难点，以利于他们的复习和升级、升学，我们约请了北京大学附属中学30多位长期在毕业班任教，具有丰富的教学和辅导工作经验并有众多著述的各科骨干教师，编写了这套《中学各科教学重点难点解析丛书》。丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和现行全国统一中学教材，结合近几年来北京地区中学特别是编写者所在学校的教学实践和教改成果，对中学各科（高中政治除外）教材的重点、难点，作出尽量准确精当的解析，并通过对典型例题的分析指出解题的思路、方法和技巧，同时提供一定数量的配套练习和综合训练，以帮助学生牢固掌握知识，培养学生的思维能力、分析能力和表达能力。这套丛书对中学各科教师的教学教改也有参考价值。

参加这套丛书编辑工作的有中国人民大学附中校长高级教师胡俊泽、清华大学附中特级教师孔令颐、北京大学附中副校长高级教师孙增彪、广西师范大学出版社副社长党玉敏、副总编余鑫晖、漓江出版社副总编邓小飞，以及北大附中的高级教师陈育林、董世奎、刘实文、张珑、邱永仪、王立明、韩福胜等同志。参加编辑工作的还有北京教育学院宣武分院、崇文分院、广西师范大学出版社、漓江出版社等单位的同志。

我们希望这套丛书能受到中学各年级同学特别是初高中毕业班同学们的欢迎。由于编写时间仓促，疏漏之处在所难免，恳切期望读者和专家们批评指正。

张德政　默　一

1990年2月

说　　明

当你步入初中，特别是初中毕业前夕，总希望有一本帮助你加深理解初中数学教学内容，提高你的分析问题能力和解题技巧的书，陪伴你愉快地度过初中的学习，使你在初中阶段的数学知识有一个坚实的基础．为此，我们根据现行数学教学大纲编写了此书．

本书将初中数学中的代数归纳为九个专题，几何归纳为六个专题．每一专题的内容源于教材，并作了适当的补充，指出重点、难点；根据知识点和对数学能力培养的要求精选了一定数量的例题．对重点例题分析详细透彻，解法灵活多变，通过说明，揭示了一些题目的解题规律和技巧，力求在数学方法和分析能力上给读者以启迪．每个专题后配备了一定数量的练习题，并附有供参考的答案与提示．

本书可作为初一、初二年级学生的课外“辅导员”，与初三课本结合起来就是一套有基础、有提高、重点突出的复习教材，也可供教师教学时参考．

本书分别由北大附中王立明、翁立强、李蓉林、刘建业、杨文焕、陆剑鸣六位老师编写，由于水平有限，编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正．

编　者

1989年12月

目　　录

代数部分

几何部分

代 数 部 分

一 实 数

（一）主要内容

在实数的概念中，重点是掌握相反数、有理数、无理数、实数、绝对值等基本概念，在实数的性质和运算中，重点在于实数大小的比较和有理数的运算。难点是绝对值的概念和有理数的运算。

1. 实数系

$$\text{实数}\left\{\begin{array}{l}\text{有理数}\left\{\left.\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\right.\\ \text{无理数}\left\{\left.\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\right.\end{array}\right.$$

2. 相反数

实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数，零的相反数是零。互为相反数的两个数它们的绝对值相等，而符号相反，它们的和为零。数轴上，表示互为相反数的两个实数的点位于原点的两侧，且与原点的距离相等。应注意相反数与倒数的区别：a，b 互为相反数，当且仅当 $a+b=0$，而 a，b 互为倒数，当且仅当 $ab=1$。

3. 绝对值

一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．即

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

实数的绝对值是一个非负数，从几何上看一个实数的绝对值，就是数轴上表示这个实数的点到原点的距离．掌握好绝对值的概念，对于掌握实数大小的比较，有理数的运算及算术根的概念是相当重要的．

4. 实数与数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线叫数轴，原点、方向、长度单位称为数轴的三要素．数轴上的每一个点都代表一个实数，而每一个实数都可以用数轴上唯一的点来表示．实数和数轴上的点是一一对应的．

5. 实数大小的比较

正数大于零，负数小于零，正数大于一切负数，两个正数，绝对值大的数较大，两个负数，绝对值大的反而小．从数轴上看，数轴上右边的点表示的实数大于左边的点所表示的实数．

6. 实数的运算

在实数范围内加、减、乘、除、乘方运算都可以进行，但开方运算不一定能进行，如负数不能开偶次方．

实数运算的基础是有理数运算，有理数的一切运算性质和运算律都适用于实数运算．

正确地确定运算结果的符号和灵活运用各种运算律来进行运算是掌握好实数运算的关键．

（二）例题分析

例1 判断下列命题是否正确，正确的在（ ）内画“√”，错误的在（ ）内画“×”．

（1）凡是可以写成$\frac{q}{p}$形式的实数都是有理数．（ ）

（2）实数a与$-a$中必有一个表示负数．（ ）

（3）在实数集合中，不属于有理数集合的数一定属于无理数集合．（ ）

（4）不在数轴原点右边的点所表示的实数是负数．

（ ）

（5）若$|a+2|=|b+2|$，则$a=\pm b$．（ ）

（6）若$x>y$，则$x^2>y^2$．（ ）

（7）$3-(-x+2)=3+x+2$．（ ）

（8）$5\div\left(-\frac{2}{3}\right)\times 3=5\div(-2)$．（ ）

分析 准确掌握基本概念和运算法则是解好判断题的关键．在（1）中，有理数都可以写成分数的形式，而作为一个分数，其分子、分母都必须是整数，由于题目中，并没有指明p，q是否全都是整数，这样，p，q可以取任何实数$(p\neq 0)$如$p=2$，$q=\sqrt{2}$，这样$\frac{q}{p}$就不是有理数．

在（2）中，应考虑到a取特殊值零时的情况，此时$a=0$，$-a=0$，两个数中任何一个都不取负数．

在（3）中，由于有理数、无理数统称为实数，因此一个实数必属于有理数集合与无理数集合之一．

在（4）中，要注意审题，搞清题目的含义．不在数轴原点右边的点，包含原点左边的点与原点，而原点对应的实数不

是正数，也不是负数。

在（5）中，$|a+2|=|b+2|$，表明 $a+2$ 或与 $b+2$ 相等或是 $b+2$ 的相反数，因此 $a+2=\pm(b+2)$ 即 $a+2=b+2$，$a=b$ 或 $a+2=-(b+2)$，$a=-b-4$。

在（6）中，在实数范围内，若 $a-b>0$，则 $a>b$. 考虑 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 由条件 $x>y$，可得 $x-y>0$，因此 x^2-y^2 的符号，由 $x+y$ 的符号来确定，而 $x+y$ 的符号根据所给条件是无法确定的，它可能大于 0，也可以小于 0 或等于 0。

在(7)中，注意到去括号法则：当括号前是“－”号时，去掉“－”号及括号，括号内的各项都要改变符号。

在(8)中，应提醒学生注意运算顺序及乘除混合运算中结合律是不成立的。

解 （1）（×）.（2）（×）.（3）（√）.（4）（×）.
（5）（×）.（6）（×）.（7）（×）.（8）（×）.

例2 下列各数中，哪些是有理数，哪些是无理数？

$\frac{9}{11}$，$-\sqrt{7}$，$\sqrt{\frac{16}{81}}$，$\frac{\pi}{2}$，0，1010010001，$\log_2\sqrt{2}$，0.31023023……，tg120°，$-3.121121112\cdots$

解 $\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$，$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\operatorname{tg}120^\circ=-\sqrt{3}$.

有理数：$\frac{9}{11}$，$\sqrt{\frac{16}{81}}$，0，101001001，$\log_2\sqrt{2}$，

0.31023023…。

无理数：$-\sqrt{7}$，$\frac{\pi}{2}$，tg120°，$-3.121121112\cdots$。

例3 比较下列各组中两个实数的大小。

(1) $-\frac{5}{7}$和$-\frac{2}{3}$； (2) $\sqrt{34}-\sqrt{33}$和$\sqrt{33}-\sqrt{32}$；

(3) $\frac{\pi+1}{1-\pi}$和$-\frac{\pi+1}{2}$； (4) a 和$\sqrt{a}$ $(0<a<1)$.

分析 两个实数比较大小，从数轴上看，数轴上右边的点所表示的实数大于左边点表示的实数，或用比较法，计算两个数的差，根据差的符号来确定两个数的大小. 当两个数都是正数时，还可以用比商的方法，即若$a>0$，$b>0$，$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$. 对于两个负数，绝对值大的数反而小.

解 (1) $\because \left|-\frac{5}{7}\right|=\frac{5}{7}$，$\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}>\frac{2}{3}$，

$\therefore -\frac{5}{7}<-\frac{2}{3}$.

(2) $\because \sqrt{34}-\sqrt{33}=\dfrac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{33}}$，

$\sqrt{33}-\sqrt{32}=\dfrac{1}{\sqrt{33}+\sqrt{32}}$，

$(\sqrt{34}+\sqrt{33})-(\sqrt{33}+\sqrt{32})=\sqrt{34}-\sqrt{32}>0$

$\therefore \sqrt{34}+\sqrt{33}>\sqrt{33}+\sqrt{32}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{33}}<\dfrac{1}{\sqrt{33}+\sqrt{32}}$

即 $\sqrt{34}-\sqrt{33}<\sqrt{33}-\sqrt{32}$

说明 其倒数大的实数反而小.

(3) $\left|\frac{\pi+1}{1-\pi}\right|=\frac{\pi+1}{\pi-1}$， $\left|-\frac{\pi+1}{2}\right|=\frac{\pi+1}{2}$，

$$\because \quad \frac{\dfrac{\pi+1}{\pi-1}}{\dfrac{\pi+1}{2}}=\frac{2}{\pi-1}<1,$$

$$\therefore \quad \frac{\pi+1}{\pi-1}<\frac{\pi+1}{2}.$$

$$\because \quad \frac{\pi+1}{1-\pi}>-\frac{\pi+1}{2}.$$

（4） $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$.

$\because 0<a<1 \quad \therefore 0<\sqrt{a}<1 \therefore \sqrt{a}-1<0$.

$\therefore \sqrt{a}(\sqrt{a}-1)<0$, $\therefore a<\sqrt{a} \quad (0<a<1)$

例4 若a，b，c三实数在数轴上的对应点为A，B，C，其位置如图 1－1 所示．

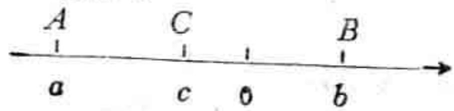

图 1-1

（1）判断 $a+b$、$c-a$、$a\div c$、$c\times b$的符号．

（2）化简 $c-|a-b|+|a+c|-|b+c|$．

分析 数轴是数学中的一个重要工具，它能直观地表现实数的某些性质，如数轴上右边点所对应的实数大于左边点所对应的实数，在原点右侧的点所对应的实数是正数，原点左侧的点所对应的实数是负数，数轴上距原点较远的点所对应的实数的绝对值较大等．复习中，应使学生熟悉数轴，并能利用数轴迅速地进行判断和计算．

解 根据A、B、C三点在数轴上的位置，我们有，

$a<c<b$，$a<0$，$c<0$，$b>0$，$|a|>|b|>|c|$．

（1）$a+b=-(|a|-|b|)<0$，

$c-a>0$，$a\div c>0$，$c\times b<0$.

(2) 原式 $=c-[-(a+b)]+[-(a+c)]-(b+c)$

$$=c+a+b-a-c-b-c$$

$$=-c.$$

例5 $a<0$，化简 $|a-|-a||$.

分析 绝对值和算术根都是非负数，在去掉绝对值符号时，必须先考虑绝对值符号内代数式的符号.

解 $\because a<0$，$\therefore -a>0$. $\therefore |-a|=-a$.

$\therefore$ 原式 $=|a-(-a)|=|2a|=-2a$.

例6 化简 $|3x+2|-|1-2x|$.

分析 当无法确定绝对值符号内代数式的符号时，应分情况进行讨论，其方法一般采用"零点分区间法"，即先求出使各代数式的值为零的字母的值，这些值将字母的取值范围分为若干个区间，然后逐个区间进行讨论各代数式在此区间内的符号，然后，去掉绝对值符号，再进行化简，分解时还应注意，使绝对值内各代数式标准化. 即按字母的降幂排列，并使最高次项的系数为正，以减少化简过程中出错的可能性.

解 $|3x+2|-|1-2x|=|3x+2|-|2x-1|$.

令 $3x+2=0$，$x=-\dfrac{2}{3}$，令 $2x-1=0$，$x=\dfrac{1}{2}$.

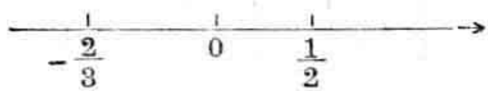

图 1-2

当 $x<-\dfrac{2}{3}$ 时，原式 $=-(3x+2)-[-(2x-1)]$

$$=-x-3.$$

当$-\frac{2}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}$时，原式$=(3x+2)-[-(2x-1)]$

$$=5x+1.$$

当$x \geqslant \frac{1}{2}$时，原式$=(3x+2)-(2x-1)=x+3$。

例7 已知x、y、z为实数，且

$$\sqrt{x-2}+3|y+1|+5(2z+1)^2=0.$$

求$x+y^{11}+z^2$的相反数的倒数的立方。

分析 绝对值、算术根和完全平方数都是非负数，当若干个非负数的和为零时，这几个数都为零，利用它，我们可以求出x、y、z的值. 另外还应注意相反数与倒数这两个概念的区别。

解 $\because \sqrt{x-2}+3|y+1|+5|2z+1|^2=0$,

$\therefore x=2,\ y=-1,\ z=-\frac{1}{2}$.

$\therefore x+y^{11}+z^2=2+(-1)^{11}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

$\therefore x+y^{11}+z^2$的相反数的倒数的立方为

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{64}{125}.$$

例8 计算 $\dfrac{-3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div 5\frac{2}{3}}$

分析 分数、小数混合运算时通常把小数化为分数，带分数化为假分数，计算较为简便. 运算中应注意运算律的应用，以简化计算。

解 原式$=\dfrac{-\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{17}-\dfrac{1}{8}\times\dfrac{3}{17}}{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{3}{17}}$

$$=\frac{\left(-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{8}\right)\times\dfrac{3}{17}}{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{3}{17}}$$

$$=\frac{\left(-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{8}\right)\times 8}{\dfrac{5}{4}\times 8}=-\frac{7}{10}.$$

例9 计算：$1\dfrac{1}{2}\div\dfrac{3}{4}\times(-0.2)\times1\dfrac{3}{4}\div1.4\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

分析 乘除混合运算时，只化成乘积的形式，并应先确定积的符号．当负数的个数是偶数时，乘积为正，负数的个数为奇数时，积为负．

解 原式$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)\times\dfrac{7}{4}\times\dfrac{5}{7}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

$$=\frac{3\times4\times1\times7\times5\times3}{2\times3\times5\times4\times7\times5}=\frac{3}{10}.$$

例10 计算

$$\left[-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}+(-2^2)\times0.125+(\sqrt{3}-1)^0\div\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\div\left|2\times(-1.25)^2-3\frac{5}{8}\right|.$$

分析 本题中应注意，乘方运算的底 $-2^2\neq(-2)^2$，对于负指数、零指数及分数指数幂的意义要清楚．