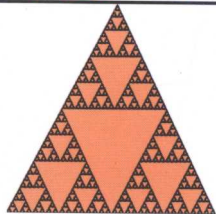


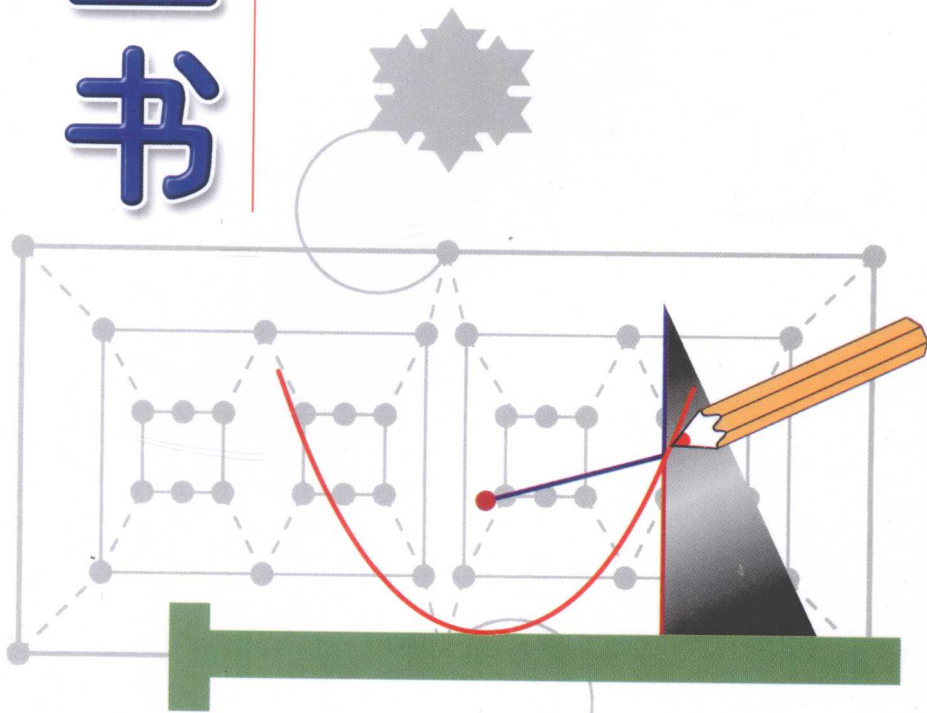
初中版 中卷



新编中学数学

解题方法全书

刘培杰 主编

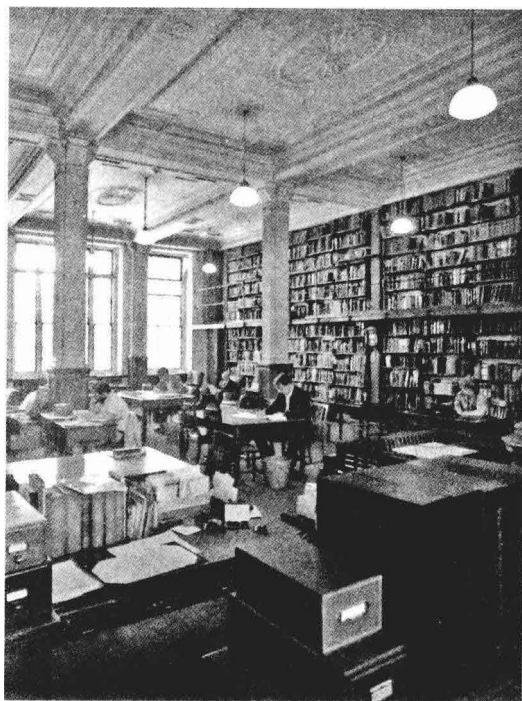


哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



我们现在所具有的数学真理中的大多数都是以许多世纪以来的艰苦智力劳动为先决条件的。

H. Schubert

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共包括六部分:第一编代数,第二编几何,第三编概率与统计,第四编中考,第五编竞赛,第六编通法。本书以专题的形式对初中数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合初中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:初中版·中卷:/刘培杰
主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.6

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3014 - 3

I . ①新… II . ②刘… III . ①数学课—初中—解题
IV . ①G634 . 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078583 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 20 字数 468 千字
版 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3014 - 3
印 数 1 ~ 3 000 册
定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



第一编 代数

怎样用配方法解题	3
怎样应用一个条件等式	7
怎样解“表针对调”问题	10
怎样充分发挥特例在解题中的作用	12
怎样用字母化策略化简根式	14
怎样解含根式题	17
巧算二次根式	23
怎样寻“根”解题	26
怎样巧用倒数法解一类数学题	29
浅谈初中数学中的分类讨论	31
怎样在解竞赛题中应用韦达定理	34
怎样巧解方程(组)	37
怎样应用一元二次方程两根比与系数关系	43
怎样复习二次函数、一元二次方程和一元二次不等式	45
怎样用不等式法解含 $[x]$ 方程的不等式	49
怎样解无理方程	51
怎样解简单的无理方程中参数取值问题	54
怎样用因式分解巧解竞赛试题	56
怎样使用方程的非常规解法	58
怎样运用二次函数与二次方程的关系解题	62
怎样巧用二次函数顶点式的解析式	65
怎样逆用一元二次方程根的定义解题	67
怎样进一步开发根与系数的关系	68
怎样解两个一元二次方程有一根具有某种关系的问题	71
运用平均数代换法解题	73
怎样计算哪种上网方式更适合你	75
怎样求解一类数列操作题	76
怎样用技巧进行分母有理化	78

目录

CONTENTS



怎样用三角形面积公式解代数题	81
怎样解商品调价中的数学问题	83
怎样构造辅助元素巧解题	85

第二编 几何

怎样用基本图形法解几何题	89
怎样补形降低难度	94
怎样解探索型结论题	97
怎样利用直角三角形解题	100
怎样用代数解法解几何极值问题	103
怎样构造辅助正方形解题	106
三角形等圆线的性质及其应用	110
怎样判断一个运动现象是旋转	112
怎样巧用旋转变换解平面几何问题(I)	113
怎样巧用旋转变换解平面几何问题(II)	117
怎样用联想思维证明一道竞赛题	120
怎样解一个切割问题	122
怎样推导一类内接三角形的面积的统一公式	124
怎样用变化的方法演变几何题	129
怎样用等补三角形的性质解题	131
怎样运用转化思想巧算图形面积	136
怎样证“ $ef = ab \pm cd$ ”型几何题	139
怎样巧用面积证法证几何题	142
怎样用面积方法解题	146
怎样应用面积参数解几何题	151
怎样构造辅助圆巧证代数不等式	156
怎样看待平行弦在证题中的作用	158
怎样由同一个三角形构造一批命题	161
怎样探求运动变化中的不变量	164
怎样应用三角形的性质解题	166

第三编 概率与统计

怎样解初中数学竞赛中的概率问题	175
怎样解约会中的概率问题	179
怎样解中国电脑福利彩票中的数学问题	181
怎样诠释几个统计量	184



第四编 中考

怎样解近年中考中的镶嵌问题	191
怎样解图表化中考试题	194
怎样用经典老题解中考试题	198
怎样运用数学思想方法解中考试题	203
怎样探究中考动态题中图形面积与运动变量的函数关系	208
怎样解中考中的自编型试题	212
怎样解中考数学实验问题	215
怎样解中考格点问题	221
怎样解实践操作能力问题	224
怎样构建数学模型巧解中考应用问题	229
怎样解中考数学中的双动点问题	233

第五编 竞赛

怎样构造一元二次方程解竞赛题(I)	239
怎样构造一元二次方程解竞赛题(II)	243
怎样用根与系数的关系解竞赛题	246
怎样利用配方法巧解竞赛题	252
怎样解初中数学竞赛中的二次函数相关问题	254
怎样进行竞赛题的思路分析	258
怎样证明三点共线问题	262
怎样利用均值代换解竞赛题	266
怎样对一道竞赛题进行推广	271
怎样进行数学竞赛题的探究	278
怎样玩警察抓小偷棋戏	284

第六编 通法

反证法解题经验八型	291
怎样转换视角解题	295
怎样用“以退求进”策略巧解数学问题	298
巧用不等解相等	300
怎样“量体裁衣”画图象	302
怎样解初中数学选择题	304

目录 CONTENTS



第一编

代数



有些教师试图用记忆规则和发展机械程式的方法讲授数学。他们是拙劣的教员，这种教学方法也是不值得提倡的。无论谁，他如果只学习处方而又没有真正弄懂他所学的东西，那他就不能正确地使用这些处方。

A. Renyi



怎样用配方法解题

配方法是中学数学中一种重要的数学方法,其应用十分广泛.巧用配方法,可使很多数学问题迎刃而解,举例说明如下.

1 巧用配方求值

例 1 若 $a + x^2 = 1997, b + x^2 = 1998, c + x^2 = 1999$, 且 $abc = 12$, 求 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 的值.

解 由已知有

$$\begin{aligned} a - b &= -1, b - c = -1, c - a = 2 \\ \text{原式} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab}{abc} = \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2abc} = \\ &= \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}{2 \times 12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例 2 已知 a, b, c 均为整数, 且满足 $a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 13 < 2ab + 4b + 12c$, 试求 $\sqrt{(c+a) - (a+b)}\sqrt{a+b}$ 的值.

解 将已知条件变形为

$$(a^2 - 2ab + b^2) + 2(b^2 - 2b + 1) + 3(c^2 - 4c + 4) < 1$$

即

$$(a - b)^2 + 2(b - 1)^2 + 3(c - 2)^2 < 1$$

由于 a, b, c 均为整数, 故上式左端为整数, 又

$$(a - b)^2 + 2(b - 1)^2 + 3(c - 2)^2 \geq 0$$

所以

$$a - b = b - 1 = c - 2 = 0$$

即

$$a = b = 1, c = 2$$

故

$$\text{原式} = \sqrt{(2+1) - (1+1)}\sqrt{1+1} = \sqrt{3-2}\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

2 巧用配方化简

例 3 化简 $\sqrt{11 + 2(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{7})} - \sqrt{2(6 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{15})}$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \sqrt{13 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{35}} - \\ &= \sqrt{12 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{15}} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{7} + \sqrt{5}) + 1} - \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + 4} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{7} + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} - \sqrt{3} + 2 = \\ & \sqrt{7} - \sqrt{3} + 3 \end{aligned}$$

例4 设 $x > 0$, 化简 $\sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}} - \sqrt{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}$.

解 原式 = $\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} -$
 $\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right) - \sqrt{x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} =$
 $\sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}\right)^2}$

因为 $x > 0$, 所以 $\sqrt{x + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$, 所以

$$\text{原式} = \sqrt{x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} - \sqrt{x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = 1$$

3 巧用配方证明

例5 已知 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1997^2$, $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1999^2$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1997 \times 1999$, 以上各数均为实数, 且 b_1, b_2, \cdots, b_n 均不为零.

求证: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

证明 将已知条件配方, 得

$$\begin{aligned} & (1999a_1 - 1997b_1)^2 + (1999a_2 - 1997b_2)^2 + \cdots + (1999a_n - 1997b_n)^2 = \\ & 1999^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2 \times 1997 \times 1999(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + \\ & a_n b_n) + 1997^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \\ & 1999^2 \times 1997^2 - 2 \times 1997^2 \times 1999^2 + 1997^2 \times 1999^2 = 0 \end{aligned}$$

所以

$$1999a_1 - 1997b_1 = 1999a_2 - 1997b_2 = \cdots = 1999a_n - 1997b_n = 0$$

故有

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

4 巧用配方分解因式

例6 分解因式 $(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^4(1-y)^2$.

解 对首末两项配方, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= [(1+y) + x^2(1-y)]^2 - 2x^2(1-y^2) - 2x^2(1+y^2) = \\ & [(1+y) + x^2(1-y)]^2 - (2x)^2 = \\ & [(1+y) + x^2(1-y) + 2x][(1+y) + x^2(1-y) - 2x] = \\ & [(x+1)^2 - y(x^2-1)][(x-1)^2 - y(x^2-1)] = \\ & (x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy-y) \end{aligned}$$

例7 分解因式 $x^4 + y^4 + (x+y)^4$.

解 对第一、二项配方, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4 = \\ & [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4 = \\ & 2(x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 = \\ & 2[(x+y)^2 - xy]^2 = 2(x^2 + y^2 + xy)^2 \end{aligned}$$

心得体会 拓广疑问

心得体会 拓广 疑问

5 巧用配方判定

例 8 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 且 $(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$ 是一个完全平方式, 试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

解 $(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$ 为完全平方式, 则有

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 0$$

即

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ca &= \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

所以 $a = b = c$, 故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

例 9 试问 a, b 为何值时, 方程 $x^2 + 2(1+a)x + 3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2 = 0$ 有实根, 并求其实根.

解 原方程两边都乘以 2 并整理, 得

$$(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 4ax + 4a^2) + 2(a^2 + 4ab + 4b^2) = 0$$

即

$$(x+2)^2 + (x+2a)^2 + 2(a+2b)^2 = 0$$

所以

$$x+2 = x+2a = a+2b = 0$$

故当 $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ 时, 原方程有实根 $x = -2$.

6 巧用配方解方程(组)

例 10 求方程 $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$ 的正整数解.

解 原方程可化为 $x^2 - 6xy + 9y^2 = 100 - 4y^2$, 即

$$(x-3y)^2 = 100 - 4y^2$$

从而 $100 - 4y^2 \geq 0$, 所以 $-5 \leq y \leq 5$.

又 y 为正整数, 故 $y = 1, 2, 3, 4, 5$. 可求得原方程的正整数解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 15 \\ y_3 = 5 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 17 \\ y_4 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_5 = 18 \\ y_5 = 4 \end{cases}$$

例 11 解方程组

$$\begin{cases} x = \frac{2z^2}{1+z^2} \\ y = \frac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \frac{2y^2}{1+y^2} \end{cases}$$

解 显然 $x = y = z = 0$ 是方程组的解; 当 $x \neq 0$ 时, 有 $y \neq 0, z \neq 0$, 原方程组变形为

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{z^2} + 1 \quad \text{①}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x^2} + 1 \quad \text{②}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{y^2} + 1 \quad \text{③}$$

式 ① + ② + ③, 得

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x} - \frac{2}{y} - \frac{2}{z} + 3 = 0$$

配方得

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0$$

所以

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{z} - 1 = 0$$

故

$$x = y = z = 1$$

从而原方程组的解为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{或} \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

(王向红)

心得 体会 拓广 疑问

怎样应用一个条件等式

证明:若 $a + b + c = 0$, 则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

证 因为 $a + b + c = 0$, 所以

$$c = -(a + b)$$

所以

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 - (a + b)^3 = \\ &= a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = \\ &= -3ab(a + b) = \\ &= -3ab \cdot (-c) = 3abc \end{aligned}$$

这是一个重要的条件等式, 它的应用极为广泛, 利用它来解决含立方或开立方的数学问题, 往往简捷巧妙, 现分类举例应用如下.

1 用于计算

例 1 (1999 年北京市初二数学竞赛试题) 计算 $\frac{1999^3 - 1000^3 - 999^3}{1999 \times 1000 \times 999}$.

解 因为 $1999 + (-1000) + (-999) = 0$, 所以

$$1999^3 + (-1000)^3 + (-999)^3 = 3 \cdot 1999 \cdot (-1000) \cdot (-999)$$

所以

$$\text{原式} = \frac{3 \cdot 1999 \cdot (-1000) \cdot (-999)}{1999 \times 1000 \times 999} = 3$$

2 用于分解因式

例 2 (2001 年“五羊杯”初二数学竞赛试题) 分解因式

$$(2x - 3y)^3 + (3x - 2y)^3 - 125(x - y)^3$$

解 原式 = $(2x - 3y)^3 + (3x - 2y)^3 + (5y - 5x)^3$, 因为

$$(2x - 3y) + (3x - 2y) + (5y - 5x) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3(2x - 3y)(3x - 2y)(5y - 5x) = \\ &= 15(2x - 3y)(3x - 2y)(y - x) \end{aligned}$$

3 用于求值

例 3 (1992 年全国初中数学联赛试题) 若 a, b 都是正实数, 且 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0$, 则 $\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 =$ _____.

解 由已知等式, 得 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.

两边同乘以 $a+b$, 可得 $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1$, 因为

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \sqrt{\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^2 + 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt{5}$$

即

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \sqrt{5} = 0$$

所以

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + (-\sqrt{5})^3 = 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot (-\sqrt{5})$$

整理,得

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2\sqrt{5}$$

例4 (1996年天津市初中数学联赛试题) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 的值为

解 设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = x$, 则 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} - x = 0$. 所以

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3 + (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 + (-x)^3 = 3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot (-x)$$

整理,得

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

即

$$(x-1)(x^2+x+4) = 0$$

因为

$$(x^2+x+4) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

所以

$$x = 1$$

所以

$$\text{原式} = 1$$

4 用于解方程

例5 (1992年武汉市初中数学竞赛试题) 解方程 $\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{4-x} = 3$.

解 原方程可化为 $\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{4-x} - 3 = 0$. 所以

$$(\sqrt[3]{5+x})^3 + (\sqrt[3]{4-x})^3 + (-3)^3 = 3 \cdot \sqrt[3]{5+x} \cdot \sqrt[3]{4-x} \cdot (-3)$$

即

$$\sqrt[3]{(5+x)(4-x)} = 2, (5+x)(4-x) = 8$$

解之,得 $x_1 = 3, x_2 = -4$.

5 用于解方程组

例6 (1998年“希望杯”数学邀请赛初二年级试题) 在方程组

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=-36 \end{cases}$ 中, x, y, z 是互不相等的整数, 那么此方程组的解的组数为 ().

A. 6 B. 3 C. 多于6 D. 少于3

解 因为 $x+y+z=0, x^3+y^3+z^3=-36$, 所以

$$x^3+y^3+z^3 = 3xyz = -36 \Rightarrow xyz = -12$$

所以互不相等的整数 x, y, z 中有两个正数、一个负数, 且其和为0.

所以原方程组的整数解为 $(1, 3, -4), (3, 1, -4), (1, -4, 3), (-4, 1, 3), (3, -4, 1), (-4, 3, 1)$. 选 A.

心得体会 拓广疑问

心得 体会 拓广 疑问

6 用于证明等式

例7 (1991年南京市初二数学竞赛试题) 已知 $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} - \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^3} - a}$. 求证: $x^3 + 3bx = 2a$.

证明 由已知, 得

$$x - \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^3} - a} = 0$$

所以

$$x^3 + \left(-\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^3} - a}\right)^3 = \\ 3 \cdot x \cdot \left(-\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^3} - a}\right)$$

即

$$x^3 - 2a = -3bx$$

所以

$$x^3 + 3bx = 2a$$

7 用于求取值范围

例8 (1992年太原市初中数学竞赛试题) 设实数 x, y 满足 $x^3 + y^3 = a^3$ ($a > 0$), 求 $x + y$ 的取值范围.

解 因为 $x^3 + y^3 = a^3$ ($a > 0$), 所以

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) > 0$$

所以

$$(x + y) \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] > 0$$

由 x, y 不同时为 0, 可知 $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, 所以 $x + y > 0$.

设 $x + y = t$, 则 $x + y - t = 0$, 所以

$$x^3 + y^3 + (-t)^3 = 3xy \cdot (-t)$$

因为

$$x^3 + y^3 = a^3, y = t - x$$

所以

$$a^3 + (-t)^3 = 3x(t - x) \cdot (-t)$$

整理, 得

$$3tx^2 - 3t^2x + t^3 - a^3 = 0$$

因为 x 是实数, 所以 $\Delta \geq 0$, 即

$$(-3t^2)^2 - 4 \cdot 3t \cdot (t^3 - a^3) \geq 0$$

解得 $t \leq \sqrt[3]{4a}$, 即 $x + y \leq \sqrt[3]{4a}$. 所以

$$0 < x + y \leq \sqrt[3]{4a}$$

(朱德云)

怎样解“表针对调”问题

有一次著名物理学家爱因斯坦病了,他的朋友出了一个数学问题给他作消遣:

“设表针的位置在12点钟,在这位置如果把时针和分针对调一下,它们所指的位置还是合理的,但是在别的时候,例如在6点钟,两针对调就成了笑话,这种位置是不可能的:当时针指12的时候,分针决不会指6.因此引起这个问题:表针在什么位置的时候两针可以对调,使得新位置仍能指示实际上可能的时刻?”

爱因斯坦笑着回答:“是的,这对病在床上的人的确是个很好的问题,够有趣味而又不那么容易.只是恐怕消磨不了多少时间,我已经快要解出来了.”

这个问题他到底是怎样解的呢?

解 以圆周的 $\frac{1}{60}$ 作为单位来度量表针在表面上从12点起所走的距离.

假设所求的表针的位置的一种情况是,时针从12起走过 x 个刻度,分针走过 y 个刻度,既然时针每12h(小时)走过60个刻度,就是每小时走过5个刻度,那么它走过 x 个刻度要 $\frac{x}{5}$ h,换句话说,在表指出12点以后,过了 $\frac{x}{5}$ h.分针走过 y 刻度要 y min(分钟),也就是 $\frac{y}{60}$ h.换句话说,分针是在 $\frac{y}{60}$ h之前经过12的,或者说,那是两针在12那里重合之后又过了 $(\frac{x}{5} - \frac{y}{60})$ h.这个数是一个整数(从0到11),因为它表示12点之后又过去几个整小时.

当两针对调了位置,我们用同样的方法可以求出,从12点到表针所指示的时间经过了 $\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$ 个整小时,这个数仍然是整数(从0到11).

我们得到联立方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \end{cases}$$

这里 m 和 n 是从0到11的整数.从这个方程组得出

$$\begin{cases} x = \frac{60(12m+n)}{143} \\ y = \frac{60(12n+m)}{143} \end{cases}$$

用从0到11的各数去代 m 和 n ,就能确定全部所求的表针的位置.既然 m 的12个数中每一个都可以和 n 的12个数中的每一个组合起来,好像应该有 $12 \times 12 = 144$ (个)解.可是事实上只有143个,因为在 $m=0, n=0$ 和 $m=11, n=11$ 的时候,表针是同一个位置.

在 $m=11, n=11$ 时我们有 $x=60, y=60$,就是说指的是12点,这和 $m=0, n=0$ 所指的一样.

不妨看两个例子:

第一例: $m=1, n=1$.

$x = \frac{60 \times 13}{143} = 5 \frac{5}{11}$, $y = 5 \frac{5}{11}$, 就是说所指的时间是 1 点 $5 \frac{5}{11}$ 分, 这时两针重合, 它们当然可以彼此对调(所有其他两针重合的情形也都是这样).

第二例: $m = 8, n = 5$. 则有

$$x = \frac{60(5 + 12 \times 8)}{143} \approx 42.38$$

$$y = \frac{60(8 + 12 \times 5)}{143} \approx 28.53$$

相应的时刻是 8 点 28.53 分和 5 点 42.38 分.

应当说, 爱因斯坦的这个解法非常巧妙且不太容易想到. 下面我们用算角的方法来求出它的解.

另解 由时针、分针的特性可知, 分针的转动速度应是时针转动速度的 12 倍. 故当时针以 12 点为起点转动的角度为 β 时分针以 12 点为起点转动的角度必为 12β ; 而当时针转动角度为 12β (即转到上述分针所在位置) 时, 分针转动角度理应为 144β . 从条件可知, 此时分针所处位置与上述时针所处的位置重合. 如此, 两者必相差周角的整数倍数, 即 $144\beta - \beta = k \cdot 360$. 故 $\beta = \frac{k \cdot 360}{143}$, 显然 k 只需取 $0, 1, 2, \dots, 142$ 即可, 故而本题的解有 143 个. 为了要找出表面上所有这些允许表针对调的点, 我们得把表面全周以 12 点为起点分为 143 等分, 这样我们得到 143 个所求的点. 在其他点上, 表针位置的对调是不可能的.

(皇甫荣)

心得 体会 拓广 疑问