21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

朱世平 主编　　孙映成 史雪荣 副主编

化学工业出版社

21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

朱世平 主编　孙映成 史雪荣 副主编

版社

本书根据教育部颁布的非数学类专业线性代数课程教学基本要求，以及全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的内容和要求编写而成。本书共五章，包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型。为了便于学生学习，在每章末给出了该章的知识小结和习题。本书层次清晰、结构严谨，阐述深入浅出、循序渐进，并结合考研的实际情况，在书后针对每章知识配备了大量模拟测试题，并附有相应的解答。

本书可作为高等院校理工科，特别是师范院校非数学专业的线性代数教材，也可作为其他相关专业的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/朱世平主编. —北京：化学工业出版社，2011.1
21世纪普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-122-10371-0

Ⅰ.线… Ⅱ.朱… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第003882号

责任编辑：袁俊红　杨　宇　　　装帧设计：张　辉
责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
710mm×1000mm　1/16　印张10¾　字数207千字　2011年2月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686)　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00元

前　言

线性代数是数学的一个重要分支，其主要研究对象是矩阵、向量及其运算、线性方程组等内容。线性代数不仅在数学、力学、物理学等经典自然科学及工程技术领域有着重要的应用，而且在经济学、管理学等社会科学领域也有着十分广泛的应用。该课程已成为高等院校理、工、经、管等专业的一门基础课程。

针对目前高等教育改革地不断深入，为了适应高等教育教学内容和课程体系改革总目标，培养具有创新能力的高素质人才，本书的编写侧重于对线性代数的基本内容和方法的掌握，适当削减了一些烦琐的推导证明，力求使学生在相对较少的学时里就能较系统地掌握该课程的基本内容。

本书共五章，包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型。为了更好培养学生学习线性代数的兴趣，在每一章的开始都简要介绍了本章相关内容的一些数学史知识，并为了学生能更好地复习、总结，在每一章末，还对重点知识进行了小结。

本书由朱世平主编，孙映成、史雪荣担任副主编，此外参加编写的还有郭曙光、殷庆祥、王超、陈莉。在本书的编写过程中得到了盐城师范学院数学科学学院的戴风明、王作雷、林兆兵、张勇、刘勇等老师的帮助，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平所限，书中不当之处在所难免，敬请专家、读者不吝赐教！

编者

2010 年 12 月

目　录

第一章　行　列　式

线性代数是数学的一个分支，它以研究向量空间与线性映射为对象，线性代数出现于 17 世纪。历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，最初线性方程组的问题大都来源于生活实践，正是实际应用问题刺激了这一学科的诞生与发展。

行列式出现于研究线性方程组的求解中，它最早是一种速记的表达形式，现在已是数学中一种非常有用的工具。第一个研究行列式理论与线性方程组的求解相分离的人，是法国数学家范德蒙德，时间是 1772 年，他提出了利用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则，就对行列式本身进行研究而言，他是行列式理论的奠基人。

1815 年，法国数学家柯西（A. L. Cauchy，1789—1857）首先提出行列式这个名称，他在一篇论文中给出了有关行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理，其中主要结果之一是行列式的乘法公式。另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双重足标标记法；改进并证明了拉普拉斯的行列式展开定理。1841 年，英国数学家凯莱（A. Cayley，1821—1895）首先创造了行列式记号“||”。

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

我们从二元方程组的解的公式，引出二阶行列式的概念。

在线性代数中，将含有两个未知量和两个方程式的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1，x_2的值，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是二元一次线性方程组的解的公式。但这个公式不好记，为了便于记这个公式，引进了二阶行列式的概念。

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示两项的代数和：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

二阶行列式所表示的两项的代数和，可用下面的对角线法则记忆：从左上角到右下角两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素相乘取负号，即

$$_{-}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{+}$$

由于式(1.3) 的行列式中的元素就是二元线性方程组中未知量的系数，所以又称它为二元线性方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第一列的元素 a_{11}，a_{21} 换成常数项 b_1，b_2，则可得到另一个行列式，用字母 D_1 表示，于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$b_1a_{22}-b_2a_{12}$，这就是式(1.2) 中 x_1 的表达式的分子。同理将 D 中第二列的元素 a_{12}，a_{22} 换成常数项 b_1，b_2，可得到另一个行列式，用字母 D_2 表示，于是有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$a_{11}b_2-a_{21}b_1$，这就是式(1.2) 中 x_2 的表达式的分子。

于是二元线性方程组的解的公式又可写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D\neq 0)$$

二、三阶行列式

含有三个未知量三个方程式的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

还是用加减消元法，即可求得方程组（1.4）的解的公式，当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}a_{33}+b_1a_{31}a_{23}+b_3a_{13}a_{21}-b_2a_{31}a_{13}-b_1a_{21}a_{33}-b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_3=\dfrac{b_3a_{22}a_{11}+b_2a_{12}a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_2a_{11}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \end{cases} \tag{1.5}$$

这就是三元线性方程组的解的公式。这个公式更不好记，为了便于记它，引进三阶行列式的概念。我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

为三阶行列式。三阶行列式所表示的是 6 项的代数和，也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素取负号，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.7}$$

由于式(1.6）的行列式中的元素是三元线性方程组中未知量的系数，所以称它为三元方程组的系数行列式，也用字母 D 来表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中第一列、第二列、第三列的元素分别换成常数项 b_1，b_2，b_3就可以得到另外三个三阶行列式，分别记为 D_1，D_2，D_3，于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

按照三阶行列式的定义，它们都表示 6 项的代数和；并且分别是方程组(1.5）中 x_1，x_2，x_3的表达式的分子，而系数行列式 D 是它们的分母。于是三元线性方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}\ (D\neq 0)$$

例 1 求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2\\x_1+x_2+4x_3=0\\3x_1-7x_2+5x_3=-1\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&1&4\\3&-7&5\end{vmatrix}=10-12+7+3+56+5=69\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\0&1&4\\-1&-7&5\end{vmatrix}=10+4+0-1+56+0=69$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&2&-1\\1&0&4\\3&-1&5\end{vmatrix}=23$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&1&0\\3&-7&-1\end{vmatrix}=-23$$

所以 $$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{3}$$

(其实这就是克莱姆法则给出的线性方程组解的公式。)

例 2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3=-1\\x_1-2x_2+x_3=-4\\3x_1+x_2+3x_3=2\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-5\\1&-2&1\\3&1&3\end{vmatrix}=-12+9-5-30-2-9=-49\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&3&-5\\-4&-2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=49$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&-1&-5\\1&-4&1\\3&2&3\end{vmatrix}=-98$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-49$$

所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

第二节　全排列及其逆序数

一、排列

定义 1（排列） 由 n 个不同的元素 1，2，3，…，n 排成的任一有序数组，称为一个 n 级排列，简称 n 级排列。

例如 1234 是一个 4 级排列；52341 是一个 5 级排列。

n 级排列的总数为 $n!$ 个。

例如由 1，2，3 这三个数码可以排出 3！＝6 个 3 级排列，它们是：123，132，213，231，312，321。

一般地，我们将一个 n 级排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$，其中 i_1 是 1，2，…，n 中的某一个数，i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数……。

二、逆序

定义 2（排列的逆序） 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面，就称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序。

例如在 5 级排列 12354 中，较大的数 5 排在较小的数 4 之前，就称 5 与 4 为一个逆序。

一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数，称为此排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

由于 5 级排列 12354 中，只有一个逆序，所以 $\tau(12354)=1$。

一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中 i_t 的逆序数是指排在 i_t 后比 i_t 小的数的总数。

求一个排列的逆序数的方法是：先求第一个元素 i_1 的逆序数 τ_1，再求第二个元素 i_2 的逆序数 $\tau_2\cdots$，最后求第 n 个元素 i_n 的逆序数 τ_n，将它们加起来即可。即有

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

三、奇偶排列

定义 3（奇排列、偶排列） 如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；

如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$为偶排列。

规定：n 级排列 $12\cdots n$ 为偶排列。

例 计算 $\tau(32145)$ 和 $\tau(34125)$。

解 $\tau(32145)=2+1=3$，$\tau(34125)=2+2=4$。

可见，5 级排列 32145 是奇排列；5 级排列 34125 是偶排列。

第三节 n 阶行列式的定义

分析：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) 每一项均是取自不同行、不同列的三个元素的乘积，除符号外可写为$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$。

(2) 符号为$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$。

如，排列为 123，231，312（偶排列）时，符号为“+”，排列为 321，213，132（奇排列）时，符号为“－”。

(3) 项数为 3！＝6。

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中记号$\sum$表示对所有排列求和。

将其推广，可得 n 阶行列式定义。

一、n 阶行列式的定义

定义（n 阶行列式的定义） 由排成 n 行、n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。它是 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中各元素的行指标按自然数顺序排列后，如果列指标排列为偶排列，则取正号；为奇排列，则取负号。于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

其中记号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 1，2，…，n 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和。n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|_n=\det(a_{ij})$。

n 阶行列式的定义有以下三个要点：

(1) 是 $n!$ 项的代数和；

(2) 每一项的符号当其元素的行指标按自然数顺序排列后，如果列指标排列为偶排列，则取正号；如果列指标排列为奇排列，则取负号；

(3) 每一项是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积（这样的项恰有 $n!$ 项）。

由行列式的定义不难看出：如果一个行列式有一行（或一列）的元素全为零，则此行列式的值必为零。

二、三角行列式的值

例 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义，可知仅当 $p_1=\lambda_n, p_2=\lambda_{n-1}, \cdots, p_{n-1}=\lambda_2, p_n=\lambda_1$ 时，有

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq 0$$

所以 $D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

结论：

(1) 上三角形行列式（主对角线下方元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式（主对角线上方元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 对角形行列式(主对角线以外元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定理 n 阶行列式的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列。

即 n 阶行列式的值又可按下式计算

$$D=\sum(-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1.9}$$

其中 $\tau_1=\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$，$\tau_2=\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。$\sum$ 仅对 n 级行（或列）的所有排列求和。

第四节 对　　换

定义（对换） 在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果只将 i_s 与 i_t 的位置互换（其余均不动），得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的变换称为一次对换。

例如在排列 32145 中，将 2 与 4 对换，得到新的排列 34125。

我们看到：奇排列 32145 经对换 2 与 4 之后，变成了偶排列 34125。反之，也可以说偶排列 34125 经对换 4 与 2 之后，变成了奇排列 32145。

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变。

证明 先证相邻对换的情形：

设排列 $a_1 \cdots a_k a b b_1 \cdots b_m$ 经对换 a 与 b 得排列 $a_1 \cdots a_k b a b_1 \cdots b_m$，那么 $\tau(a_1 \cdots a_k b a b_1 \cdots b_m)=\tau(a_1 \cdots a_k a b b_1 \cdots b_m)\pm 1$。所以，经一次相邻对换，排列的奇偶性改变。

再证一般对换的情形：

设排列

$$a_1 \cdots a_k a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n \tag{1.10}$$

经对换 a 与 b，得排列

$$a_1 \cdots a_k b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n \tag{1.11}$$

事实上，排列（1.10）经过 $2m+1$ 次相邻对换变为排列（1.11）。根据相邻对换的情形及 $2m+1$ 是奇数，所以这两个排列的奇偶性相反。

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数。(证明略)

定理 2　n 阶行列式也可以定义为 $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$。

证明　事实上，若记 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}\\&=D\end{aligned}$$

第五节　行列式的性质

考虑 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，将它的行依次变为相应的列，得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式。

性质 1　行列式与它的转置行列式相等（即 $D^{\mathrm{T}}=D$）。

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解　$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\0&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

性质 2　互换行列式的两行（$r_i\leftrightarrow r_j$）或两列（$c_i\leftrightarrow c_j$），行列式的值变号。

推论 1　若行列式 D 的两行（列）完全相同，则 $D=0$。

性质 3　行列式某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2

(1) D 中某一行（列）所有元素的公因子可提到 D 的外面；

(2) 若 D 中某一行（列）所有元素为零，则 $D=0$。

性质 4 若行列式某一行（列）的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和。这两个行列式的这一行（列）的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行（列）的元素与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由行列式定义

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots (a_{ip_i} + b_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} + \\ &\quad \sum(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

性质 5 行列式 D 的某一行（列）的所有元素都乘以数 k 加到另一行（列）的相应元素上，行列式的值不变($D \xlongequal{r_i + kr_j} D$)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 3 D 的两行（列）对应元素成比例，则 $D=0$。

例 2 计算行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解　(1) $D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+4r_1]{r_3+8r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 30 & 37 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{30}{58}r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{143}{29} \end{vmatrix}$$

$$=-\left[1\times(-1)\times 58\times\frac{143}{29}\right]=286$$

(2) $D \xlongequal{r_1+\sum\limits_{i=2}^{4} r_i} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$=6\times(1\times 2\times 2\times 2)=48$$

例 3　计算 n 阶行列式

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

解　(1) $D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$