高等数学

解题指引与同步练习

④ 不定积分

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曾…②吴… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸 乔 丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：32 **字数**：645 千
版 次：2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近 50 年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”(基本概念、基本理论、基本方法)，必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”.然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007 年 10 月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已10年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

不定积分

微分法是给出一个函数,求其导数或微分.不定积分法是相反的问题,即已知一个函数的导函数或微分,求回该函数,它是计算定积分和求解微分方程的有力工具.因此,本章的重点是不定积分的概念和计算方法.

一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数

设函数 $f(x)$定义在区间 I 上,如果存在函数 $F(x)$,使对任意的 $x\in I$,都有

$$F'(x) = f(x) \qquad 或 \qquad dF(x) = f(x)dx$$

则称 $F(x)$为 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数.

例 1 (1) 函数 $F(x)=\frac{x^3}{3}$是函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的原函数,因为对任一 x 都有$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$;

(2) 函数 $F(x)=2+\cos x$ 是函数$f(x)=-\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的原函数,因为在这区间有$(2+\cos x)'=-\sin x$.

关于原函数,有两个结论:

第一,连续函数必存在原函数.由于初等函数在其定义区间上连续,所以初等函数在其定义区间上都有原函数;

第二,一个函数 $f(x)$如果存在原函数 $F(x)$,则它的原函数有无穷多个,并且所有的原函数具有 $F(x)+C$(C 为任意常数)的形式,称 $F(x)+C$ 为$f(x)$的原函数的一般表达式,它表示一族函数.

例 2 因为$(\sin^2x)'=\sin2x$, $\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)'=\sin2x$, $(-\cos^2x)'=\sin2x$, $\cdots$,$(\sin^2x+C)'=\sin2x$(C 为任意常数).所以,$\sin^2x$, $-\frac{1}{2}\cos2x$, $-\cos^2x$, $\cdots$, $\sin^2x+C$ 都是 $\sin2x$ 的原函数.由三角恒等公式知:

$$\sin^2x=\sin^2x+0 \qquad -\frac{1}{2}\cos2x=\sin^2x+\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad -\cos^2x=\sin^2x+(-1)$$

可见,它们都是函数族 $\sin^2x+C$ 之中的函数.

2. 不定积分

如果 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数,则 $f(x)$的原函数的一般表达式 $F(x)+C$(C 为任意常数)就称为 $f(x)$的不定积分,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

例 3 求(1) $\int x^2\mathrm{d}x$; (2) $\int(-\sin x)\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$,所以 $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$;

(2) 因为$(\cos x)' = -\sin x$,所以 $\int(-\sin x)\mathrm{d}x = \cos x + C$.

例 4 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C$,求 $f(x)$.

解 由不定积分定义可知,e^{x^2}是 $f(x)$的一个原函数,所以

$$f(x) = (\mathrm{e}^{x^2})' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$$

由上述可见,求函数的不定积分与求导数或微分是互为逆运算,两者有以下关系:

① $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$

② $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

例 5 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,求 $\int(f(x) + 2x)'\mathrm{d}x$.

解 先微分运算,后积分运算,两者抵消后相差一个常数.所以

$$\int(f(x) + 2x)'\mathrm{d}x = f(x) + 2x + C = \frac{\sin x}{x} + 2x + C$$

习题 4－1

基本练习题

1. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) 设 $f(x)$的一个原函数是 $\ln x$,则 $f'(x)=$ ( )

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x^2}$ C. $-\frac{1}{x}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

(2) 下列函数中,不是 $f(x)=4\sin x\cos x$ 的原函数的是 ( )

A. $-\cos 2x$ B. $\sin 2x$ C. $2\sin^2 x$ D. $-2\cos^2 x$

(3) 下列各等式中不正确的是 (　　)

A. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$　　B. $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　D. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$

(4) 如果 $\int f(x)\mathrm{d}x=x\ln x+C$,则 $f(x)=$ (　　)

A. $\ln x+1$　B. $x\ln x+x$　C. $\ln x-1$　D. $x\ln x-x$

2. 填空题:

(1) 函数 x^2 的原函数是______________;

(2) 函数 x^2 是函数______________的一个原函数;

(3) $\left[\int \sin x^2\mathrm{d}x\right]'=$______________;

(4) $\int \mathrm{d}\sqrt{\sin x}=$______________.

3. 验证下列等式:

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+2}+C$;

证

(2) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

证

拓展题

4. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) 设 $F(x)$是 e^{-x^2}的一个原函数,则$\frac{\mathrm{d}F(\sqrt{x})}{\mathrm{d}x}=$ (　　)

A. e^{-x^2}　B. $-2x\mathrm{e}^{-x^2}$　C. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$　D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x^2}$

(2) $\int(1+2^x)\mathrm{d}x=$ (　　)

A. $x+2^x+C$　B. $x+2^{x+1}+C$　C. $x+2^x\ln 2+C$　D. $x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(3) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x =$ (　　)

A. $\tan x + C$　B. $\sec x + C$　C. $\sec^2 x + C$　D. $\csc x + C$

5. 验证下列等式:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$;

证

(2) $\int \sin 2x \mathrm{d}x = 3\cos^2 x + 4\sin^2 x + C$;

证

(3) $\int \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$.

证

二、直接积分法

直接积分是指可以直接套基本积分公式得出结果,或者只需对被积函数进行简单的恒等变形,或利用不定积分的运算法则

$$\int [af(x) + bg(x)] \mathrm{d}x = a\int f(x) \mathrm{d}x + b\int g(x) \mathrm{d}x$$

进行分项积分,就可以得出结果的简单积分方法.

基本积分公式:

(1) $\int k \mathrm{d}x = kx + C$ (k 为常数)　　(2) $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$

(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$　　(4) $\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$　　(6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(7) $\int \cos x dx = \sin x + C$　　(8) $\int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(9) $\int \csc^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$　　(10) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

(11) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$　　(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$　　(14) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

(15) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$　　*(16) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

*(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

*(18) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

*(19) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

*(20) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

*(21) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

例 6　求(1) $\int x^2\sqrt{x}dx$；　(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

解　这两个积分的被积函数都是幂函数,套用公式(2) 有

$$(1) \int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$$

例 7　求 $\int (5x^4 - \frac{2}{x})dx$.

解　根据不定积分的运算法则,分项积分得

$$\int \left(5x^4 - \frac{2}{x}\right)dx = 5\int x^4 dx - 2\int \frac{1}{x}dx = x^5 - 2\ln|x| + C$$

例 8　求 $\int \left(3^x - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + 3e^x\right)dx$.

解　分项积分,即有

$$原式 = \int 3^x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{2}\arcsin x + 3\mathrm{e}^x + C$$

例 9 求 $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 先对被积函数恒等变形,然后分项积分.

$$原式 = \int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int (x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

例 10 求 $\int \frac{3x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 先对被积函数插项变形,再分项积分.

$$原式 = \int \frac{(3x^2+3)-4}{x^2+1}\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 3x - 4\arctan x + C$$

例 11 求 $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$.

解 应用三角恒等公式对被积函数变形,再分项积分.

$$原式 = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int (1+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= x - \cos x + C$$

类似地,有

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

习题 4－2

基本练习题

6. 求下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$

(2) $\int 3^x e^x dx =$

(3) $\int (e^x + x^e)dx =$

(4) $\int (2 - 5x^4)dx =$

(5) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx =$

(6) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x}dx =$

(7) $\int \sqrt{x}(x - 1)^2 dx =$

(8) $\int\left(10^x - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x =$

(9) $\int \frac{x^3-27}{x-3}\mathrm{d}x =$

(10) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$

(11) $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)}\mathrm{d}x =$

(12) $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x =$

(13) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x =$

(14) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{4+x^2}\right)dx=$

(15) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx=$

(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=$

(17) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx=$

(18) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=$

7. 设$(1+x^2)f'(x)=1$,且 $f(0)=4$,求 $f(x)$.

解

拓展题

8. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{e^{2+x}-2^x}{e^x}dx =$

(2) $\int \sec x(\sec x - 3\tan x)dx =$

(3) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx =$

9. 已知 $f'(\sin x)=\cos 2x$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解

三、第一换元积分法(凑微分法)

第一换元积分法的要点是：

若积分公式表中有公式 $\int f(x)dx = F(x) + C$，则积分

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C \qquad (\text{其中 } u = \varphi(x) \text{ 可微})$$

成立.

例如:

由公式 $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \xrightarrow{\text{推出}} \int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$ 成立;

由公式 $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \xrightarrow{\text{推出}} \int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$ 成立;

由公式 $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C \xrightarrow{\text{推出}} \int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + C$ 成立;等等.

亦就是说,基本积分公式中的变量 x 换成新的变元 $u = \varphi(x)$(可微)都成立.这样基本积分公式的应用范围得以拓广:

例 12 求 $\int \sin(2x+3)\mathrm{d}x$.

解 观察题目,对照积分公式表,应该选用公式

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \xrightarrow{\text{推广}} \int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$$

本例中的被积函数 $\sin(2x+3)$ 是由 $\sin u$, $u = 2x+3$ 复合而成,使用公式 $\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$ 时,需将“d”后面凑成 $u = 2x+3$ 才能套用.将题目的不定积分改写成

$$\begin{aligned}\int \sin(2x+3)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\mathrm{d}(2x+3) \quad (\text{换为新变量 } u = 2x+3)\\ &= \frac{1}{2}\int \sin u\mathrm{d}u (\text{套公式})\\ &= -\frac{1}{2}\cos u + C \xlongequal{u = 2x+3 \text{ 回代}} -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C\end{aligned}$$

在上述解题的过程中,所设新的积分变量 u 可不必写出,以便简化解题书写过程.即可缩写为

$$\int \sin(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\mathrm{d}(2x+3) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$$

例 13 求 $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\mathrm{d}x$.

解 观察题目 $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\mathrm{d}x = \int (1-2x)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$,应考虑套用积分公式表中的公式

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \xrightarrow{\text{推广}} \int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$$

于是,可把题目改写成

$$\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\mathrm{d}x = \int (1-2x)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}(1-2x)$$ （$u=1-2x$ 默记于心中而不必写出）

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}+1}(1-2x)^{\frac{2}{3}+1}+C=-\frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{3}}+C$$

例 14 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}\ (a\neq 0)$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

例 15 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{2x}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2-a^2)}{x^2-a^2}=\ln|x^2-a^2|+C$

(2) $\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{x^3+1}\mathrm{d}(x^3+1)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1}+C$

从以上诸例可以看到，用"凑微分法"求不定积分时，熟悉一些常见的凑微分式是十分必要的. 例如（下列各式中，a、b 均为常数，且 $a\neq 0$）：

(1) $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\mathrm{d}(ax^2+b)$

(3) $x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}(x^{\alpha+1}+b)(\alpha\neq-1)$

(4) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(\sqrt{x}+b)$

(5) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|+b)$

(6) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}+b\right)$

(7) $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+b)$

(8) $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x+b)$

(9) $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x+b)$

(10) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x+b)$

(11) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x+b)$

下面运用这些微分式子，结合将被积函数作适当的代数或三角函数式的恒等变形，再用凑微分法求一些不定积分.

例 16 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C$

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(3) $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}+C$

(4) $\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$

$$=x-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$$

(5) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{2^2+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$

(6) $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d\cos x$

$$= \int (\cos^2 x - 1) d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

(7) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(8) $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int e^{\arctan x} d\arctan x = e^{\arctan x} + C$

(9) $\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

例 17 设 $f(x)=\sqrt{1-x}$，求 $\int xf'(1-x^2)dx$.

解 $\int xf'(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f'(1-x^2)d(1-x^2) = -\frac{1}{2}f(1-x^2)+C$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-(1-x^2)}+C = -\frac{|x|}{2}+C$$

例 18 设 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx$.

解 由题设知 $\int f(x)dx = \ln x + C$. 故

$$\int e^{-x}f(e^{-x})dx = -\int f(e^{-x})d(e^{-x}) = -\ln e^{-x} + C = x + C$$

习题 4－3

基本练习题

10．填空题：

(1) $9x^2dx = d(\qquad\qquad)$　　(2) $\frac{1}{x^2}dx = d(\qquad\qquad)$

(3) $\frac{2}{x^3}dx = d(\qquad\qquad)$　　(4) $\frac{2}{\sqrt{x}}dx = d(\qquad\qquad)$