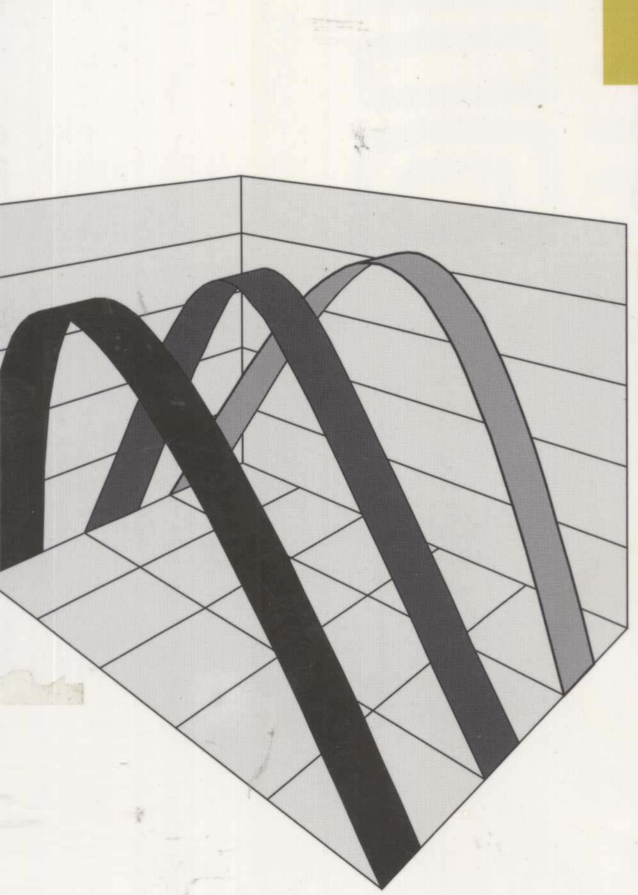
高等数学（一）

王淑云　主编



全国各类成人高考复习指导用书

辽宁人民出版社

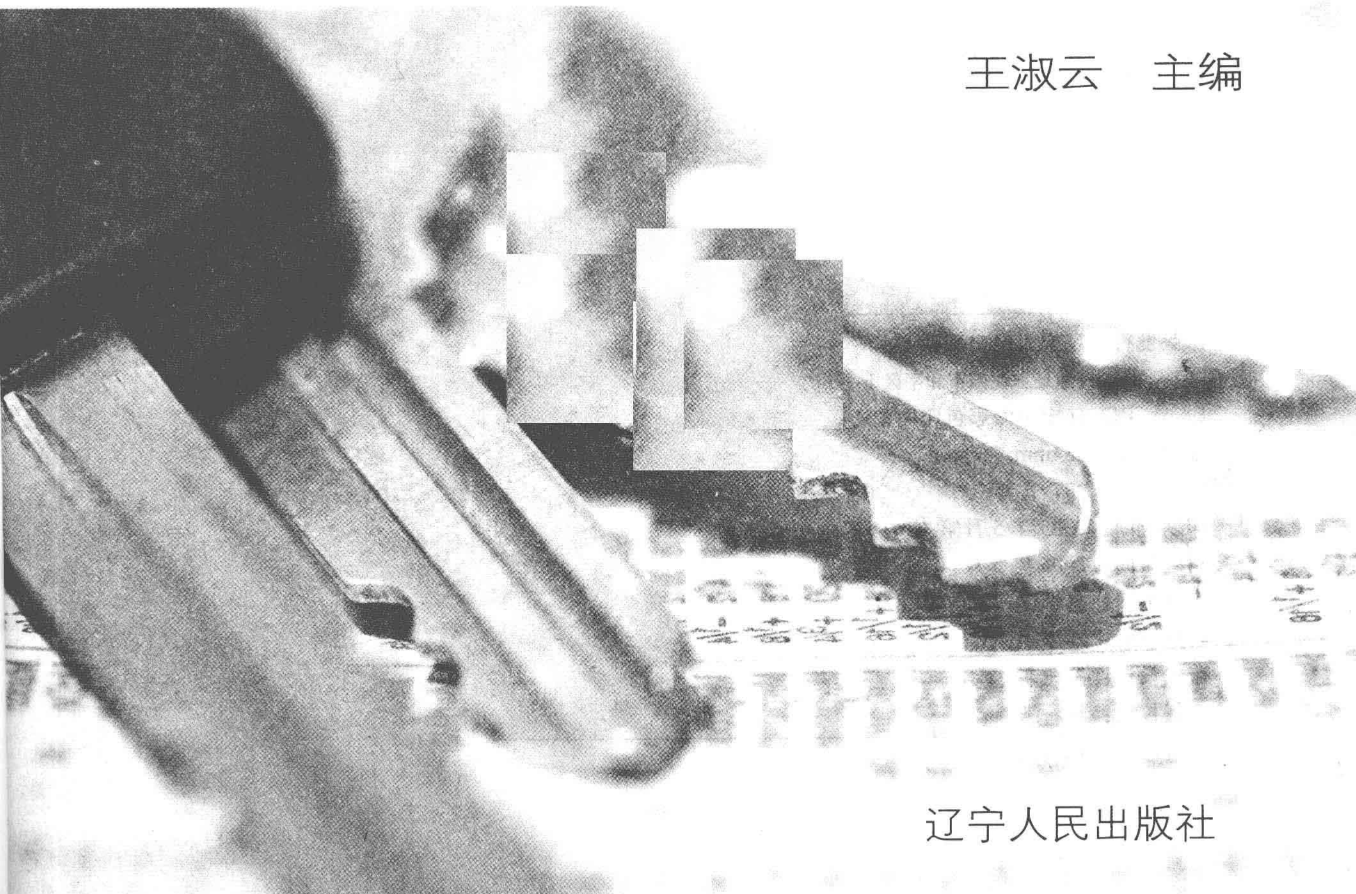
专科起点升本科

全国各类成人高考复习指导用书 专科起点升本科

一

高等数学

王淑云　主编



辽宁人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学·一/王淑云主编. 一沈阳：辽宁人民出版社，2005.5
全国各类成人高考复习指导用书.专科起点升本科
ISBN 7-205-05899-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 026170 号

出版发行：辽宁人民出版社
（地址：沈阳市和平区十一纬路 25 号　邮编：110003）
印　　刷：辽宁星海彩色印刷中心
幅面尺寸：184mm×260mm
字　　数：237 千字
印刷时间：2005 年 5 月第 1 次印刷
出版时间：2005 年 5 月第 1 版
责任编辑：赵学良　成咏梅
封面设计：刘冰宇
版式设计：王珏菲
责任校对：君　满

定　　价：20.00 元

主　　编　王淑云
副 主 编　马振生　付　瑶
参编人员　王彩玲　张淑婷　张君施　关天月
　　　　　　宋东哲　朱庆来　阚君满

使用说明

《高等数学（一）》是理工农医类专科起点升本科的必考科目之一，为了满足广大考生备考的需要，我们依据2005年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲〈专科起点升本科〉》编写此书，以供广大考生备考之用。

编写过程中，我们始终遵循以下原则：

1．贴近考生、贴近考试；

2．重点突出、简明扼要、便于自学。

本书正文共分九个单元，每个单元设知识精讲、重点难点解析、真题选讲和基础训练四部分。知识精讲，是将本单元要考的知识点，包括概念、理论、公式、方法提炼出来，做到简明易懂，体现了重点突出、简明扼要的原则。重点难点解析，指出了本单元的重点和难点，其中，重点是指考试常考之点，难点是指易混易错之点。真题选讲，我们将近年考题选做例题，一方面进行基础知识复习，另一方面使考生了解常考题型和考试难易程度，体现贴近考生、贴近考试的原则。基础训练是考虑到选讲的题目有一定的局限性，我们根据多年的辅导经验积累，精心编制了基础训练一、二、三，希望能够覆盖考点。基础训练后设参考答案，为考生复习提供方便。

考生阅读此书时，一定要先读后练或边读边练。所谓读，就是要读懂知识精讲和考题选讲；所谓练，就是要做三个基础训练。本书最后按照大纲要求的考试题型、分值比例和难易程度精心编写了五套模拟题，在加大对知识点的覆盖面的同时，突出考试重点、难点、热点，期望有一定的预见性和前瞻性。

本书还附录了《大纲》中所附的“考试形式、试卷结构及样题”，以供考生参考。

由于时间仓促，难免有所疏漏，诚恳地希望广大读者提出宝贵意见。

目　录

第一单元

极限与连续

知识结构

- **极限与连续**
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - 左、右极限
    - 性质
      - 唯一性
      - 有界性
      - 四则运算性质
    - 存在准则
      - 单调有界原理
      - 夹逼准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
      - 无穷小
      - 无穷大
    - 运算性质
      - 有限无穷小之和为无穷小
      - 有限无穷小之积是无穷小
      - 有界函数与无穷小之积是无穷小
    - 无穷小比较
      - 高阶无穷小
      - 同阶无穷小
      - 等价无穷小

- 连续
  - 定义
    - 函数在一点连续定义
    - 连续函数
    - 左、右连续
  - 连续函数运算
    - 连续函数的和、差、积、商的连续性
    - 连续函数的复合函数是连续函数
    - 初等函数的连续性
  - 闭区间连续函数性质
    - 最值性
    - 有界性
    - 介值性
    - 零值性

知识精讲

数列极限

1. 数列极限定义

对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大（$n\to\infty$）时，x_n 无限趋于常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，数列 $\{x_n\}$ 有极限 A，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

如果数列 $\{x_n\}$ 无极限，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

2. 数列极限的性质

(1)（惟一性）数列 $\{x_n\}$ 有极限，则极限是惟一.

(2)（有界性）有极限数列必有界，但反之不成立. 有界是数列收敛的必要条件，但非充分条件.

3. 数列极限的四则运算

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

4. 数列极限存在准则

(1) 单调有界原理，单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：设有数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，如果满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限

1. $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

(1) $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义. 如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无

限趋于常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

（2）$x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ a)$ 上有定义，如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$，则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（3）$x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ a)\cup(a,\ +\infty)$ 有定义. 如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$ 时）$f(x)\to A$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2. $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某一空心邻域有定义. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A. 则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3. 左、右极限定义

若当 x 从 x_0 左侧趋于 $x_0(x\to x_0^-)$ 时，$f(x)$ 无限趋近常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

若点 x 从 x_0 右侧趋于 $x_0(x\to x_0^+)$ 时，$f(x)$ 无限趋近 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 外的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

在点 x_0 的左极限也用符号 $f(x_0-0)$ 表示，在 x_0 的右极限也用 $f(x_0+0)$ 表示，即

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

4. 函数极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=A$ 且 $f(x_0+0)=A$ 即左右极限存在且相等.

5. 函数极限存在的夹逼准则

设有函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 某人一空心邻域有定义. 如果（1）$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. 则，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

6. 函数极限的四则运算

设 $\lim\limits_{x\to\gamma}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\gamma}g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

$\lim\limits_{x\to\gamma}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to\gamma}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\gamma}g(x)=AB$.

$$\lim_{x\to\gamma}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\gamma}f(x)}{\lim\limits_{x\to\gamma}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0).$$

其中 γ 代表 x_0，x_0^-，x_0^+，$-\infty$，$+\infty$，∞ 六种情况之一.

7. 两个重要极限公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量定义

若当 $x\to\gamma$ 时，$f(x)\to 0$，则 $f(x)$ 为 $x\to\gamma$ 时的无穷小量.

2. 无穷小的运算

(1) 有限个无穷小之和是无穷小.

(2) 有限个无穷小之积是无穷小.

(3) 有界函数与无穷之积是无穷小.

3. 无穷小的比较

设 γ 代表 x_0，x_0^-，x_0^+，$-\infty$，$+\infty$，∞ 六种情况之一.

设 $x\to\gamma$ 时，α，β 均为无穷小，那么

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 较高价无穷小. 记为 $\alpha=0$ (β).

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=c$ $(c\neq 0)$，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

4. 等价无穷小代换

设 $x\to\gamma$ 时，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 则

$\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to\gamma}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

5. 无穷大定义

若当 $x\to\gamma$ 时，$f(x)$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为 $x\to\gamma$ 时的无穷大量，记为 $\lim f(x)=\infty$. 这种写法只是刻化变化趋势，不是极限.

6. 无穷大与无穷小关系

若 α 是当 $x\to\gamma$ 时的无穷小，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 是 $x\to\gamma$ 时无穷大；若 $x\to\gamma$ 时，α 为无穷大，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 是 $x\to\gamma$ 时的无穷小.

函数连续性

1. 连续定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，如果自变量增量 $\Delta x\to 0$ 时，相应函数 y 的增量 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 连续函数

设 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一点都连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内连续，也称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是连续函数.

3. 左、右连续

若 $f(x_0-0)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续，若 $f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续.

$f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左连续且右连续.

4. 函数间断点及其分类

如果 $f(x)$ 有下列三种情况之一

(1) 在点 x_0 无定义

(2) 在点 x_0 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

则称点 x_0 是函数的间断点.

如果在间断点 x_0 的左、右极存在，则称 x_0 为第一类间断点，包括可去间断和跳跃间断点.

第一类间断点以外的间断点称为第二类间断点，包括无穷间断点和振荡间断点.

5. 连续函数的运算

(1) 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍是连续的.

(2) 连续函数构成的复合函数也是连续函数.

(3) 严格单调连续函数，其反函数也为严格单调连续的.

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.

(2) 设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 即存在正数 M，使对一切 $x\in[a, b]$，均有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 c，在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使有 $f(\xi)=c$.

(4) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使有 $f(\xi)=0$.

重点与难点解析

本单元重点

极限运算和函数连续性概念.

求极限是必考题型之一，因此，考生在复习时必须重视和掌握求极限的方法：

1. 初等变形及四则运算法则.

2. 两个重要极限公式.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

3. 有界函数乘无穷小是无穷小.

4. 等价无穷小代换.

5. 函数连续性定义，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

6. 夹逼准则

7. 洛必达法则（在第二单元复习）

8. 导数定义（在第二单元复习）

连续是高等数学中的重要概念，也是考核的主要知识点之一. 考生要很好的理解连

续，左、右连续概念. 要掌握判别函数在一点连续的方法，特别是分段函数在分段点处连续性的判别方法. 要掌握函数在一点连续的三要素. ①$f(x)$ 在点 x_0 有定义；②极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不具备三要素之一的点即为间断点.

本单元难点

难点 1. 分段函数在段与段界点处的极限及连续性的判断. 解决好这一问题，一是极限，左、右极限，连续，左右连续概念清楚，二是掌握函数在一点 x_0 处连续的充要条件是左连续且右连续，函数在一点极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等，有些同学对求分段函数分段点处极限，有的时候用左、右极限，有时候不用左右极限，弄不清楚，一般说，当分段点 x_0 处的左、右表达式不同，则用左右极限计算，当分段点处的左、右表达式是同一个，则不必分左、右极限计算. 确定分段函数表达式中的待定参数，有的考生道理说不清楚，不知如何下手. 应当说确定分段函数表达式中的待定参数往往依据分段函数在分段点处的连续性. 连续必左连续，必右连续，必左、右极限存在且相等. 用哪条结论确定呢？取决于参数含在分段点的左边表达式还是右边表达式，一般说未知参数含在分段点 x_0 右边（$x>x_0$）表达式，用右连续确定，即用$f(x_0+0)=f(x_0)$ 来确定，未知参数含分断点左边（$x<x_0$）表达式中，用左连续，即$f(x_0-0)=f(x_0)$ 确定，如果未知参数在分段点左、右表达式都有，则除了用左、右连续外，还有用到左右极限相等. 即$f(x_0-0)=f(x_0+0)$. 要知道几个待定参数就需要几个等式确定.

难点 2. 等价无穷小代换求极限. 首先必须掌握一些等价无穷小，常用的有 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\operatorname{aresin} x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$. 其次必须把握等价无穷小代换的运用原则，（1）必须是$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型极限；（2）分子可用等价无穷小代换，分母可用等价无穷小代换. 如果分子或分母是若干无穷小代数和，则代数和中的无穷小不能用等价无穷小代换. 如下两式，①是正确的，②是错的.

①$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

②$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x^3}=0$.

真题选讲

本单元内容在历年考试试卷中占的分数比例约 10%，14 分~16 分左右，考核题型有选择题、填空题和解答题，以选择题、填空题居多. 考核知识点主要有：两个重要极限、用左、右极限求极限，无穷小的阶，等价无穷小代换以及函数的连续性概念. 新大纲规定极限和连续部分将约占卷面分值的 13%.

例 1：（2001 年）（4 分）设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=e$，则 $k=$______.

分析：本题的关键是对重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 能否正确把握，解题的方法是求出左侧极限结果，令其等于 e，然后解出 k. 左侧极限和重要极限很接近，但有区别，重

要极限二有两个特征：一是它是（1+无穷小）^{无穷大}型. 二是无穷小与无穷大互为倒数，极限为 e，而本题左侧极限具备重要极限二的前一特征 $x\to 0$ 时是（1+无穷小）^{无穷大}型. 但这里的无穷小 $\frac{k}{x}$ 与无穷大 $2x$ 不是互为倒数，极限结果不能得 e. 想办法将无穷小与无穷大变为互为倒数就可用公式.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}\cdot 2k}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{2k}$

$=e^{2k}$

由 $e^{2k}=e$ 得 $2k=1$，$k=\frac{1}{2}$，故应填 $\frac{1}{2}$.

例 2：（2003 年）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{2x^3-4\sin x}$.

分析： 当 $x\to\infty$ 时，$x^3+2\to\infty$，$2x^3-4\sin x\to\infty$

所以是 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型未定式，可分子分母同除以 x^3，然后求极限.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{2x^3-4\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{4}{x^3}\sin x}$（这里的 $\frac{4}{x^3}\sin x$ 当 $x\to\infty$ 时是有界函数 $\sin x$ 乘无穷小 $\frac{4}{x^3}$，极限为零）

$=\frac{1}{2}$

例 3：（2004 年）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=$______.

分析： 这是运用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的典型习题，而这个重要极限公式有两个特征，一是 $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型极限，二是 sin 后面与分母相同，显见所给极限不具备第二个特征. 分子分母乘 3 即可.

解： 应填 3. 因为

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3.$

例 4：（2001 年）点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ e^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的（　　）

A. 连续点　　　　B. 可去间断点

C. 第二类间断点　　　　D. 第一类间断点，但不是可去间断点

分析：确定选择题答案的一般方法有排除法和验证法. 本题要用后者，需通过计算结果验证. 除了需要连续概念清楚之外，还要对间断点分类清楚. 判断一个间断点是什么类型，需要根据极限情况确定. 若在间断点处极限存在，则是第一类间断点的可去间断点，若在间断点处左、右极限存在但不等，则是第一类间断点中的跳跃间断点. 若在间断点处极限是无穷大，则间断点是第二类间断点的无穷间断点.

解：由于在点 $x=0$ 处有

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x=0$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}(e^x-1)=0$$

$$f(0)=e^0-1=0$$

显见，$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，即$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，选择 A.

例 5：（2003 年）$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=($　　$)$

A. e^2　　　　B. e　　　　C. e^{-1}　　　　D. e^{-2}

分析：此极限为（1+无穷小）^{无穷大}型，只是无穷小与无穷大不是互为倒数. 与例 1 是同类极限问题，需用重要极限公式求此极限.

解：$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}$$

$$=\lim_{x\to0}[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}$$

$$=e^{-2}$$

故应选 D.

例 6：（2001 年）函数 $y=\frac{x}{x^2+1}-3$ 的水平渐近线方程为________.

分析：考察曲线 $y=f(x)$ 是否有水平渐近线或垂直渐近线的依据是：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 是水平渐近线，若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则 $x=a$ 是垂直渐近线.

解：由于$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-3\right)=-3$

所以 $y=-3$ 是曲线 $y=\frac{x}{x^2+1}-3$ 的水平渐近线方程，故应填 $y=-3$.

例 7：（2003 年）求$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

分析：这是$\frac{0}{0}$型未定式极限，注意到分母有零因子（$x-1$）约掉零因子即可求出极限.

解：$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$$

$=\frac{0}{2}=0.$

例 8：（2003 年）求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\ln(1+x)}$

分析：本题是$\left(\frac{0}{0}\right)$型未定式，注意到 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$. 所以可用等价无穷小代换求极限.

解：由于 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$=1+1=2.$

单元基础训练一及参考答案

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}=$(　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. ∞

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=$(　　)

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. $\frac{1}{2}$

3. 设$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是（　　）

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. 不存在

4. 函数$f(x)$ 在点 x_0 处左右极限都存在且相等是它在该点处有极限的（　　）

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

5. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中与 x 等价的无穷小量是（　　）

A. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $2\sin x$　　C. $\ln(1+x)$　　D. $\ln(1+x^2)$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=$(　　)

A. 1　　B. 0　　C. −1　　D. 不存在

7. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{kn}=e$，则 $k=$(　　)