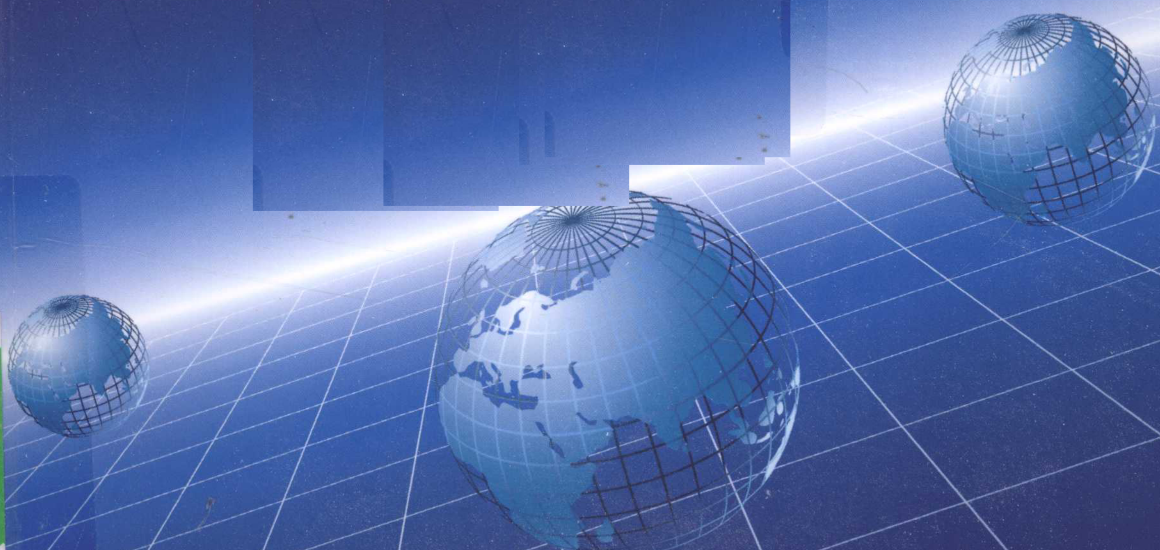
自然边界元法在力学中的应用

NATURAL BOUNDARY ELEMENT METHOD IN MECHANICS

◎ 彭维红　董正筑　著

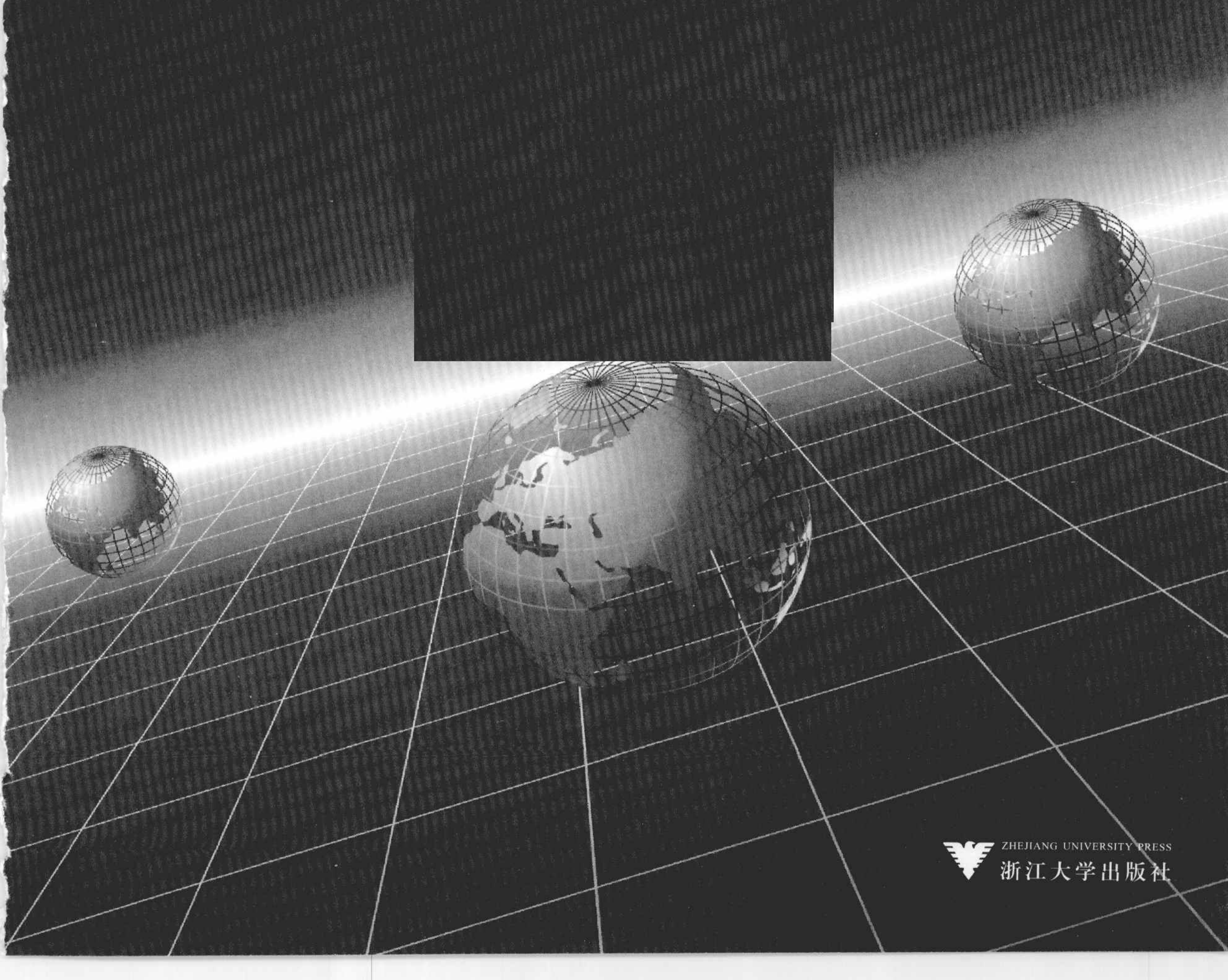


ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

自然边界元法在力学中的应用

NATURAL BOUNDARY ELEMENT METHOD IN MECHANICS

◎ 彭维红　董正筑 著



[redacted]

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书系统探讨了自然边界元法在力学中的应用，内容包括：自然边界元法在平面恒定热传导问题中的应用，自然边界元法在有源汇 Darcy 渗流、多孔渗透注浆中的应用，自然边界元法在半平面弹性问题中的应用，自然边界元法在薄板弯曲问题中的应用，以及自然边界元法在 Stokes 流、Dary-Stokes 耦合问题中的应用等。

本书可供学习和从事计算力学、科学和工程数值分析等领域的研究生、大学高年级学生、大学教师及科研工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

自然边界元法在力学中的应用／彭维红，董正筑著．—杭州：浙江大学出版社，2010.9

ISBN 978-7-308-07971-6

Ⅰ．①自… Ⅱ．①彭… ②董… Ⅲ．①边界元法—应用—力学 Ⅵ．①03

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 181926 号

自然边界元法在力学中的应用

彭维红　董正筑　著

责任编辑　王　波
封面设计　俞亚彤
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州好友排版工作室
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　11.75
字　　数　217 千
版 印 次　2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07971-6
定　　价　28.00 元

序

科学与工程计算中的许多问题可以归结为数值求解偏微分方程，有限元法及有限差分法就是数值求解偏微分方程的标准方法。这些方法通常适于求解有界区域内的偏微分方程问题。但许多实际计算问题涉及无界区域，而对无界区域问题，仅应用上述方法必然遇到本质性的困难，也就是说，即使付出很大的代价，往往也难以获得满意的计算结果。于是，为了有效地数值求解无界区域上的偏微分方程及其他一些有奇异性的问题，各类边界元与人工边界法便应运而生。

我国已故著名数学家、我的老师冯康先生(1920—1993)早在20世纪70年代后期，就从“同一物理问题可以有不同的数学形式，它们在理论上等价，但在实践中未必等效”这一著名观点出发，深刻地总结了有限元法对有界区域问题成功求解的原因，进而探索无界区域问题的更适宜的数学形式并发展相应的计算方法。他于1980年发表了“论微分与积分方程以及有限与无限元”的短文，提出了正则边界归化的思想，又在1982年与我联名在中法有限元会议上发表了论文“椭圆边值问题的正则积分方程及其数值解”，系统论述了这一思想，推导出一系列超奇异的边界积分方程。应用我提出的积分核级数展开等方法，这些超奇异积分方程的数值求解得以实现。在随后的1983年国际数学家大会上，冯康院士做了题为“有限元方法与自然边界归化”的45分钟邀请报告，将该类边界元法定名为自然边界元法。

在冯康先生的影响下，我和清华大学的韩厚德教授30年来在这一方向做了大量的工作，系统发展了自然边界元和内容更为广泛的人工边界法。我的专著《自然边界元方法的数学理论》在1993年由科学出版社出版，英文专著 *Natural Boundary Integral Method And Its Applications* 则于2002年

由 Kluwer Academic Publishers 出版。这两本书是自然边界元法的系统总结。2008 年我和韩教授联合申报的研究成果“人工边界方法与偏微分方程数值解”获得了国家自然科学二等奖。随后韩教授的《人工边界方法》一书也于 2009 年在清华大学出版社出版。

边界归化的思想实际上早在 19 世纪就已出现，但真正应用于数值计算却是从 20 世纪 60 年代开始的。到 70 年代以后，这类方法始被称为边界元法。当时国际流行的边界元法包括直接法和间接法两大类。中国学者首创的自然边界元法则与这些方法完全不同，有很多独特的优点。它保持了原问题的基本特性，可以与有限元法自然直接地耦合。1989 年美国著名学者 J. B. Keller等也致力于研究这一方法，他们称之为准确的人工边界法，或 Dirichlet to Neumann 方法（DTN 法）。尽管他们强调 DTN 法是他们“在西方独立发展的”，但还是在公开论著中承认了该方法“类似于”中国学者更早提出的自然边界元与有限元耦合法。当然，他们的参与和推动使得该方法在国际上获得了更迅速的发展和更广泛的应用。

中国矿业大学力学系的董正筑教授是我在 1986 年认识的，当时我们都在德国斯图加特大学访问工作。回国后我们曾多次互访并有一些合作论文发表。他对自然边界元法表现出极大的兴趣，以至后来致力于该方法在力学中的应用研究近二十年。董教授和他的研究组在这一研究方向已发表了大量论文，也培养了很多博士。我曾评审过他们的学位论文，也主持过其中几位的博士论文答辩会。本书第一作者彭维红博士正是这些学生中的佼佼者。现在彭博士和她的导师董正筑教授系统总结了他们多年来的研究成果，以《自然边界元法在力学中的应用》为题联名撰写了本书，并发来书稿请我作序，我深感荣幸。他们取得的大量研究成果说明了自然边界元法有广泛的应用前景，特别在力学中已经有了很多应用。因此，我非常乐意看到本书将在近期出版，并欣然为之作序。

余德浩

中国科学院数学与系统科学研究院

计算数学与科学工程计算研究所

2010 年 7 月于北京

前言

自然边界元法是由我国学者冯康和余德浩首先提出并系统发展的一种边界元法，特别适用于无界区域偏微分方程边值问题的求解。该方法作为一种新型的数值计算方法，由于其独特的优势，引起了国内外同行的广泛关注，获得了迅速发展和广泛应用。该方法后来在国际上被称为准确的人工边界法或 DTN 方法。自然边界元源于边界元法，它继承了一般边界元相对于有限元的优点：将所处理问题的维数降低一维，只需对边界进行单元剖分，只要求出边界节点上的解函数值就可以计算区域内任意点的解函数值，这对于无界区域上的问题特别有意义。同时自然边界元方法还有独立于一般边界元法的优点，即：方程形式唯一、计算量小、能量泛函保持不变。

自然边界元法在适用区域及适用介质及材料上也有一定的局限性，但是这些问题可以通过耦合法来弥补。自然边界元与有限元的耦合是基于同一变分原理的自然而直接的耦合，这种耦合综合了自然边界元方法与经典有限元方法的优点，既克服了自然边界元方法对区域的局限性，又使经典有限元方法能适用于无界区域及裂缝区域等。

当前，自然边界元法在科学、工程及教育领域中的应用普及程度还不及有限元法和一般边界元法。本书在总结前人及作者们研究工作的基础上，详细讨论了自然边界元法在力学中的应用。本书的读者对象主要是学习和从事计算力学、科学和工程数值分析等领域的研究生、大学高年级学生、大学教师及科研工程技术人员等。

全书共分 8 章。第 1 章主要介绍了自然边界元方法的理论基础及原理；第 2 章探讨了自然边界元法在有源汇平面稳态热传导问题中的应用，并用以研究竖井井筒围岩的冻结过程；第 3 章探讨了自然边界元法在有源汇 Darcy

渗流问题中的应用，并用以研究多孔渗透注浆理论；第4章探讨了自然边界元方法在半平面体弹性问题中的应用，并用以研究煤体上的支承压力分布；第5章探讨了自然边界元方法在薄板弯曲问题中的应用，并用以研究煤柱压力问题；第6章探讨了自然边界元法在上半平面Stokes流问题中的应用，并用以研究半空间中孔口出流问题；第7章探讨了自然边界元法在圆域Stokes流问题中的应用，主要研究了Stokes流的Dirichlet边值问题、Neumann边值问题以及混合边值问题；第8章探讨了自然边界元法在Darcy-Stokes耦合问题中的应用，主要研究了自然边界元与有限差分的耦合法。虽然所示内容尚不足以代表自然边界元技术全面应用于力学的各个领域，但也从几个侧面反映了这一方法工程应用的广泛性。本书的探索旨在促进该方法在力学等工程中的应用，进一步促进自然边界元法的发展和普及，并实现工程应用价值。

本书系国家自然科学基金资助项目研究成果，得到了青年科学基金项目“基于Darcy-Stokes耦合模型的多孔渗透注浆理论研究”（项目编号：50909093）的资助；本书同时还得到了国家重点基础研究发展计划（973计划）“煤矿突水机理与防治基础理论研究”（项目编号：2007CB209400）以及中国矿业大学流体机械及工程学科建设经费（项目编号：080704）的支持。本书在中国科学院余德浩教授的鼓励与帮助下，才得以早日修改完成。在本书的撰写过程中，还得到李顺才博士、曹国华博士、赵慧明博士、刘俊硕士的大力支持，谨此一并致谢。本书虽数易其稿，多次修改整理，但由于作者水平有限，疏漏和失误之处在所难免，恳请广大同行专家与读者批评指正。

作　者

2010年7月

目 录

第1章 绪　　论

1.1 概　　述

偏微分方程是在自然科学和工程技术的众多分支中经常出现的数学形式，它反映相关问题的重要的物理量关于时间和空间变量的变化规律或这些物理量之间的制约关系。例如连续介质力学、电磁学、量子力学的基本方程，都是偏微分方程[1]。工程上遇到的许多问题也常被抽象为某种数学问题，归结为偏微分方程和一定边界条件来处理。求解这些数学问题不仅对于认识自然界基本规律是非常重要的，而且对于预测自然现象的变化和进行各种工程设计也有着重要的作用。由于需要求解的数学问题多样而复杂，所以促进着相关数学方法的不断发展，并从中引进许多有力的解决问题的工具。所以，偏微分方程正是纯粹数学的许多分支和自然科学众多领域间的一个桥梁。它既有悠久的历史，又不断地补充它的对象、内容和方法，不断地产生需要解决的新课题和提出解决问题的新方法。

随着计算机科学和技术的不断进步，偏微分方程理论及其应用无论在广度上，还是在深度上均得到了高速发展。由于在绝大多数情况下根本不可能直接寻求偏微分方程的解析解，必须发展数值方法，这就促进了有限元法、边界元法等各种计算方法的飞速发展。本书所介绍的自然边界元法便是由我国学者冯康和余德浩首先提出并系统发展的一种边界元法，特别适于求解无界区域偏微分方程边值问题。

自然边界元法的基本思想是：由格林公式和格林函数出发，应用格林函数法、复变函数法或 Fourier 级数法可将一些典型的微分方程 Dirichlet 边值问题归化为所研究区域上的 Poisson 积分公式，并将其 Neumann 边值问题归化为边界上的超奇异积分方程：前者直接在边界上进行积分运算，后者需要在边界上离散化求解。近三十年来，该方法作为一种新型的数值计算方法，由于其独特的优势，引起了国内外同行的广泛关注，获得了迅速发展和广泛应用。这一方法后来在国际上被称为准确的人工边界法或 DTN 方法。

为了便于阐述偏微分方程的自然边界元法及其应用[2]，下面首先简要介绍自然边界元方法的理论基础。

1.2 自然边界元方法的理论基础

1.2.1 偏微分方程理论基础

1.2.1.1 基本概念和定义

当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外还含有未知函数的一个或多个偏导数时，称为偏微分方程。一般说来，它可以写成包含几个自变量 x，y，…和这些变量的未知函数 u 及其偏导数 $u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ 的方程的形式

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots)=0 \tag{1-1}$$

式中，未知函数的下标表示求偏导数运算，如

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

这里方程(1-1)是在自变量 $x, y, \cdots$ 的 n 维空间 R^n 中的一个适当的区域 D 内进行考察的。在 D 内恒满足方程(1-1)的函数 $u=u(x, y, \cdots)$ 称为偏微分方程(1-1)的经典解或简称解。从这些可能的解中，往往还需要选出一个满足某些合适的附加条件的特解来。

1.2.1.2 偏微分方程的阶，线性、拟线性与非线性方程

出现在方程中的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶数。考虑偏微分方程(1-2)～(1-8)如下所示，式(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-6)及 1-8)是二阶方程，式(1-5)是三阶方程，式(1-7)是一阶方程。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x, y, z, t) \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x, y, z, t) \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x, y, z, t) \tag{1-4}$$

$$u_t+buu_x=u_{xxx} \tag{1-5}$$

$$u_t=u_{xx}+f(u) \tag{1-6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2-u=0 \tag{1-7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1-8}$$

如果一个偏微分方程对于未知函数及其所有的偏导数是线性的，则称为线性方程。如式(1-2)、(1-3)、(1-4)及(1-8)都是二阶线性方程。一般地，n 个自变量的二阶线性方程可写为下列形式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f \tag{1-9}$$

这里 a_{ij}，b_i，c，f 都是 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的已知函数。不失一般性，可以假设 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，称为方程(1-9)的自由项。如果 $f=0$，则方程(1-9)称为齐次的，否则称为非齐次的。

如果方程仅对未知函数的所有最高阶导数是线性的，则称为拟线性方程。如式(1-5)及(1-6)是拟线性方程。

如果方程对未知函数的最高阶导数不是线性的，则称为非线性方程。如式(1-7)是一阶非线性方程。

1.2.1.3 定解条件

数学物理方程一般是指描述物理过程的微分方程，有时也包括积分方程。力学中研究的许多问题都可以归结为数理方程，下面列出一些与自然边界元方法有密切联系的方程。其中∇^2表示

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(1)拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0$$

(2)泊松方程

$$\nabla^2 u=f$$

(3)重调和方程

$$\nabla^4 u=f$$

(4)Stokes 方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta \boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,p=0 \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \end{cases}$$

上述方程往往可以描述多种物理过程，如拉普拉斯方程可以描述稳态电磁场中的电位分布、磁位分布，也可以描述稳定热传导过程中的温度场，还可以描述弹性扭转和一些流体力学问题。即使同一过程，边界条件不同，其解答也不同。这就说明了方程本身只表现出同一类现象中的共性，只有方程还不能决定具体的物理过程，方程加上初始条件和边界条件才能确定某一特指的物理过程。

初始条件和边界条件合称为定解条件。

通常一个 n 阶常微分方程的通解是含有 n 个独立的任意常数的函数族。对于偏微分方程我们来考察如下的例子。

考虑二阶线性方程

$$u_{xy}=0$$

若固定 x，方程两端关于 y 积分得

$$u_x=f(x)$$

式中 $f(x)$ 是 x 的任意函数。再固定 y，将上式两端关于 x 积分，即得方程的解。

$$u(x,y)=g(x)+h(y)$$

式中 $g(x)$ 与 $h(y)$ 是所含变量的任意可微函数。

这个例子说明，一个偏微分方程的解可能是很多的，并且与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比，它的自由度往往更大。这样的解称为偏微分方程的通解。但是，只有极少数简单的偏微分方程容易求出它的通解。

实际问题要求的是偏微分方程在某些特定条件下的解，这些附加在未知函数上的特定条件称为定解条件。寻求方程满足定解条件的解的问题称为定解问题，例如

$$\begin{cases} T_t-T_{xx}=0 & (0<x<l,t>0) \\ T(x,0)=\sin x & (0\leqslant x\leqslant l) \\ T(0,t)=0 & (t\geqslant 0) \\ T(l,t)=0 & (t\geqslant 0) \end{cases}$$

是由一个方程和三个附加条件构成的定解问题。方程组中第 1 式刻划了长为 l 且两端绝热的均匀杆的热传导过程，杆上的点 x 在时刻 t 的温度 $T(x,t)$ 满足此方程；方程组中的第 2 式称为初始条件，它描述了初始时刻(设为 $t=0$)的温度分布；而方程组中的第 3 式和第 4 式表示了在杆的两端点 $x=0,x=1$ 的温度变化规律，称为边界条件。这种带有初始条件和边界条件的定解问题称为初—边值问题或混合问题，只含初始条件的定解问题称为初值问题或柯西(Cauchy)问题，只含边界条件的定解问题称为边值问题。

以三维稳定热传导为例，边界条件的提法可分为三种，分别称为第一、第二、第三边界条件。第一边界条件表示为

$$u(x,y,z)=u_0(x,y,z)$$

它表示在物体与外界的表面上，其温度分布用已知函数 $u_0(x,y,z)$ 表示。第二边界条件表示为

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{n}=q_0(x,y,z)$$

式中 n 表示边界的法向。第三类边界条件可表示为

$$k\frac{\partial u(x,y,z)}{n}+hu(x,y,z)=hu_1(x,y,z)$$

有时在不同的边界上分别给出不同的边界条件,这就是"混合边值问题",这种情况在工程上经常遇到。

在指定的定解条件下,求微分方程精确解析解的问题已经有了比较完整的理论,但是真正能求出解析解的问题却很少,只是在一些特殊情况下才有可能。由于实际的需要,必须用数值法求解。有限差分法、有限元法、边界元法和自然边界元法是最重要的数值法。电子计算机的发展,为数值解法创造了有利的条件。

1.2.1.4 适定性

在解决实际问题中,通常需要求一个解,它不仅要满足微分方程,而且还要满足某些附加条件,例如初始条件或边值条件。因此,对与偏微分方程有关的物理问题,我们必须考察给出方程的合理性,同时要考虑对附加条件提法的要求。这样,就需要研究偏微分方程定解问题在数学上的适定性。

1920 年,阿达玛(Hadamard)着重指出,只有在一定的意义下偏微分方程初值问题或边值问题才是适定的(well-posed)。这就是解必须存在、唯一、并且连续依赖于数据(连续性)。如果发现一个具有物理来源的数学问题是不适定的,那么,这往往表明它的表述是不正确的。

第一,解的存在性问题是研究在一定的定解条件下,方程的解是否存在。如果从物理意义来看,对于合理地提出的问题,解的存在性似乎是不成问题的,因为自然现象本身就给出了这问题的解答(例如速度场、温度场等)。但是,由于对实际问题建立数学模型时,总要经过一些近似或提出一些附加要求。我们只能说定解问题反映了问题,而不能说两者完全等同,因此完全有必要从量的角度来研究解的存在性,以确定归结出的定解问题的合理性,不至于提出过多或不足的要求。此外,存在性的研究往往也同时是一个提供求解方法的过程。

解的存在性的证明是一件极为困难的事,往往由纯粹数学家在代表性的情况下去完成。作为计算力学工作者,总是根据纯粹数学家们的这些工作去对力学问题作出数学表述,并且总希望问题的这种表述是适定的。

第二,解的唯一性问题是研究在已给的定解条件下,问题的解是否只有一个,这表示附加条件与偏微分方程的匹配是否完备。例如,对于 Navier-Stokes (以后简写成 N-S)方程,在固壁面上合理的边界条件是明确的,而远场边界条件的正确选取就有一定的灵活性。又如不可压缩流体的无黏流动,一般情况是一种非标准型的方程,由于实际问题的复杂性,如何给出适定的边界条件就是一个

困难而复杂的问题。通常，边界条件过多在物理上不合理，因而得不到解；边界条件不足将会出现多解。有些问题在物理域中可能存在多解，例如从层流到湍流的过渡区的流动常常会产生这种情况，这样的问题难以从数学上判断其适定性，只能在充分理解物理机理的基础上来进行鉴别。

第三，解的连续性问题是指当定解条件如果稍有变化（扰动），解仍应存在且仍为唯一，这个扰动后的唯一解与扰动前的解应相差无几，当扰动趋于零时，解的改变量也应趋于零，这就是微分问题的连续性。

解的连续性问题的产生也是很自然的，因为我们在研究物理现象时需通过测量，而测量就不免有误差，如果定解条件的细小误差会引起解的重大变化，那么这个定解问题的归结也是缺乏基础的，在数学上无法保证所获得的解是实际上所需的解的近似。相反，如果定解问题满足连续性，那么描述一个具体物理问题的偏微分方程相应的初边值条件稍有出入，我们仍能得到物理问题的正确近似解。

1.2.1.5 二阶线性偏微分方程的分类

考虑两个自变量(x,y)的二阶线性偏微分方程：

$$Lu \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+g\cdot u=f \tag{1-10}$$

式中a、b、c、d、e、f和g都是x和y的已知函数。从下列问题引出上式的特征方程，然后根据特征方程来对方程进行分类[3]。设在$x-y$平面上给定曲线C，如图1-1所示，C的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \tag{1-11}$$

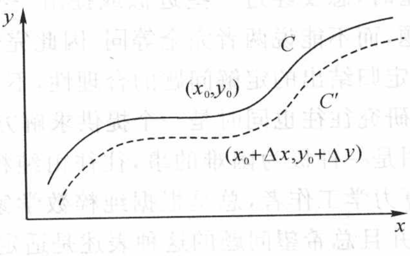


图 1-1 曲线C及邻域C'

若在C上给定$u=u(x,y)=u[\varphi(t),\psi(t)]$，$p=u_x[\varphi(t),\psi(t)]$以及$q=u_y[\varphi(t),\psi(t)]$，且满足相容性条件[3]：

$$\frac{du}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt} \tag{1-12}$$

曲线 C 上的 u、p 和 q 称为 Caucy 数据。为了求邻域 C' 上 $u(x',y')$ 值，利用 Taylor 展开：

$$u(x',y')\approx u(x_0,y_0)+p\Delta x+q\Delta y+\frac{1}{2}u_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2+\frac{1}{2}u_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2+\frac{1}{2}u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+\cdots \tag{1-13}$$

式中，(x_0,y_0) 在 C 上，$(x',y')=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 在 C' 上。为此，至少必须知道 C 上 $u(x,y)$ 的二阶偏导数 u_{xx}、u_{xy} 和 u_{yy}。在 C 上有：

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}=u_{xx}\frac{dx}{dt}+u_{xy}\frac{dy}{dt} \tag{1-14}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dt}=u_{xy}\frac{dx}{dt}+u_{yy}\frac{dy}{dt} \tag{1-15}$$

因为 $u(x,y)$ 是式(1-10)的解，故从式(1-10)～式(1-15)可得决定 u_{xx}、u_{xy} 和 u_{yy} 的线性方程组：

$$u_{xx}\frac{dx}{dt}+u_{xy}\frac{dy}{dt}+u_{yy}\cdot 0=\frac{dp}{dt} \tag{1-16}$$

$$u_{xx}\cdot 0+u_{xy}\frac{dx}{dt}+u_{yy}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{dq}{dt} \tag{1-17}$$

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=f-(dp+eq+gu) \tag{1-18}$$

上述方程的解是否存在，依赖于系数行列式的性质：

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix}=a\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-2b\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{1-19}$$

如果曲线 C 满足 $\Delta\neq 0$，则解存在且唯一。反之，如果 $\Delta=0$，则 Caucy 数据 u、p 和 q 不能任意给定，否则方程组无解。满足 $\Delta=0$，即满足方程

$$a\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-2b\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0 \tag{1-20}$$

的曲线 C 对式(1-10)有重要意义，称之为特征曲线。相应地，式(1-20)称为特征方程。因此在特征曲线上，Caucy 数据 u、p 和 q 不能任意给定，式(1-20)可改写成

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=0 \tag{1-21}$$

于是可解出