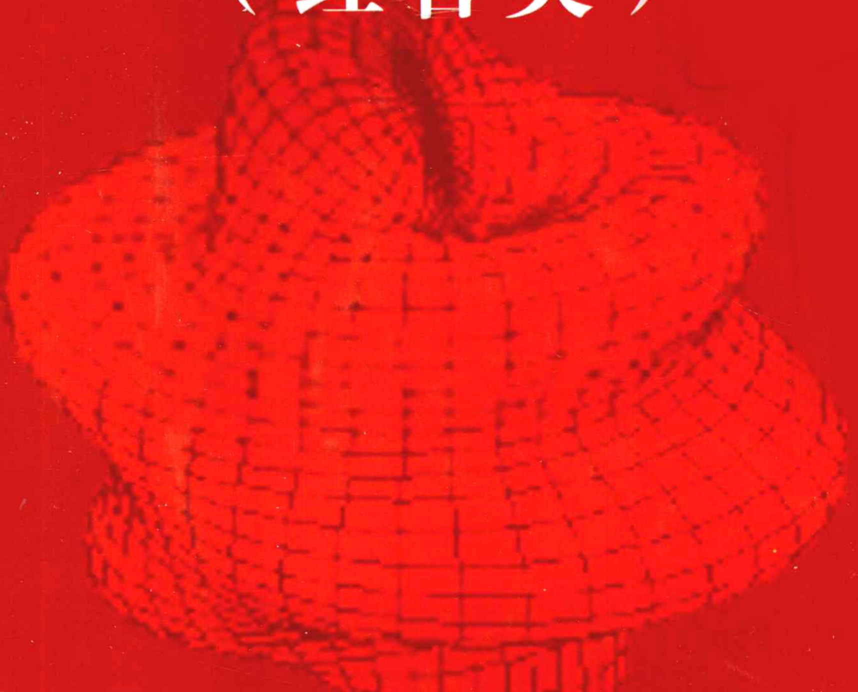
历年考研数学真题分类解析

第二版

李 林 编著

（经管类）



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

历年考研数学真题分类解析 第二版

李林 编著

（经管类）

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题分类解析. 经管类/李林编著. —2 版.
大连:大连理工大学出版社,2010.3
ISBN 978-7-5611-4956-0

Ⅰ. 历… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—
解题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115089 号

大连理工大学出版社出版
大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:14 字数:323 千字
2009 年 7 月第 1 版 2010 年 3 月第 2 版
2010 年 3 月第 2 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:曲宏宇
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-4956-0 定价:25.00 元

前　言

《历年考研数学真题分类解析》(第2版)是为报考硕士研究生数学考试编写的辅导书。真题是由教育部考试中心组织命制的,具有权威性、科学性和规范性。在考研的所有练习题中,真题是最有价值的。全面透彻地研究历年的试题,是广大考生复习备考中必不可少的关键环节,有助于掌握考试动态,赢得高分。

按照现行考研数学大纲,考试分理工类(包括数学一、数学二)和经管类(数学三),《历年考研数学真题分类解析》分理工类和经管类,对1997—2010年真题进行分类解析,按照大纲的章节顺序编写:

(1)每题先指出"考点",然后是"解析",分析该题的思路与方法,最后进行"点评",总结该题的关键所在以及一般性的结论。

(2)每题标明了年份与题别,如2010年数一·二(8)表示2010年数学一,第二大题的第8小题。

(3)考研大纲在2008年进行了修订,将原来的数学三、数学四合并为数学三。有些真题也会出现不严谨的情况,在"点评"中做出了说明,以帮助考生全面了解真题。

本书是考研数学系列丛书之一,已出版的《大学数学辅导》为考研第一阶段复习用书,可使考生全面、系统地掌握大纲所要求的基本概念、基本定理、基本方法。《历年考研数学真题分类解析》和《考研数学冲刺》为考生第二阶段训练用书,用以检查第一阶段的复习效果,提高应试水平。

在丛书的编写过程中,得到了大连理工大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,不当和疏漏之处在所难免,望广大专家和读者批评指正。

编著者

2010年3月

目　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

高等数学

第1章 函数、极限与连续性

一、选择题

1.（2010 数三·一(1)） 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则$a$等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

考点　函数极限。

解析　$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[1-e^x(1-ax)]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-e^x+axe^x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}+\frac{axe^x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{axe^x}{x}$$
$$=-1+a=1$$

所以$a=2$。故C正确。

点评　已知极限确定参数是常考题型。

2.（2010 数三·一(4)） 设$f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当x充分大时有（　　）。

A. $g(x)<h(x)<f(x)$　　B. $h(x)<g(x)<f(x)$

C. $f(x)<g(x)<h(x)$　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

考点　比较函数大小。

解析　因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}\frac{1}{10}=+\infty$$

所以当x充分大时，

$$h(x)>g(x)$$

又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}10\frac{\ln^9x\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^9x}{x}$$

$$=10\times 9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8x\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\times 9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$$

$$= 10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

所以当 x 充分大时，　$f(x) < g(x)$

所以当 x 充分大时，　$f(x) < g(x) < h(x)$

故 C 正确。

点评　此题也可利用函数单调性比较函数大小。

3.(2009 数三 · 一(1))　函数 $f(x) = \dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

考点　函数间断点。

解析　由 $f(x) = \dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$,当 x 取整数时,$f(x)$ 无定义,故 $f(x)$ 有无穷多个间断点。可去间断点为极限存在的点,所以应有 $x-x^3 = 0$,得 $x=0, x=-1, x=1$。又由

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x} = \frac{2}{\pi}$$

所以,可去间断点为 3 个,即 C 正确。

点评　讨论函数的间断点及其个数是常考题。

4.(2009 数三 · 一(2))　当 $x\to0$ 时,$f(x) = x-\sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则(　　)。

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1, b=\dfrac{1}{6}$

C. $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

考点　无穷小的比较。

解析　依题意

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)} \xlongequal{\text{洛}} \lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx} = \frac{-a^3}{6b} = 1$$

故　$a^3 = -6b$

又由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在,所以 $1-a\cos ax\to0(x\to0)$,故 $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$。

故 A 正确。

点评　已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小,确定参数 a 与 b 的值是常考题型。但此题需由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 的存在性得到 $a=1$。

5.(2008 数四 · 一(1))　设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$ 等于(　　)。

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

考点　数列的极限。

解析　$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[a^{-n}\left(1+\frac{b^{-n}}{a^{-n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a^{-1}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}$$

故 B 正确。

点评　此题属于基本题。

6.（2008 数三 · 一(1)）　设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的（　　）。

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

考点　函数间断点的判别，积分上限函数求导。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 知，$x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点，故 B 正确。

点评　本题考查函数间断点的判别，属于基本题。

7.（2007 数三 · 一(6)）　曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线的条数为（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

考点　渐近线。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty$，知 $x=0$ 为铅直渐近线。

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{y\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0$，知 $y=0$ 为水平渐近线。

又由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)=0$$

故 $y=x$ 为斜渐近线，从而 D 正确。

点评　属于求渐近线方程的基本题。

8.（2007 数三 · 一(1)）　当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$

C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

考点　无穷小的比较。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=1$,知 B 正确。

点评　无穷小量比较的基本题。

9.(2004 数三·二(8))　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,则(　　)。

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点　　D. $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

考点　间断点与连续性。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=a$,于是 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $a=g(0)=0$,故 D 正确。

点评　此题考查了函数连续的定义。

10.(2004 数三·二(7))　函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　)。

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

考点　函数的有界性。

解析　讨论 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上的有界性。常用到结论:

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

本题问 $f(x)$ 在哪个区间内有界,先求极限。由

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(-1-2)}{(-1-1)(-1-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(0-2)}{(0-1)(0-2)^2}$$

及 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内连续,故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界。从而 A 正确。

点评　由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在。则在 $(a,a+\delta_1)(\delta_1>0)$ 内 $f(x)$ 有界,在 $(b-\delta_2,b)(\delta_2>0)$ 内 $f(x)$ 有界。又 $f(x)$ 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上连续,故 $f(x)$ 有界。于是 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

11.(2003 数四·二(7))　曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$(　　)。

A. 仅有水平渐近线　　B. 仅有垂直渐近线

C. 既有垂直又有水平渐近线　　D. 既有垂直又有斜渐近线

考点　渐近线。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\infty$,知 $x=0$ 是垂直渐

近线。

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1$，知没有水平渐近线。

由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-x)&=\lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0\end{aligned}$$

知 $y=x$ 为斜渐近线。故 D 正确。

点评　求渐近线方程是常考内容。

12.（2000 数三·二(1)）　设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　　）。

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

考点　极限存在的准则，极限运算。

解析　由已知 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在，故只有 D 正确。

点评　夹逼准则：若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在。

13.（1998 数三·二(2)）　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（　　）。

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点　　D. 存在间断点 $x=-1$

考点　讨论函数间断点。

解析　先求出 $f(x)$。

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0$。

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$，当 $x=1$ 时，$f(x)=1$，当 $x=-1$ 时，$f(x)=0$。故

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\0 & x=-1\\1+x & |x|<1\\1 & x=1\\0 & x>1\end{cases}$$

可见，$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，B 正确。

14.(1997 数三·二(1)) 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t, g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)。

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶但不等价的无穷小

考点　无穷小的比较。

解析

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cdot x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2\cdot x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{4}x}{1+x}=0$$

点评　这里利用了:$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2(x\to 0)$

15.(1997 数四·二(1)) 设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小。则当 $x\to 0$ 时,$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的(　　)。

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 同阶但不等价的无穷小　　D. 等价无穷小

考点　无穷小阶的比较。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x}{x\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$ 知,B 正确。

点评　无穷小阶的比较是常考题型。

二、填空题

1.(2009 数三·二(9)) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________。

考点　函数极限,等价无穷小替换。

解析

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}(1-\cos x)}{\dfrac{1}{3}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$$

点评　$1-\mathrm{e}^{\cos x-1}\sim 1-\cos x,\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2(x\to 0)$。

2.(2008 数三·二(9)) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & |x|\leqslant c\\ \dfrac{2}{|x|} & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$ ________。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

考点　函数连续性的定义。

解析　由已知，$c \geqslant 0$。故

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x} & x<-c\\ x^2+1 & -c\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{2}{x} & x>c\end{cases}$$

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1,\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\frac{2}{c}$$

由已知，$f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，故 $c^2+1=\dfrac{2}{c}$，即 $c=1$。

点评　由已知，分段函数 $f(x)$ 中含 $|x|$。先写出 $f(x)$ 表达式，再利用连续性定义求出 c 值。

3.（2007 数三 · 二(11)）　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________。

考点　函数极限计算。

解析　由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln2+3x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x(\ln2)^2+6x}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x(\ln2)^3+6}=0$$

及 $\sin x+\cos x$ 是有界变量，知原极限为 0。

点评　当 $x\to+\infty$ 时，$\sin x+\cos x$ 极限不存在，但是有界变量。

4.（2006 数三 · 一(1)）　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________。

考点　重要极限。

解析　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}\cdot(-1)^n}=e^0=1$。

点评　求数列极限的基本题。

5.（2005 数三 · 一(1)）　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________。

考点　函数极限。

解析　极限为 $\infty\cdot0$ 型，为方便，令 $\dfrac{1}{x}=u$，则

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{u\to0}\frac{1}{u}\sin\frac{2u}{1+u^2}=\lim_{u\to0}\frac{1}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}=2$$

点评　这里利用了：$\sin\dfrac{2u}{1+u^2}\sim\dfrac{2u}{1+u^2}(u\to0)$。

6.（2004 数三 · 一(1)）　若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________。

考点　已知极限确定参数。

解析 依题设，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$(无论 b 为何值)，故$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$。(否则已知极限为 0，不可能为 5)。因此 $a=1$，又由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-b)}{x}=1-b=5$$

得 $b=-4$。

点评 此题用观察法，先求出 $a=1$ 是关键。

7. (2003 数四 · 一(1)) 极限$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________。

考点 函数极限。

解析

$$[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1+x)=2$$

故原式 $=e^2$。

点评 利用了：$\ln[1+\ln(1+x)]\sim\ln(1+x)$，$x\to 0$。

8. (2002 数三 · 一(1)) 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________。

考点 数列极限。

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}$$

点评 此题利用了重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$。

9. (2000 数四 · 一(2)) 若 $a>0$，$b>0$ 均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________。

考点 函数极限。

解析

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=e^{\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$$

$$=\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)=\ln(ab)^{\frac{3}{2}}$$

故

$$原式=(ab)^{\frac{3}{2}}$$

点评 本题也可利用等价无穷小替换：

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}\overset{洛}{=\!=}\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}(a^x\ln a+b^x\ln b)=\ln(ab)^{\frac{3}{2}}$$

10. (1999 数四 · 一(1)) 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$

= ________。

考点　数列极限。

解析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\ln a\cdot\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln a$$

点评　(1) 一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k(b-a)}{n}\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

(2) 本题也可直接计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln f(k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln a^k=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\ln a$$

三、解答题

1.(2010 数三·三(15))　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

考点　函数极限。

解析

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}(x^{\frac{1}{x}})\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{1}{x}\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$$

点评　此题的关键是处理幂指函数的极限。

2.(2008 数三·三(15))　计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$。

考点　洛比达法则，等价无穷小替换。

解析

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}+1-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

点评　此题有多种解法，属于求函数极限的基本题。

3.(2006 数三·三(15))　设 $f(x,y)=\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0,y>0$，求：

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$。

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$。

考点　函数极限。

解析　(1)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right]$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\pi-x+2\pi x^2}{2(1+x^2)}=\pi$$

点评　$f(x,y)$ 虽然为二元函数,但所求极限实际为一元函数极限。

4.(2005 数三·三(15))　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$。

考点　函数极限。

解析　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+x)-1+\mathrm{e}^{-x}}{x\cdot(1-\mathrm{e}^{-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-x}+2}{2}=\frac{3}{2}$$

点评　这里利用了:$1-\mathrm{e}^{-x}\sim x(x\to0)$。

5.(2004 数三·三(15))　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$。

考点　函数极限的计算。

解析　极限为 $\infty-\infty$ 型,先通分

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\cos^2x\sin^2x}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\dfrac{1}{4}\sin^22x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x\cdot\cos2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x-\sin4x}{8x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos4x}{24x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cdot\dfrac{1}{2}(4x)^2}{24x^2}=\frac{4}{3}$$

点评　计算过程要随时化简并运用等价无穷小替换。

6.(2003 数三·三)　设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$。试补充定义

$f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续。

考点　函数间断点与连续性。

解析
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}$$

令 $1-x=t$，则
$$\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t\sin\pi t}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi^2t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi t}{2\pi^2t}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi t}{2\pi^2}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}$。只要补充定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续。

点评　此题考查了极限的计算和可去间断点。

7.（1998 数四 · 三）　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为自然数）。

考点　数列极限。

解析　将变量 n 改为 x，化数列极限为函数的极限。
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}\cdot\tan t\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\tan t}{t}}$$

而
$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{\tan t-t}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\tan t-t}{t}\xlongequal{洛}\lim_{t\to0^+}\frac{\sec^2t-1}{3t^2}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos^2t}{3t^2\cdot\cos^2t}=\frac{1}{3}$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\frac{1}{3}}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$$

点评　为利用洛比达法则，改数列为函数。

8.（1997 数四 · 三）　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$（$a\neq0$）。

考点　函数极限。

解析　先通分。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}$$

$$\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{a+2a^2x\ln(1+ax)-\dfrac{a(1-a^2x^2)}{1+ax}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}$$

$$\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{2a^2\ln(1+ax)+\dfrac{2a^3x}{1+ax}+a^2}{2}=\frac{3}{2}a^2$$

点评　由于$\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)+a^2\ln(1+ax)$及$\lim\limits_{x\to 0}a^2\ln(1+ax)=0$。所以只要计算$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]$即可。

9.(1997 数三·三)　在经济学中,称函数$Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$为固定替代弹性生产函数,而称函数$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$为 Cobb-Douglas 生产函数(简称 C-D 生产函数)。

试证明:当$x\to 0$时,固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数,即有

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$$

考点　弹性,函数极限。

解析　由已知,取对数

$$\ln Q(x)=\ln A-\frac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]$$

$$\lim_{x\to 0}\ln Q(x)=\ln A-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]$$

$$\xlongequal{洛}\ln A-\lim_{x\to 0}\frac{-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$

$$=\ln A+\delta\ln K+(1-\delta)\ln L$$

$$=\ln A+\ln(K^{\delta}L^{1-\delta})=\ln(AK^{\delta}L^{1-\delta})$$

故

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=AK^{\delta}L^{1-\delta}=\overline{Q}$$

点评　本题实际上是求极限。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com