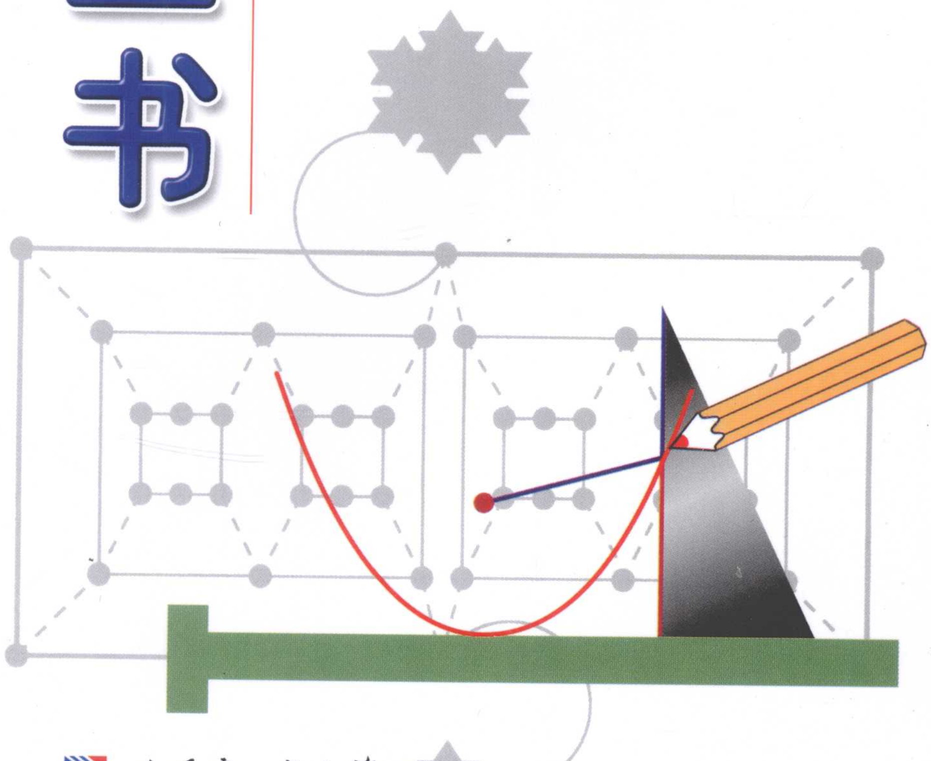
新编中学数学解题方法全书

初中版 中卷

刘培杰 主编



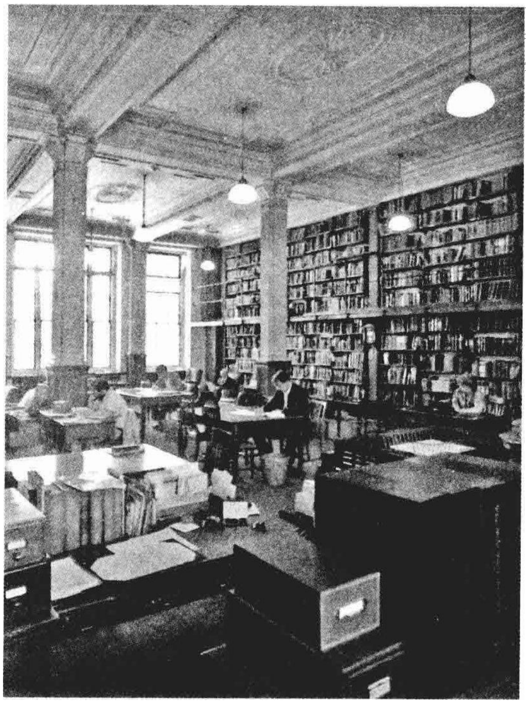
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

初中版 中卷

新编中学数学

解题方法全书

刘培杰　主编



我们现在所具有的数学真理中的大多数都是以许多世纪以来的艰苦智力劳动为先决条件的。

H.Schubert

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共包括六部分:第一编代数,第二编几何,第三编概率与统计,第四编中考,第五编竞赛,第六编通法。本书以专题的形式对初中数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合初中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:初中版.中卷:/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-5603-3014-3

Ⅰ.①新… Ⅱ.②刘… Ⅲ.①数学课-初中-解题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078583 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm　1/16　印张 20　字数 468 千字
版　　次 2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3014-3
印　　数 1~3 000 册
定　　价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

第一编　代数

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

第二编 几何

第三编 概率与统计

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第四编　中考

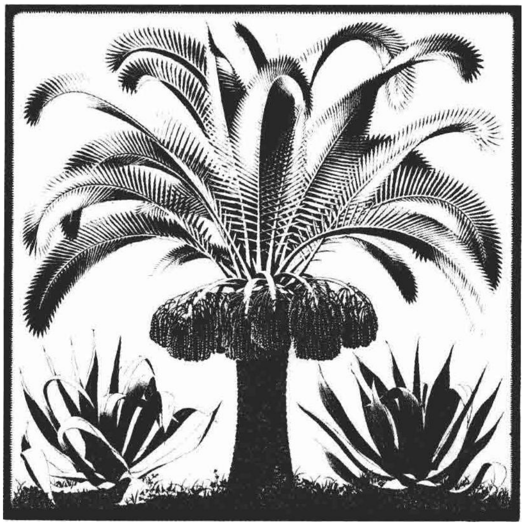
第五编　竞赛

第六编　通法

目录
CONTENTS

第一编

代数



有些教师试图用记忆规则和发展机械程式的方法讲授数学。他们是拙劣的教员，这种教学方法也是不值得提倡的。无论谁，他如果只学习处方而又没有真正弄懂他所学的东西，那他就不能正确地使用这些处方。

A.Renyi

心得 体会 拓广 疑问

怎样用配方法解题

配方法是中学数学中一种重要的数学方法,其应用十分广泛.巧用配方法,可使很多数学问题迎刃而解,举例说明如下.

1 巧用配方求值

例 1 若 $a+x^2=1\,997$,$b+x^2=1\,998$,$c+x^2=1\,999$,且 $abc=12$,求 $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ 的值.

解 由已知有

$$a-b=-1,b-c=-1,c-a=2$$

$$\text{原式}=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab}{abc}=$$

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2abc}=$$

$$\frac{(-1)^2+(-1)^2+2^2}{2\times 12}=\frac{1}{4}$$

例 2 已知 a,b,c 均为整数,且满足 $a^2+3b^2+3c^2+13<2ab+4b+12c$,试求 $\sqrt{(c+a)-(a+b)\sqrt{a+b}}$ 的值.

解 将已知条件变形为

$$(a^2-2ab+b^2)+2(b^2-2b+1)+3(c^2-4c+4)<1$$

即

$$(a-b)^2+2(b-1)^2+3(c-2)^2<1$$

由于 a,b,c 均为整数,故上式左端为整数,又

$$(a-b)^2+2(b-1)^2+3(c-2)^2\geqslant 0$$

所以

$$a-b=b-1=c-2=0$$

即

$$a=b=1,c=2$$

故

$$\text{原式}=\sqrt{(2+1)-(1+1)\sqrt{1+1}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

2 巧用配方化简

例 3 化简 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}-\sqrt{2(6-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})}$.

解
$$\text{原式}=\sqrt{13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}}-$$

$$\sqrt{12-4\sqrt{3}-4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}=$$

$$\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2+2(\sqrt{7}+\sqrt{5})+1}-$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-4(\sqrt{5}+\sqrt{3})+4}=$$

$$\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2)^2}=$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\sqrt{7}+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}-\sqrt{3}+2=$$
$$\sqrt{7}-\sqrt{3}+3$$

例 4 设 $x>0$,化简 $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}-\sqrt{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}$.

解 原式 $=\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}-$

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}=$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

因为 $x>0$,所以 $\sqrt{x+\frac{1}{4}}>\frac{1}{2}$,所以

$$\text{原式}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=1$$

3 巧用配方证明

例 5 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1\,997^2$, $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1\,999^2$, $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\,997\times1\,999$,以上各数均为实数,且 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均不为零.求证:$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

证明 将已知条件配方,得

$$(1\,999a_1-1\,997b_1)^2+(1\,999a_2-1\,997b_2)^2+\cdots+(1\,999a_n-1\,997b_n)^2=$$
$$1\,999^2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-2\times1\,997\times1\,999(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+$$
$$a_nb_n)+1\,997^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=$$
$$1\,999^2\times1\,997^2-2\times1\,997^2\times1\,999^2+1\,997^2\times1\,999^2=0$$

所以

$$1\,999a_1-1\,997b_1=1\,999a_2-1\,997b_2=\cdots=1\,999a_n-1\,997b_n=0$$

故有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

4 巧用配方分解因式

例 6 分解因式 $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

解 对首末两项配方,得

原式 $=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-2x^2(1-y^2)-2x^2(1+y^2)=$

$$[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2=$$
$$[(1+y)+x^2(1-y)+2x][(1+y)+x^2(1-y)-2x]=$$
$$[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]=$$
$$(x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy-y)$$

例 7 分解因式 $x^4+y^4+(x+y)^4$.

解 对第一、二项配方,得

$$\text{原式}=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4=$$
$$[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2+(x+y)^4=$$
$$2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=$$
$$2[(x+y)^2-xy]^2=2(x^2+y^2+xy)^2$$

心得 体会 拓广 疑问

5　巧用配方判定

例 8　设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边，且 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$ 是一个完全平方式，试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

解　$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$ 为完全平方式，则有

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=0$$

即

$$2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ca=$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

所以 $a=b=c$，故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

例 9　试问 a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根，并求其实根.

解　原方程两边都乘以 2 并整理，得

$$(x^2+4x+4)+(x^2+4ax+4a^2)+2(a^2+4ab+4b^2)=0$$

即

$$(x+2)^2+(x+2a)^2+2(a+2b)^2=0$$

所以

$$x+2=x+2a=a+2b=0$$

故当 $a=1,b=-\frac{1}{2}$ 时，原方程有实根 $x=-2$.

6　巧用配方解方程(组)

例 10　求方程 $x^2-6xy+13y^2=100$ 的正整数解.

解　原方程可化为 $x^2-6xy+9y^2=100-4y^2$，即

$$(x-3y)^2=100-4y^2$$

从而 $100-4y^2\geqslant 0$，所以 $-5\leqslant y\leqslant 5$.

又 y 为正整数，故 $y=1,2,3,4,5$. 可求得原方程的正整数解为

$$\begin{cases}x_1=1\\y_1=3\end{cases},\begin{cases}x_2=6\\y_2=4\end{cases},\begin{cases}x_3=15\\y_3=5\end{cases},\begin{cases}x_4=17\\y_4=3\end{cases},\begin{cases}x_5=18\\y_5=4\end{cases}$$

例 11　解方程组 $\begin{cases}x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}\\y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}\\z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}\end{cases}$.

解　显然 $x=y=z=0$ 是方程组的解；当 $x\neq 0$ 时，有 $y\neq 0,z\neq 0$，原方程组变形为

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{z^2}+1 \qquad ①$$

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{x^2}+1 \qquad ②$$

$$\frac{2}{z}=\frac{1}{y^2}+1 \qquad ③$$

式①+②+③，得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}+3=0$$

配方得

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0$$

所以

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{y}-1=\frac{1}{z}-1=0$$

故

$$x=y=z=1$$

从而原方程组的解为

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

(王向红)

心得 体会 拓广 疑问

怎样应用一个条件等式

证明:若 $a+b+c=0$,则 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

证 因为 $a+b+c=0$,所以

$$c=-(a+b)$$

所以

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=a^3+b^3-(a+b)^3=\\&a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=\\&-3ab(a+b)=\\&-3ab\cdot(-c)=3abc\end{aligned}$$

这是一个重要的条件等式,它的应用极为广泛,利用它来解决含立方或开立方的数学问题,往往简捷巧妙,现分类举例应用如下.

1 用于计算

例 1 (1999 年北京市初二数学竞赛试题)计算 $\dfrac{1\ 999^3-1\ 000^3-999^3}{1\ 999\times1\ 000\times999}$.

解 因为 $1\ 999+(-1\ 000)+(-999)=0$,所以

$$1\ 999^3+(-1\ 000)^3+(-999)^3=3\cdot1\ 999\cdot(-1\ 000)\cdot(-999)$$

所以

$$\text{原式}=\frac{3\cdot1\ 999\cdot(-1\ 000)\cdot(-999)}{1\ 999\times1\ 000\times999}=3$$

2 用于分解因式

例 2 (2001 年"五羊杯"初二数学竞赛试题)分解因式

$$(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3$$

解 原式 $=(2x-3y)^3+(3x-2y)^3+(5y-5x)^3$,因为

$$(2x-3y)+(3x-2y)+(5y-5x)=0$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=3(2x-3y)(3x-2y)(5y-5x)=\\&15(2x-3y)(3x-2y)(y-x)\end{aligned}$$

3 用于求值

例 3 (1992 年全国初中数学联赛试题)若 a,b 都是正实数,且 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=0$,则 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=$ ________.

解 由已知等式,得 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

两边同乘以 $a+b$,可得 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}=1$,因为

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\sqrt{5}$$

即

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\sqrt{5}=0$$

所以

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3+(-\sqrt{5})^3=3\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot(-\sqrt{5})$$

整理,得

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3=2\sqrt{5}$$

例4 (1996年天津市初中数学联赛试题) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 的值为______.

解 设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=x$,则 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}-x=0$.所以

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3+(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3+(-x)^3=3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot(-x)$$

整理,得

$$x^3+3x-4=0$$

即

$$(x-1)(x^2+x+4)=0$$

因为

$$(x^2+x+4)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$$

所以

$$x=1$$

所以

$$\text{原式}=1$$

4 用于解方程

例5 (1992年武汉市初中数学竞赛试题) 解方程 $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{4-x}=3$.

解 原方程可化为 $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{4-x}-3=0$.所以

$$(\sqrt[3]{5+x})^3+(\sqrt[3]{4-x})^3+(-3)^3=3\cdot\sqrt[3]{5+x}\cdot\sqrt[3]{4-x}\cdot(-3)$$

即

$$\sqrt[3]{(5+x)(4-x)}=2,(5+x)(4-x)=8$$

解之,得 $x_1=3,x_2=-4$.

5 用于解方程组

例6 (1998年"希望杯"数学邀请赛初二年级试题) 在方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^3+y^3+z^3=-36\end{cases}$ 中,x,y,z 是互不相等的整数,那么此方程组的解的组数为( ).

A.6 B.3 C.多于6 D.少于3

解 因为 $x+y+z=0,x^3+y^3+z^3=-36$,所以

$$x^3+y^3+z^3=3xyz=-36\Rightarrow xyz=-12$$

所以互不相等的整数 x,y,z 中有两个正数、一个负数,且其和为0.

所以原方程组的整数解为(1,3,-4),(3,1,-4),(1,-4,3),(-4,1,3),(3,-4,1),(-4,3,1).选A.

心得 体会 拓广 疑问

6 用于证明等式

例 7 (1991 年南京市初二数学竞赛试题)已知 $x = \sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}} - \sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$. 求证: $x^3+3bx=2a$.

证明 由已知,得

$$x-\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}=0$$

所以

$$x^3+\left(-\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}\right)^3=$$
$$3\cdot x\cdot\left(-\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}\right)$$

即

$$x^3-2a=-3bx$$

所以

$$x^3+3bx=2a$$

7 用于求取值范围

例 8 (1992 年太原市初中数学竞赛试题)设实数 x,y 满足 $x^3+y^3=a^3$ $(a>0)$, 求 $x+y$ 的取值范围.

解 因为 $x^3+y^3=a^3(a>0)$,所以

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)>0$$

所以

$$(x+y)\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]>0$$

由 x,y 不同时为 0,可知 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0$,所以 $x+y>0$.

设 $x+y=t$,则 $x+y-t=0$,所以

$$x^3+y^3+(-t)^3=3xy\cdot(-t)$$

因为

$$x^3+y^3=a^3, y=t-x$$

所以

$$a^3+(-t)^3=3x(t-x)\cdot(-t)$$

整理,得

$$3tx^2-3t^2x+t^3-a^3=0$$

因为 x 是实数,所以 $\Delta\geqslant 0$,即

$$(-3t^2)^2-4\cdot 3t\cdot(t^3-a^3)\geqslant 0$$

解得 $t\leqslant\sqrt[3]{4}a$,即 $x+y\leqslant\sqrt[3]{4}a$. 所以

$$0<x+y\leqslant\sqrt[3]{4}a$$

(朱德云)

心得 体会 拓广 疑问

怎样解"表针对调"问题

有一次著名物理学家爱因斯坦病了,他的朋友出了一个数学问题给他作消遣:

"设表针的位置在12点钟,在这位置如果把时针和分针对调一下,它们所指的位置还是合理的,但是在别的时候,例如在6点钟,两针对调就成了笑话,这种位置是不可能的:当时针指12的时候,分针决不会指6.因此引起这个问题:表针在什么位置的时候两针可以对调,使得新位置仍能指示实际上可能的时刻?"

爱因斯坦笑着回答:"是的,这对病在床上的人的确是个很好的问题,够有趣味而又不太容易.只是恐怕消磨不了多少时间,我已经快要解出来了."

这个问题他到底是怎样解的呢?

解 以圆周的$\frac{1}{60}$作为单位来度量表针在表面上从12点起所走的距离.

假设所求的表针的位置的一种情况是,时针从12起走过x个刻度,分针走过y个刻度,既然时针每12 h(小时)走过60个刻度,就是每小时走过5个刻度,那么它走过x个刻度要$\frac{x}{5}$ h,换句话说,在表指出12点以后,过了$\frac{x}{5}$ h.分针走过y刻度要y min(分钟),也就是$\frac{y}{60}$ h.换句话说,分针是在$\frac{y}{60}$ h之前经过12的,或者说,那是两针在12那里重合之后又过了$\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{60}\right)$ h.这个数是一个整数(从0到11),因为它表示12点之后又过去几个整小时.

当两针对调了位置,我们用同样的方法可以求出,从12点到表针所指示的时间经过了$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$个整小时,这个数仍然是整数(从0到11).

我们得到联立方程组

$$\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m\\ \frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n\end{cases}$$

这里m和n是从0到11的整数.从这个方程组得出

$$\begin{cases}x=\frac{60(12m+n)}{143}\\ y=\frac{60(12n+m)}{143}\end{cases}$$

用从0到11的各数去代m和n,就能确定全部所求的表针的位置.既然m的12个数中每一个都可以和n的12个数中的每一个组合起来,好像应该有$12\times12=144$(个)解.可是事实上只有143个,因为在$m=0,n=0$和$m=11,n=11$的时候,表针是同一个位置.

在$m=11,n=11$时我们有$x=60,y=60$,就是说指的是12点,这和$m=0,n=0$所指的一样.

不妨看两个例子:

第一例:$m=1,n=1$.

心得 体会 拓广 疑问

$x = \frac{60 \times 13}{143} = 5\frac{5}{11}$，$y = 5\frac{5}{11}$，就是说所指的时间是1点$5\frac{5}{11}$分，这时两针重合，它们当然可以彼此对调（所有其他两针重合的情形也都是这样）.

第二例：$m = 8$，$n = 5$.则有

$$x = \frac{60(5 + 12 \times 8)}{143} \approx 42.38$$

$$y = \frac{60(8 + 12 \times 5)}{143} \approx 28.53$$

相应的时刻是8点28.53分和5点42.38分.

应当说，爱因斯坦的这个解法非常巧妙且不太容易想到.下面我们用算角的方法来求出它的解.

另解 由时针、分针的特性可知，分针的转动速度应是时针转动速度的12倍.故当时针以12点为起点转动的角度为β时分针以12点为起点转动的角度必为12β；而当时针转动角度为12β（即转到上述分针所在位置）时，分针转动角度理应为144β.从条件可知，此时分针所处位置与上述时针所处的位置重合.如此，两者必相差周角的整数倍数，即$144\beta - \beta = k \cdot 360$.故$\beta = \frac{k \cdot 360}{143}$，显然$k$只需取0，1，2，…，142即可，故而本题的解有143个.为了要找出表面上所有这些允许表针对调的点，我们得把表面全周以12点为起点分为143等分，这样我们得到143个所求的点.在其他点上，表针位置的对调是不可能的.

（皇甫荣）

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com