21世纪高等学校规划教材

# 大学物理实验教程

主　编　赵光强　申莉华　李玉琮
主　审　曾爱华

DaXue WuLi ShiYan JiaoCheng

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

# 大学物理实验教程

主　编　赵光强　申莉华　李玉琮
主　审　曾爱华

北京邮电大学出版社
·北京·

## 内容提要

本书是根据教育部颁布的《非物理类理工科大学物理实验课程教学基本要求》，并结合物理实验室仪器设备的实际情况，在总结多年教学实践的基础上编写而成.

全书共分为6章，共40个实验.绪论部分主要介绍物理实验的任务、基本程序和要求，并且给出了物理实验成绩评定的参考定分标准，第1章介绍了有效数字、误差理论和数据处理的基本方法等内容，第2章至第6章选编了40个力学、热学、电磁学、光学和近代物理等方面的实验。书末附录介绍了国际单位制，给出了常用的物理参数和常用仪器的性能参数，以便查阅。

本书可作为高等学校各专业物理实验课的教材，也可作为涉及物理学的实验人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

大学物理实验教程/赵光强，申莉华，李玉琮主编.--北京：北京邮电大学出版社，2010.2

ISBN 978-7-5635-2216-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①赵… ②申… ③李… Ⅲ.①物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第009129号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 大学物理实验教程 |
| **主　　编** | 赵光强　申莉华　李玉琮 |
| **责任编辑** | 唐咸荣 |
| **出版发行** | 北京邮电大学出版社 |
| **社　　址** | 北京市海淀区西土城路10号(100876) |
| **电话传真** | 010-62282185(发行部)　010-62283578(传真) |
| **电子信箱** | ctrd@buptpress.com |
| **经　　销** | 各地新华书店 |
| **印　　刷** | 北京忠信诚胶印厂 |
| **开　　本** | 787 mm×1 092 mm　1/16 |
| **印　　张** | 19 |
| **字　　数** | 453千字 |
| **版　　次** | 2010年2月第1版　2010年2月第1次印刷 |

ISBN 978-7-5635-2216-3　　定　价：35.00元

# 前　言

本书是根据教育部颁发的《非物理类理工科大学物理实验课程教学基本要求》，并结合物理实验室仪器设备的实际情况，在总结多年教学实践的基础上编写而成的.

全书分为6章，共40个实验.绪论部分主要介绍了物理实验的特点、物理实验的基本程序和要求，并且给出了物理实验成绩评定的记分标准.第1章较系统地介绍了有效数字、误差理论和数据处理基本方法等内容；第2至第6章共选编了40个有关力学、热学、电磁学、光学和近代物理等方面的实验，书末附录介绍了国际单位制，给出了常用的物理参数、常用仪器的性能参数，以便查阅.

本教材十分注意对学生实际操作能力的训练，各个实验既注重对实验原理的理论分析，又重视对学生的实验技术的指导.实验中还编写了一些思考题，以培养学生独立思考的能力.

本教材由赵光强、申莉华、李玉琮主编，具体参加编写的老师有赵光强、李玉琮、刘艳辉、戴雄英、贺文阳、易国军、肖刚、申莉华、赵云辉、袁琳、栗新华、兰中建等，全书最后由赵光强统稿.曾爱华教授认真审阅了此书，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

实验教学是一项集体的事业，无论实验的编排、实验仪器的安装调试，还是教材的编写，都是实验室全体工作人员的劳动成果.本书编入的实验选题，汇聚了全体工作人员多年的教学经验和体会.本书虽由以上署名的同志执笔编写，但实际上是一项集体操作，它包含着所有曾在物理实验室工作过的同志的贡献.

由于编者水平有限，书中一定还存在缺点和错误，恳请广大读者批评指正.

编　者

# 目　　录

# 绪　论

## 一、物理实验课的任务

物理学的研究方法通常是在观察和实验的基础上对物理现象进行分析、抽象和概括，建立物理模型，探索物理规律，进而形成物理理论. 可见，物理规律是实验事实的总结，而物理理论的正确与否需要实验来验证.

"大学物理"和"物理实验"原来是一门课程. 由于历史的原因，为了纠正重理论、轻实验的偏向，为了加强实验能力训练，在 20 世纪 70 年代末，物理实验从原来的物理课程中分离出来，独立形成一门课程——物理实验. 它与物理理论课是关系密切的两门课程. 实验需要理论指导，在实验过程中，通过理论的运用与现象的观测、分析，理论与实验相互补充，以加深和扩大学生对物理知识的理解.

物理实验是理工科大学生进行科学实验训练的一门基础课程，也是素质教育的重要环节. 它的主要任务是：

(1)通过实验，学习运用理论指导实验，以及分析和解决问题的科学方法. 在学习物理实验的一些典型方法时，尤其要注重学习它的思想方法，以有助于思维与创新能力的培养.

(2)培养良好的实验习惯. 正确安排仪器位置，正确操作仪器，耐心细致地观察记录.

(3)提高排除实验故障的能力. 实验往往不是一帆风顺，应学会分析和解决实验中出现的问题，促使自己"手脑配合"，逐步提高实验素质.

(4)培养实事求是的科学作风. 实验"小忌"是测量马虎，实验"大忌"是编造数据. 多做实验往往会自觉地杜绝上述弊病，因为马虎测量与拼凑数据，不但会受到教师的批评，也会使自己的实验报告漏洞百出.

(5)培养实验的设计技巧. 经过一系列实验的实际训练，潜移默化，从中领悟到实验设计的技巧，为以后从事科研工作打下良好的基础.

总之，教学的重点放在培养学生科学实验能力与提高学生科学实验素养方面，使学生在获取知识的自学能力、运用知识的综合分析能力、动手实践能力、设计创新能力以及严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度方面得到训练与提高.

## 二、物理实验课的基本环节

实验课与理论课不同，它的特点是同学们在教师的指导下自己动手，独立地完成实验任务. 通常，每个实验的学习都要经历三个环节.

1. 实验的准备预习

实验前必须认真阅读实验相关内容，做好必要的预习，才能按质按量按时完成实验. 同时，预习也是培养自学的一个重要环节.

预习时重点解决以下三个问题：①这个实验最终要得到什么样的结果？②这个实验的理

论依据是什么？③采用哪些步骤去做这个实验？最后写出预习报告.

2. 实验的进行

学生进入实验室进行实验，必须遵守实验规则. 首先签到，然后上交预习报告，最后再按照签到顺序使用指定仪器. 实验过程中，对观察到的现象和数据要及时进行记录，实验过程中，仪器可能会出现故障，在教师的指导下，分析故障原因，学会排除故障. 实验时，要做好实验数据的记录，实验结束时要将实验数据交教师审阅，经教师验收签字认可，再做好仪器设备的整理工作后，才可离开实验室.

3. 实验总结

实验后，要及时对实验数据进行处理. 数据处理后，应给出实验结果，最后写出一份实验报告.

实验报告通常分为三部分：

第一部分：预习报告.

它作为实验报告的前面部分，要求在正式做实验前写出. 内容包括：

①实验名称；

②实验目的；

③实验原理（在理解的基础上，用简短的文字扼要地阐述实验原理）.

第二部分：实验记录，此项内容在实验操作时完成.

内容包括：

①实验仪器：记录主要实验仪器的编号及规格；

②实验内容和步骤；

③注意事项；

④数据记录.

第三部分：数据处理与总结，此项内容在实验后进行.

内容包括：

①处理数据；

②得出结论；

③思考与体会：内容不限，既可是实验的研究、体会、收获、建议，也可是解答思考题.

实验报告一律用专用的物理实验报告本书写，要求字迹清晰，书写端正，数据记录整洁，图表合格，文理通顺，内容简明扼要.

## 三、物理实验成绩评定参考标准

1. 上课准时（6 分）

上课准时，以上课铃声为准. 上课准时记 6 分，迟到者扣 6 分. 迟到 30 分钟以上者，本次实验记不及格.

2. 预习报告（14 分）

预习报告包括实验名称（2 分），实验目的（2 分），实验原理（10 分）.

3. 实验操作（50 分）

①按实验步骤和实验程序，自觉认真完成实验且实验数据达到要求者，记满分 50 分.

②抄袭数据者扣 50 分.

③根据实验步骤的规范程度和实验数据的正确程度酌情记分.

4. 文明卫生纪律(5 分)

①遵守实验规则记 5 分,违者扣 5 分,情节严重者,本次实验记不及格.

②实验完毕后,要打扫室内卫生,不打扫者扣 5 分.

③上实验课闲谈、大声喧哗或不听指导者,扣 5 分.

④上实验课违反纪律、屡教不改或早退者,本次实验成绩不及格.

5. 仪器整理(5 分)

①实验完毕,按要求主动整理好仪器的,记 5 分.

②实验完毕,没有整理仪器的,扣 5 分.

③实验完毕,整理仪器不符合要求者,可视其情况酌情扣分.

6. 实验报告(20 分)

实验报告计分细则:

实验步骤记 5 分,注意事项记 2 分,数据处理记 10 分,体会记 3 分. 视实验报告的情况酌情记分.

## 四、实验守则

为了保证实验正常进行,以及培养严肃认真的工作作风和良好的实验工作习惯,特制定下列规则.

①学生应在约定时间内进行实验,不得无故缺席或迟到. 实验时间若要改动,须经实验室同意.

②学生在每次实验前对约定要做的实验应进行预习,并在预习的基础上,作预习报告.

③进入实验室后,应将预习报告放在桌上由教师检查,经过教师检查认为合格后,才可以进行实验.

④实验时,应携带必要的物品,如文具、计算器和草稿纸等. 对于需要作图的实验应事先准备毫米方格纸和铅笔.

⑤进入实验室后,根据仪器清单核对自己使用的仪器是否有缺少或损坏. 若发现有问题,应向教师或实验室管理员提出. 未列入清单的仪器,另向管理员借用,实验完毕时归还.

⑥实验前应细心观察仪器构造,操作时应谨慎细心,严格遵守各种仪器仪表的操作规则及注意事项. 尤其是电学实验,线路接好后,先经教师或实验室工作人员检查,经许可后才可接通电源,以免发生意外.

⑦实验完毕,应将实验数据交给教师检查,实验合格者,教师予以签字通过. 原则上不允许缺课者补做实验,特殊情况由实验指导教师登记,通知学生在规定时间内补做.

⑧实验时,应注意保持实验室整洁、安静. 实验完毕,应将仪器、桌椅恢复原状,放置整齐.

⑨如有损坏仪器,应及时报告教师或实验室工作人员,并填写损坏单,说明损坏原因,赔偿办法根据学校规定.

# 第1章　测量误差与数据处理

## §1.1　测　量

物理实验不仅要定性观察各种物理现象，更重要的是找出有关物理量之间的定量关系. 为此就需要进行测量. 测量的意义就是将待测的物理量与一个选作计量标准单位的同类量进行比较，得出它们之间的倍数关系. 选来作为标准的同类量称之为单位. 选作计量单位的标准必须是国际公认的、唯一的、稳定不变的. 倍数称为测量数值. 由此可见，一个物理量的测量值等于测量数值与单位的乘积. 一个物理量的大小是客观存在的，选择不同的单位，相应的测量数值就有所不同. 单位愈大，测量数值愈小；反之，愈大.

测量可分为两类. 一类是直接测量，把被测量直接与标准量进行比较，直接读数，直接得到数据，这样的测量为直接测量，相应的物理量称为直接测量量. 例如，用米尺测长度，用电流表测电流等. 另一类是间接测量，是根据直接测量所得到的数据，通过函数关系得到被测量的测量数据，这样的测量为间接测量，相应的物理量为间接测量量. 例如直接测量圆管的高度 $h$，外径 $D$ 和内径 $d$，然后应用公式 $V=\frac{1}{4}\pi h(D^2-d^2)$，求得它的体积. 在实际测量中，绝大部分是间接测量.

不同的物理量有各自不同的单位，但各物理量不是相互独立，而是由许多物理定义和物理规律联系起来的，所以只需要规定少数几个物理量的单位，其他物理量的单位就可根据定义和物理规律推导出来. 独立定义的单位叫做基本单位，相对应的物理量叫做基本量；由基本单位推导出的单位叫做导出单位，相对应的物理量叫做导出量.

在物理学发展过程中，曾建立过各种不同的单位制，各单位制选取的基本量和规定的单位各不相同，使用中常常造成混乱，带来诸多不便. 1960 年，国际计量大会正式通过了一种通用于一切计量领域的单位制——国际单位制，用符号“SI”表示. SI 规定的基本单位有 7 个. 为了保证单位量值的统一，国际计量局设有复现单位标准的专门实验室，每个国家又都有自己的计量组织. 任何工厂生产的量具、仪表都要经过计量单位检验鉴定才能出售使用，以保证量具能在规定的准确度标准下体现出量度单位. 我国规定以 SI 单位为国家法定计量单位.

## §1.2　误　差

### 一、误差的基本概念

物理量在客观上有着确定的数值，称为真值. 然而在实际测量时，由于实验条件、实验方法

和仪器精度等的限制或者不够完善，以及实验人员技术水平的原因，使得测量值与客观上存在的真值之间有一定的差异．测量值 $x$ 与真值 $x_T$ 的差值称为测量误差 $\delta$，简称误差．即

$$\delta = x - x_T$$

任何测量都不可避免地存在误差，所以，一个完整的测量结果应该包括测量值和误差两个部分．既然测量不能得到真值，那么怎样才能最大限度地减小测量误差并估算出误差的范围呢？要回答这些问题，首先要了解误差产生的原因及其性质．测量误差按其产生的原因与性质可分为系统误差、随机误差和过失误差三大类．

1．系统误差

系统误差的特点是有规律性的，测量结果都大于真值，或者都小于真值．或在测量条件改变时，误差也按一定规律变化．

系统误差来源有下列几个方面：

①由于测量仪器的不完善、仪器不够精密或安装调整不妥．如刻度不准、零点不对、砝码未经校准、天平臂不等长、应该水平旋转的仪器没有放水平等．

②由于实验理论和实验方法的不完善，所引用的理论与实验条件不符．如在空气中称质量而没有考虑空气浮力的影响；测长度时没有考虑温度使尺长改变；量热时没有考虑热量的散失；测电压时未考虑电压表内阻对电路的影响；标准电池的电动势未作温度修正；等等．

③由于实验者生理或心理特点、缺乏经验等而引入的误差．例如有些人习惯于侧坐斜视读数，眼睛辨色能力较差等，使测量值偏大或偏小．

系统误差的消除或减小是实验技能问题，应尽可能采取各种措施将它降低到最小．例如将仪器进行校正，改变实验方法或者在计算公式中列入一些修正项以消除某些因素对实验结果的影响，纠正不良实验习惯等．

能否识别和降低系统误差，与实验者的经验和实际知识有密切的关系．学生在学习过程中要逐步积累这方面的感性知识，结合实验的具体情况对系统误差进行分析和讨论．

2．随机误差（又称偶然误差）

在相同条件下，对同一物理量进行重复多次测量，即使系统误差减小到最小程度之后，测量值仍然会出现一些难以预料和无法控制的起伏，而且测量值误差的绝对值和符号在随机地变化着．这种误差称之为随机误差．

随机误差的特征是其随机性．它的可能来源是，人们的感官（如听觉、视觉、触觉）的分辨能力不尽相同，表现为每个人的估读能力不一致；外界环境的干扰（如温度不均匀、振动、气流、噪声等）既不能消除，又无法估量；所有影响测量的次要因素不尽全知；等等．这种误差是无法控制的，它服从统计规律．对于某一次测量来说，测量误差的大小和正负是无法预计的．

3．过失误差（错误）

在测量中还可能出现错误，如读数错误、记录错误、操作错误、估算错误等．错误已不属于正常的测量工作范畴，应当尽量避免．克服错误的方法，除端正工作态度，严格工作方法外，可用和另一次测量结果相比较的办法发现纠正，或者运用异常数据剔除准则来判别因过失而引入的异常数据，并加以剔除．

在下面的讨论中，我们约定系统误差和过失误差已经消除或修正，只剩下随机误差．

## 二、算术平均值及其误差

1. 单次直接测量的误差估算

在物理实验中，常常由于条件不许可，或测量准确度要求不高等原因，对一个物理量的直接测量只进行了一次. 这时，可根据实际情况，对测量值的误差进行合理的具体的估算，不能一概而论. 在一般情况下，对于偶然误差很小的测量值，可按仪器出厂检定书或仪器上直接注明的仪器误差作为单位测量的误差. 如果没有注明，也可取仪器最小刻度的一半作为单位测量的误差. 如果测量值的偶然误差较大，则应进行多次测量，然后求其平均值及误差.

2. 多次测量的平均值及误差

为了减小偶然误差，在可能情况下，总是采用多次测量，将各次测量的算术平均值作为测量的结果. 如果在相同条件下对某物理量 $x$ 进行了 $n$ 次重复测量，其测量值分别为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，用 $\bar{x}$ 表示平均值，则

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

根据误差的统计理论，在一组 $n$ 次测量的数据中，算术平均值 $\bar{x}$ 最接近于真值，称为测量的最佳值或近真值. 当测量次数无限增加时，算术平均值就将无限接近于真值①.

在这种情形下，测量值的误差可用算术平均偏差或均方根偏差(标准偏差)表示出来.

算术平均偏差与均方根偏差都可作为测量值误差的量度，它们都表示在一组多次测量的数据中各个数据之间分散的程度. 如果各个数据之间差别较大，那么，其算术平均偏差 $\Delta x$ 和均方根偏差 $\sigma$ 也都较大，这说明测量不精密，随机误差较大.

在上述两种偏差的计算方法中，均方根偏差 $\sigma$ 与随机误差理论中的高斯误差分布函数的关系更为直接和简明，因此在正式的误差分析和计算中都采用均方根偏差作为随机误差大小的量度. 这是目前通用的，所以又得到标准偏差的名称. 但对于初学者来说，主要是树立误差的概念，和对实验进行粗略的简明的分析，因此可采用算术平均偏差来进行误差的分析和运算，这样要简单得多. 这里只介绍算术平均偏差，均方根偏差在后面介绍.

(1)算术平均偏差

设各测量值 $x_i$ 与平均值 $\bar{x}$ 的偏差为 $d_i$，$i=1,2,3,\cdots,n$，即

$$d_1 = x_1 - \bar{x},\ d_2 = x_2 - \bar{x},\ \cdots,\ d_n = x_n - \bar{x}$$

则算术平均偏差的定义是

$$\Delta x = \frac{1}{n}(|d_1| + |d_2| + |d_3| + \cdots + |d_n|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |d_i|$$

严格来讲，误差是测量值与真值之差，而测量值与平均值之差称为偏差，这两者是有差别的. 当测量次数很多时，多次测量的平均值 $\bar{x}$ 最接近于真值，因此各次测量值与 $\bar{x}$ 的偏差也就很接近于它们与真值的误差. 这样，我们就不去区分偏差与误差的细微区别，分别把标准偏差称为标准误差，把算术平均偏差称为算术平均误差. 最后，我们把多次测量值的结果表示为

① 可参阅冯师颜编《误差理论与实验数据处理》3.4，科学出版社，1964.

$$x=\bar{x}\pm\Delta x \quad 或 \quad x=\bar{x}\pm\sigma$$

式中 $x$ 为测量值；$\bar{x}$ 是多次测量数据的算术平均值，代表最佳测量值；$\Delta x$ 为算术平均误差；$\sigma$ 为标准误差，代表多次测量数据的分散程度；±号表示每次测量值可能比 $\bar{x}$ 大一些，也可能比 $\bar{x}$ 小一些.

(2)绝对误差与相对误差

上式中的 $\Delta x$ 或 $\sigma$ 是以误差的绝对数值来表示测量值的误差，称为绝对误差. 但为了评价一个测量结果的优劣，还需要看测量量本身的大小. 为此，引人相对误差的概念.

相对误差的定义为

$$E_r=\frac{\Delta x}{x}$$

相对误差也可用百分数来表示，即

$$E_r=\frac{\Delta x}{x}\times 100\%$$

故又称为百分误差. 为了说明相对误差的意义，下面举一个例子. 假如测得两个物体的长度为 $l_1=(23.50\pm0.03)$ cm，$l_2=(2.35\pm0.03)$ cm，则其相对误差分别为

$$E_{r1}=\frac{0.03}{23.50}\times 100\%=0.13\%\approx0.2\%$$

$$E_{r2}=\frac{0.03}{2.35}\times 100\%=1.3\%\approx2\%$$

从绝对误差来看，两者相等；但从相对误差来看，后者比前者大10倍. 我们自然认为第一个测量要准确些.

## 三、随机误差的高斯分布与标准误差

随机性是随机误差的特点. 也就是说，在相同条件下，对同一物理量进行多次重复测量，每次测量值的误差时大时小，对某一次测量值来说，其误差的大小与正负都无法预先知道，纯属偶然. 但是，如果测量次数相当多的话，随机误差的出现仍服从一定的统计规律. 根据实验情况的不同，随机误差出现的分布规律有高斯分布(又称正态分布)、$t$ 分布、均匀分布以及反正弦分布等. 按照教学要求，这里仅简要地介绍随机误差的高斯分布.

### 1. 高斯分布的特征与数学表述

遵从高斯分布规律的随机误差具有下列四大特征：

①单峰性——绝对值小的误差出现的可能性(概率)大，大误差出现的可能性小.

②对称性——大小相等的正误差和负误差出现的机会均等，对称分布于真值的两侧.

③有界性——非常大的正误差或负误差出现的可能性几乎为零.

④抵偿性——当测量次数非常多时，正误差和负误差相互抵消，于是，误差的代数和趋向于零.

高斯分布的特征可以用高斯分布曲线形象地表述出来，见图1-2-1(a). 横坐标为误差 $\delta$，纵坐标为误差的概率密度分布函数 $f(\delta)$. 根据误差理论可以证明函数的数学表述为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2-1}$$

测量值的随机误差出现在 $\delta$ 到 $\delta+d\delta$ 区间内的可能性(概率)为 $f(\delta)d\delta$，即图1-2-1(a)中

阴影线所包含的面积元. 上式中的 $\sigma$ 是一个与实验条件有关的常数,称之为标准误差. 其值为

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \tag{1-2-2}$$

式中,$n$ 为测量次数,各次测量值的随机误差为 $\delta_i$,$i=1,2,3,\cdots,n$. 可见标准误差是将各个误差的平方取平均值,再开方得到,所以,标准误差又称为均方根误差.

2. 标准误差的物理意义

由式(1-2-1)可知,随机误差正态分布曲线的形状取决于 $\sigma$ 值的大小,如图 1-2-1(b)所示. $\sigma$ 值愈小,分布曲线愈陡峭,峰值 $f(\delta)$ 愈高,说明绝对值小的误差占多数,且测量值的重复性好,分散性小;反之,$\delta$ 值愈大,曲线愈平坦,峰值愈低,说明测量值的重复性差,分散性大. 标准误差反映了测量值的离散程度.

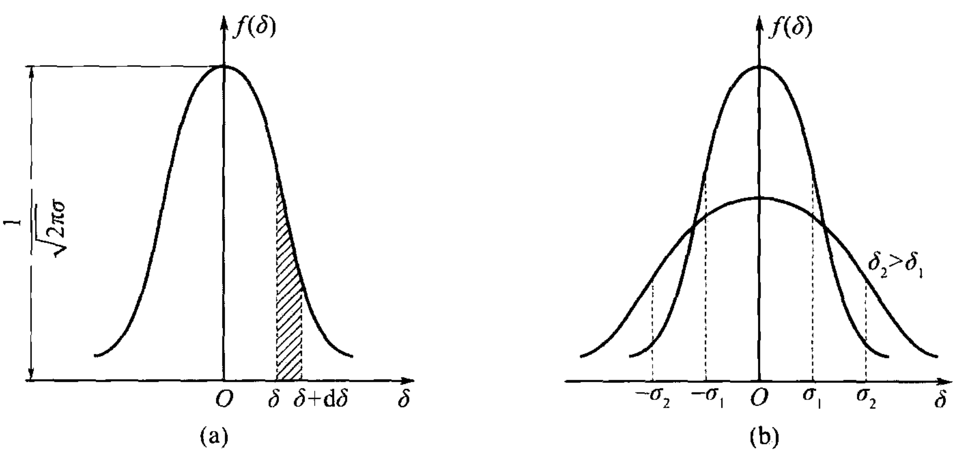


图 1-2-1　随机误差的正态分布曲线

由于 $f(\delta)\mathrm{d}\delta$ 是测量值随机误差出现在小区间$(\delta,\delta+\mathrm{d}\delta)$的可能性(概率),那么,测量值误差出现在区间$(-\delta,\delta)$内的可能性(概率)就是

$$\begin{aligned}P(-\sigma<\delta<\sigma)&=\int_{\sigma}^{\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta\\&=\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta\\&=68.3\%\end{aligned}$$

这说明对任一次测量,其测量值误差出现在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 区间内的可能性(概率)为 68.3%. 也就是说,假如我们对某一物理量在相同条件下进行了 1 000 次测量,那么,测量值的误差可能有 683 次落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 区间内. 这里要特别注意标准误差的统计意义,它并不表示任一次测量值的误差就是 $\pm\sigma$,也不表示误差不会超出 $\pm\sigma$ 的界限. 标准误差只是一个具有统计性质的特征量,用以表征测量值离散程度的一个特征量.

3. 极限误差

与上述相仿,同样可以计算,在相同条件下对某一物理量进行多次测量,其任意一次测量值的误差落在 $-3\sigma$ 到 $3\sigma$ 区域之间的可能性(概率),其值为

$$P=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta$$

$$=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}d\delta$$
$$=99.7\%$$

也就是说，在 1 000 次测量中，可能有 3 次测量值的误差绝对值会超过 $\pm 3\sigma$. 在通常的有限次测量情况下，测量次数很少超过几十次，因此，测量值误差超出 $\pm 3\sigma$ 范围的情况几乎不会出现，所以把 $3\sigma$ 称为极限误差.

在测量次数相当多的情况下，如果出现测量值误差的绝对值大于 $\pm 3\sigma$ 的数据可以认为这是由于过失引起的异常数据，应加以剔除. 但是，对于测量次数较少的情况，这种方法就不可靠，而需要采用另外的判别准则.

## 四、标准误差及其估算

### 1. 任意一次测量值的标准偏差

某一次测量值 $x_i$ 的误差 $\delta_i$ 是测量值 $x_i$ 与其值 $x_T$ 的差值. 由于真值不知道，误差 $\delta_i$ 计算不出. 因而，按照式(1-2-2)，标准误差 $\delta$ 也无从估算. 根据算术平均值是近真值的结论，在实际估算时采用算术平均值 $\bar{x}$ 代替真值，用各次测量值与算术平均值的差值

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{1-2-3}$$

来估算各次的误差. 差值 $v_i$ 称为残差.

误差理论可以证明，当测量次数 $n$ 有限，用残差来估算标准误差时，其计算式为

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-2-4}$$

$\sigma_x$ 称之为任意一次测量值的标准偏差，它是测量次数有限多时，标准误差 $\sigma$ 的一个估计值. 其代表的物理意义为：如果多次测量的随机误差遵从高斯分布，那么，任意一次测量，测量值误差落在 $-\sigma_x$ 到 $+\sigma_x$ 区域之间的可能性(概率)为 68.3%. 或者说，它表示这组数据的误差有 68.3%的概率出现在 $-\sigma_x$ 到 $+\sigma_x$ 的区间内.

### 2. 平均值的标准偏差

误差理论证明，平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-2-5}$$

上式说明，平均值的标准偏差是 $n$ 次测量中任意一次测量值标准偏差的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍. $\sigma_{\bar{x}}$ 小于 $\sigma_x$，这个结果的合理性是显而易见的. 因为算术平均值是测量结果的最佳值，它比任意一次测量值 $x_i$ 更接近真值，误差要小. $\sigma_{\bar{x}}$ 的物理意义是，在多次测量的随机误差遵从高斯分布的条件下，真值处于 $\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$ 区间内的概率为 68.3%.

值得注意，用式(1-2-4)和式(1-2-5)来估算随机误差，理论上都要求测量次数相当多. 但在我们目前的实验中，往往受到教学时间的限制，重复测量的次数不可能很多，所以，用这两个式子估算出来的随机误差带有相当程度的近似性. 另外，在测量次数较少时($n<10$)，$\sigma_{\bar{x}}$ 随着测量次数 $n$ 的增加而明显地减小. 以后，随着测量次数 $n$ 的继续增加，$\sigma_{\bar{x}}$ 的减小愈来愈不明显而逐

渐趋近于恒定值.由此可见,过多地增加测量次数,其价值并不太大.根据我们的实际情况,如果需要多次重复测量,一般测量次数取 5～10 次为宜.

有时会遇到测量对象本身不均匀的情况.例如,测量一根钢丝的直径.由于它各处的直径略有微小差异,以致直径的真值各处不完全一致,所测得的各种测量值取其平均值只是反映了钢丝直径的平均大小.多次测量不可能减小钢丝直径的不均匀性,所以,计算平均值的标准误差实属没有必要.而计算得到的任意一次直径测量值的标准偏差则反映出钢丝直径的不均匀程度.

## 五、间接测量值误差的估算——误差传递公式

直接测量值不可避免地有误差存在,显然由直接测量值根据一定的函数关系,经过运算而得到的间接测量值也必然有误差存在.怎样来估算间接测量值的误差,实质上是要解决一个误差传递的问题,即求得估算间接测量值误差的公式.这种公式称之为误差传递公式.下面分别介绍两种间接测量值误差的估算方法.

### 1.误差的一般传递公式

设待测量 $N$ 是 $n$ 个独立的直接测量量 $A,B,C,\cdots,H$ 的函数,即

$$N=f(A,B,C,\cdots,H) \tag{1-2-6}$$

若各直接测量值的绝对误差分别为 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$,则间接测量值 $N$ 的绝对误差为 $\Delta N$.下面介绍具体算法.

将式(1-2-6)求全微分,得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial f}{\partial B}\mathrm{d}B+\frac{\partial f}{\partial C}\mathrm{d}C+\cdots+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H \tag{1-2-7}$$

由于 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 分别相对于 $A,B,C,\cdots,H$ 是一个很小的量,将式(1-2-7)中的 $\mathrm{d}A$,$\mathrm{d}B,\mathrm{d}C,\cdots,\mathrm{d}H$ 用 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 代替,则

$$\Delta N=\frac{\partial f}{\partial A}\Delta A+\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B+\cdots+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H \tag{1-2-8}$$

由于上式右端各项分误差的符号正负不定,为谨慎起见,作最不利情况考虑,认为各项分误差将累加,因此,将上式右端各项分别取绝对值相加,即

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\cdot\Delta A+\left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\cdot\Delta B+\left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|\cdot\Delta C+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial H}\right|\cdot\Delta H \tag{1-2-9}$$

很明显,这样做会导致测量结果误差偏大.相对误差为

$$\begin{aligned}E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{f(A,B,C,\cdots,H)}\cdot\Bigg(&\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\cdot\Delta A+\left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\cdot\Delta B+\\&\left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|\cdot\Delta C+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial H}\right|\cdot\Delta H\Bigg)\end{aligned} \tag{1-2-10}$$

式(1-2-9)和式(1-2-10)称为误差的一般传递公式,或称为误差的算术合成.根据以上两式计算出来的常用误差公式列在表 1-2-1 中,以供参考.

**表 1-2-1　几种常用的误差传递公式**

| 函数关系 | 误差的一般传递公式 | 标准误差传递公式 |
|---|---|---|
| $N=A+B$ 或 $N=A-B$ | $\Delta N=\Delta A+\Delta B$ | $\sigma_N=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2}$ |

续表

| 函数关系 | 误差的一般传递公式 | 标准误差传递公式 |
|---|---|---|
| $N=A\cdot B$ 或 $N=\frac{A}{B}$ | $\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2+\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$ |
| $N=k\cdot A$ | $\Delta N=k\cdot\Delta A$ | $\sigma_N=k\cdot\sigma_A$ |
| $N=\frac{A^p\cdot B^q}{C^r}$ | $\frac{\Delta N}{N}=p\frac{\Delta A}{A}+q\frac{\Delta B}{B}+r\frac{\Delta C}{C}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{p\sigma_A}{A}\right)^2+\left(\frac{q\sigma_B}{B}\right)^2+\left(\frac{r\sigma_C}{C}\right)^2}$ |
| $N=\sqrt[p]{A}$ | $\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\Delta A}{A}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\sigma_A}{A}$ |
| $N=\sin A$ | $\Delta N=\lvert\cos A\rvert\cdot\Delta A$ | $\sigma_N=\lvert\cos A\rvert\cdot\sigma_A$ |
| $N=\ln A$ | $\Delta N=\frac{1}{A}\cdot\Delta A$ | $\sigma_N=\frac{1}{A}\cdot\sigma_A$ |

2. 标准误差的传递公式

若各个独立的直接测量值的绝对误差分别为标准偏差 $\sigma_A,\sigma_B,\sigma_C,\cdots,\sigma_H$ 等，则间接测量值 $N$ 的误差估算需要用误差的方和根合成，即绝对误差为

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_C\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_H\right)^2}\tag{1-2-11}$$

相对误差为

$$E_r=\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{f(A,B,C,\cdots,H)}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_C\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_H\right)^2}\tag{1-2-12}$$

以上两式称为标准误差的传递公式，或称为误差的方和根合成. 几种常用的标准误差传递公式列于表 1-2-1 中，供计算误差使用.

从表 1-2-1 中可见：

①对于和或差函数关系，函数 $N$ 的绝对误差都是直接测量值标准偏差的“方和根”. 所以，建议先计算出 $N$ 的绝对误差，即 $\sigma_N$，然后按 $E_r=\frac{\sigma_N}{N}$ 再计算 $N$ 的相对误差 $E_r$.

②对于乘或除函数关系，函数 $N$ 的相对误差 $E_r$ 都是各直接测量值相对误差的“方和根”. 建议先计算相对误差 $E_r$，再按 $\sigma_N=N\cdot E_r$ 式计算函数 $N$ 的绝对误差，即 $\sigma_N$.

误差传递公式除了可以用来估算间接测量值 $N$ 的误差之外，还有一个重要的功能，就是可以用它来分析各直接测量值的误差对最后结果误差影响的大小. 对于那些影响大的直接测量值，预先考虑措施，以减小它们的影响，为合理选用仪器和实验方法提供依据.

## 六、不确定度与测量结果的表述

用标准误差来评估测量结果的可靠程度，这种做法不尽完善，往往有可能会遗漏一些影响测量结果准确性的因素，例如未定的系统误差、仪器误差等. 鉴于上述原因，为了更准确地表述测量结果的可靠程度，提出了采用不确定度的建议和规定.

1. 不确定度的概念

一个完整的测量结果不仅要给出该量值的大小(即数值和单位)，同时还应给出它的不确定度. 用不确定度来表征测量结果的可信赖程度. 于是测量结果应写成下列标准形式：