点集拓扑简明教程

张国滨

95

新疆大学出版社

点集拓扑简明教程

张国滨

新疆大学出版社

〔新〕新登字08号

点集拓扑简明教程　　　　张国滨

出版发行:新疆大学出版社
(乌鲁木齐市胜利路14号　邮编830046)
印　　刷:湛江市恒辉彩色印刷有限公司
开本:787×1092毫米　1/32
印张:3.9
字数:78千
版次:1995年5月第1版第1次印刷
印数:1－1000册

ISBN7－5631－0683－9/G·379　　　定价:15.00元

序

点集拓扑学是十九世纪发展起来的一个重要的数学分枝，它与众多的数学学科分枝有联系并成为它们的基础。事实上点集拓扑学的产生本来就是由于 Frechet 为了研究分析（建立函数空间与泛函）而发展起来的，他提出了抽象空间（邻域空间）与距离空间等概念。到本世纪廿年代点集拓扑学取得很大的发展。

因为点集拓扑学已成为一门基础学科，所以它逐渐成为高等学校中一门必修的课程。由于点集拓扑学的抽象性以及丰富的内容，因此在普通的高校中如何教授这门学科和如何取材是一个值得探讨的问题。张国滨教授 1985 年应邀在烟台大学为研究生班讲授了一个学期的拓扑学（包括点集拓扑），所编讲义曾被上海交大应用数学系借用作研究生课程教材。当时他就对这个问题有所思考并萌发了根据国内的某些实际情况编写一本拓扑学的想法。后来他虽然在贵州大学等校多次讲授拓扑学，但由于工作繁忙，这个想法一直没有实现。现在他根据工作的需要终于编写了这本点集拓扑简明教程。本书结合非重点院校的实际情况取材，着眼于选取最基本的概念与方法，以满足读者在学习其他学科时之基本所需，又不求包含最广的定理与完备的内容，以免内容太多太深而增加读者的困难与负担。所以虽然国内已有数种点集拓扑学的著作并各有其优点，但本书仍有其自身的特色。它对初学者定会有所裨益。

李培信
1995 年夏
于北京中关村

编者的话

笔者在点集拓扑课的教学中，有两件事感触较深：一是国内已出版的教本中，大多数从重点院校的角度出发，注重理论的深度、广度，强调系统的完整性。有些教本还包含一定篇幅的代数拓扑内容。这对于重点院校是很自然的。而其他一般院校使用这些教材便或多或少有些不便之处。二是在现行的教学状况下，讲授偏多，是普遍的现象。

鉴于上述认识，笔者从自身的教学出发，想编一本适合普通高校的拓扑学简明教程，使学生首先掌握一些最基本拓扑学知识，为他们毕业后从事各种工作或进一步深造打一点基础。

据此，这本教材希望能贯彻"学少一点，学好一点"的原则。一般拓扑空间对于初学者较为抽象，不易掌握，本书选择了一些简单的、具体的空间作为例题、习题。此外，本书强调度量空间，特别是欧氏空间的各种拓扑性质的教学，希望使用本书的学生注意这一点。第七章作为机动教材来处理。

在成书过程中，得到湛江师院数学系的大力支持和帮助。特别是系主任郭永东教授的鼓励与不断帮助，使本书得以问世。我系唐洪浪同志在手稿的打印和校对上付出了大量的心力。

在编写中，参考了书后目录所列著作，特别是熊金城教授[1]、左再思教授和黄锦能教授[2]，对本书影响很大。

我的老师李培信教授在百忙中写了序言。

在此，笔者一并致谢。

张国滨

1995 年春于湛江

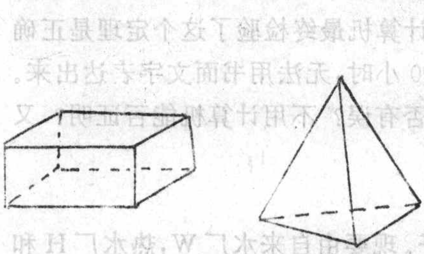
目　录

第一章 引论

§1 源于几何的拓扑学

1 多面体的欧拉定理

考虑下面的几个多面体：



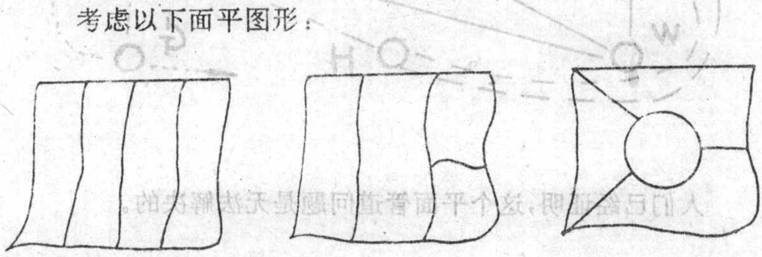
若用 F、S、P 分别表示每个图形的面数，边数和顶点数，则有一个共同的有趣事实：

$$F-S+P=2$$

十八世纪的天才数学家欧拉把它归结为著名的欧拉定理：任意 n 面体，它的面数与顶点数之和比边数多 2。

2 四色地图问题

考虑以下面平图形：



其中每个图形，都被曲线或直线分成大小不一定相等的四部分，如果我们用不同的颜色来区分各个部分，使相邻部分有不同的颜色，这就叫做平面地图着色问题。

显然，上述图形分别用 2,3,4 种颜色即足。

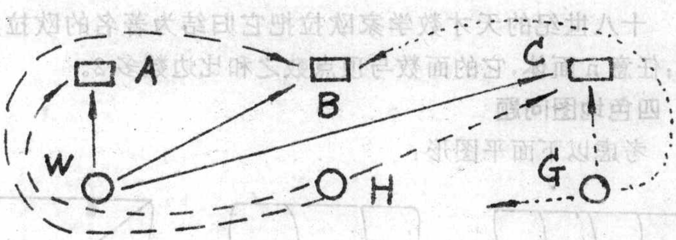
上世纪的英国数学家 F·古特里提出了猜想：

任何一个平面“规则”(这里“规则”指通过每一个顶点的曲(直)线数为 3)地图均只须 4 种颜色即足。

这便是著名的四色问题。至到一百年后的 1976 年三位美国数学家宣布他们用电子计算机最终检验了这个定理是正确的，机器运行时间超过 1200 小时，无法用书面文字表达出来。然而计算机的这个证明是否有误？不用计算机能否证明？又是问题中的问题。

3　平面管道问题

设有 A、B、C 三座房子。现要由自来水厂 W，热水厂 H 和煤气厂 G 分别用管道向它们输送自来水、热水和煤气。但要求所有的管道都必须安排在同一个平面上，不能形成管道立体交叉的现象。

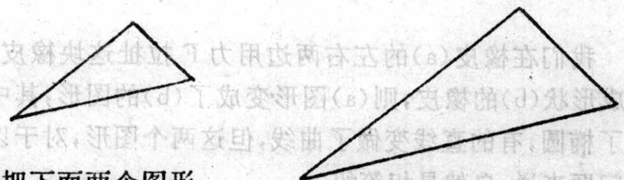


人们已经证明，这个平面管道问题是无法解决的。

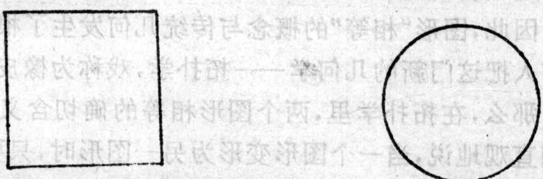
4　拓扑学与传统几何的区别

上述三个例子中，图形的面积大小，线段长短，角度大小，线段的曲直等对于该问题的解决是无关紧要，甚至毫无意义的。

在中学所学的传统几何中，两个三角形相等，必须它对应的边和角都要相等，如果仅仅对应角相等，则只是两个相似三角形，而不是“相等”三角形（如下图所示）。

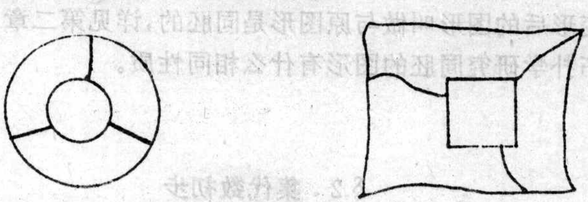


若把下面两个图形



看作相等，自然是荒谬的观点了。

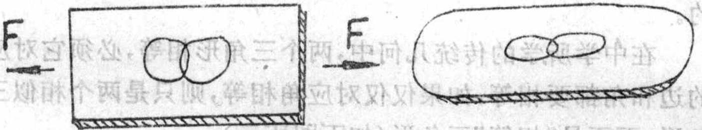
而在四色问题中，下面两个图形



从着色的多少的角度来看是相等的图形。

在平面管道问题中，管道的弯曲形状、曲直、长短、乃至走向显然毫无关系。

我们设想，在一块弹性十分良好的橡皮上画有一个图形（下图(a)）



我们在橡皮(a)的左右两边用力 F 拉扯这块橡皮，使它变成形状(b)的橡皮，则(a)图形变成了(b)的图形，其中圆变成了椭圆，有的直线变做了曲线，但这两个图形，对于以上三个问题来说，自然是相等的。

因此，图形“相等”的概念与传统几何发生了根本的改变。故有人把这门新的几何学——拓扑学，戏称为橡皮几何。

那么，在拓扑学里，两个图形相等的确切含义是什么呢？我们直观地说，当一个图形变形为另一图形时，只要不发生一个点变作两个或更多的点，也不会把两个以上的点迭在一起（在第三个问题中，即管道不断裂，互不交叉，也不自我打结），则变形后的图形叫做与原图形是同胚的，详见第二章§11。点集拓扑学研究同胚的图形有什么相同性质。

§2　集代数初步

1　集的概念

由于逻辑学上的原因，我们无法对集合下一个准确的定

义，而是通俗地说，一个确定的集是一些确定的个体组成的一个整体，这些个体叫做集的元素，或形象地叫做点。

例如由 1,2,3 三个数组成的集 $A=\{1,2,3\}$，由一个多项式 $f(x)$ 的根组成的集 $B=\{x|f(x)=0\}$。

我们用大写字母 A,B,C,… 表示集，而用小写字母 x,y,z,… 表示集合的元素。为了运算的方便，我们用 $\varnothing$ 表示不包含任何元素的“集”，叫做空集。

2 两种关系：属于与包含

我们用符号 $\in$ 表示元素与集合的关系，$x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元素，$y\notin$ 表示 y 不是 A 的元素。

例如 $2\in\{1,2,3\}$；$4\notin\{1,2,3\}$；对于任何元素 x，总有 $x\notin\varnothing$。

若集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$。特别有 $A\subset A$，$\varnothing\subset A$。以集 A 的全体子集为元素组成的集，记作 2^A，故 $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$。对任何非空集 X，显然 $X\subset X$，$\varnothing\subset X$，故 X，$\varnothing$ 一定是 X 的子集，这两个子集叫做 X 的平凡子集或假子集。若 $A\subset X$，但 $A\neq X$，$A\neq\varnothing$，则 A 叫做 X 的非平凡子集或真子集。显然 X 的子集 A 是真子集当且仅当 A 非空，且 X 中至少有一点不在 A 中。

两个集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$，是指 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，即它们有完全相同的元素。

3 三种运算：并集、交集与差集。

我们规定：

$A\cup B=\{x|$关系 $x\in A$ 与 $x\in B$ 至少有一个成立$\}$

$A\cap B=\{x|$关系 $x\in A$ 与 $x\in B$ 都成立$\}$

$A\backslash B=\{x|$关系 $x\in A$ 但 $x\notin B\}$

对于这三种运算，容易验证下面的公式成立：

(1) 结合律：

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(2) 交换律：

$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(3) 分配律：

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) De Morgan 公式

$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

证明 只证分配律第一式与 De Morgan 公式第一式。

1) 分配律第一式：

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

设 $x\in(A\cup B)\cap C$，则

$x\in(A\cup B)$ 同时 $x\in C$

由前者，$x\in A$ 或 $x\in B$

若 $x\in A$，因同时 $x\in C$，故 $x\in A\cap C$

否则 $x\in B$，因同时 $x\in C$，故 $x\in B\cap C$

故 $x\in A\cap C$ 或 $x\in A\cap B$

即 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

以上说明

$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$ (*)

反之，设 $y\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则

$y\in A\cap C$ 或 $y\in B\cap C$

由前者，$y\in A$ 同时 $y\in C$

否则，由后者，$y\in B$ 同时 $y\in C$

总之，$y\in A$ 或 $y\in B$，且不论如何总有，$y\in C$

故 $y\in (A\cup B)\cap C$

以上说明

$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$ （＊＊）

结合（＊）与（＊＊），有

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

2) De Morgan 公式第一式：

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

设 $x\in A\setminus(B\cup C)$，则

$x\in A$ 但 $x\notin B\cup C$

由后者，$x\notin B$ 同时 $x\notin C$ （因若 $x\notin B$ 与 $x\notin C$ 中有一式不成立，则 $x\in B\cup C$，矛盾）

与前者结合，得

"$x\in A$ 但 $x\notin B$"同时"$x\in A$ 但 $x\notin C$"

即 $x\in A\setminus B$ 同时 $x\in A\setminus C$

$x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，左边⊂右边

反之，设 $y\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，则

$y\in A\setminus B$ 同时 $y\in A\setminus C$

即"$y\in A$ 但 $y\notin B$"同时"$y\in A$ 但 $y\notin C$"

故 $y\in A$ 但 $y\notin B\cup C$

∴ $y\in A\setminus(B\cup C)$，右边⊂左边

即等式成立 证毕

有时我们要讨论多于两个（有限个或无限个）集的运算。

设 Λ 是一个确定的非空集，对于每个 $\lambda\in\Lambda$，有一个确定的集 A_λ，则用

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid 至少有一个\ \lambda\in\Lambda，使\ x\in A_\lambda\}$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid 对每个\ \lambda\in\Lambda，有\ x\in A_\lambda\}$$

分别表示一切 A_λ 的并与交。集 Λ 叫做指标集。

对此，也有与上面公式相应的公式成立，请读者自行补出。

例　若 $\Lambda=\{0,1,2\}$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=A_0\cup A_1\cup A_2$，若 Λ＝自然数集 N，则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_\lambda\cap\cdots$

在后面的章节，我们常常要表示“任意多个集的并”和“任意多个集的交”。前者用“$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，$\Lambda$ 为任意指标集”，而后者用“$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，$\Lambda$ 为任意指标集”。

4　集族

以集合为元素的集叫做集族，设某中学 β 由 12 个班组成，每个班由若干学生组成，这时学生是班的元素，班是集合。但在某一次班与班之间的足球赛的记分排名榜上，每一个班只是一个元素，若以 A_n，$n=1,2,\cdots 12$，记每个班，则 $\beta=(A_1,A_2,\cdots,A_{12})$。

前面设 A 是非空集，则 A 的全体子集组成的集 $2^A=\{B\mid B\subset A\}$ 便是一个集族，2^A 的每一个子集叫做 A 的一个子集族，集族通常用花体大写字母或小写希腊字母表示，它的元素用大写字母表示。

5　集的乘积

设 A、B 为任二非空集，令

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

叫做 A 与 B 的积。

例　A＝{张，王}，B＝{1，2，3}王则

A×B＝{(张，1)，(张，2)，(张，3)，(王，1)，(王，2)，(王，3)}

§3 映射

映射是函数概念的发展。函数讨论两个变数的对应关系，而映身讨论两个集合的元素之间关系。

1 定义

设 A，B 是两个非空集，我们说定义了一个从 A 到 B 的映射 f，记作 $f: A\to B$，是指：对于 A 的任一元素 a，存在 B 的唯一元素 b 与之对应，b 叫做 a 在 f 下的像，记作 $b=f(a)$，a 叫做 b 的一个原像，b 的全体原像记作 $f^{-1}(b)$。

若 $C\subset A$，则集 $f(C)=\{b|$存在 $a\in C$，使 $f(a)=b\}$叫做集 C 在 f 下的像。

若 $D\subset B$，则集 $f^{-1}(D)=\{a|f(a)\in D\}$叫做 D 在 f 下的原像。显然

$$f(A)\subset B, f^{-1}(B)=A.$$

若对任意的 $a_1,a_2\in A$，当 $a_1\neq a_2$ 时，有 $f(a_1)\neq f(a_2)$，则 f 叫做单一映射，显然 f 为单一映射⇔对每个 $b\in B$，$f^{-1}(b)$至多包含一个点。

若 $f(A)=B$，则说 f 是满映射。显然，f 为满映射⇔$f^{-1}(b)$非空，对每个 $b\in B$。

f 叫做一一对应，若 f 是单一满映射。

2 性质

易知：(1) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2),\forall\ A_1,A_2\subset A$

(2) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2),\forall\ B_1,B_2\subset B$

当 $B=A$ 时，映射 $f:A\to A$ 叫做自映射。

若 $f(a)=a$，对于每个 $a\in A$ 都成立，则 f 叫做恒同映射，通常在集 A 上的恒同映射记作 Id_A 或 1_A，故有

$Id_A(a)=a$，对于一切 $a\in A$。

为了书写简便，今后常用符号“$\forall$”表示“对于一切”，“$\exists$”表示“存在”。

若 $f:A\to B,g:B\to C$ 是两个映射，则可得到一个映射 $g\circ f:A\to C$ 射定义如下：

$(g\circ f)(a)=g[f(a)]\quad\forall a\in A$，

$f\circ g$ 叫做 f 与 g 的复合映射。

易知：(3) $(g\circ f)^{-1}(E)=f^{-1}[g^{-1}(E)],\forall\quad E\subset C$

(4) $f_\circ^{-1}f(F)\supset F,\quad\forall\quad F\in A$

(5) $f_\circ f^{-1}(D)\subset D,\forall\quad D\subset B$

(6) 若 f，g 都是单一映射，则 $f\circ g$ 亦是，

(7) 若 f，g 都是满映射，则 $f\circ g$ 亦是，

(8) 若 f，g 都是一一对应，则 $f\circ g$ 亦是。

现设 $g:A\to B,g:B\to A$ 为二映射，若 $g\circ f=1$，$f\circ g=1_B$，则 g 叫做 f 的逆映射，记作 $f^{-1}=g$，此时自然有 $g^{-1}=f$，故 $(f^{-1})^{-1}=f$。

易知：(9) f 有逆映射存在$\Leftrightarrow$f 为一一对应