高等院校经济管理类数学基础课程教材

GAODENG YUANXIAO JINGJI GUANLILEI
SHUXUE JICHU KECHENG JIAOCAI

微积分

田立平 谢斌 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校经济管理类数学基础课程教材

微 积 分

田立平 谢 斌 编

机 械 工 业 出 版 社

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、微分方程和差分方程初步、定积分、多元函数的微积分学和无穷级数。各章配有循序渐进、难度适当的典型习题，书末附有各章习题的参考答案。

本书内容在不影响本学科的系统性、科学性的前提下，力求通俗简明而又重点突出，可供经济管理类本科各专业使用，也可供高职、高专的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

微积分/田立平，谢斌编. —北京：机械工业出版社，2010.3
高等院校经济管理类数学基础课程教材
ISBN 978-7-111-29929-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①田…②谢… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 035489 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：牛新国 责任编辑：牛新国 版式设计：张世琴
封面设计：路恩中 责任校对：张晓蓉 责任印制：杨 曦
北京双青印刷厂印刷
2010 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 15.25 印张 · 295 千字
0001—3 000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-29929-5
定价：26.00 元

前　言

为全面贯彻落实科学发展观，切实把高等教育的重点放在提高教育质量上，教育部、财政部实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，北京市教育委员会响应教育部的号召，相应实施了“质量工程计划”，其中教材建设是教学质量工程的重要内容。在这样的背景下，数学公共基础系列课程教学团队作为北京市的优秀教学团队，编写一套适合一般高等学校经济管理类各专业的便于教、学的基础数学教材是义不容辞的责任，也是团队成员多年来的心愿。在北京物资学院和信息学院的关心以及机械工业出版社的大力支持下，我们组织有多年教学经验的老教师和富有朝气、知识渊博的青年教师，在团队长期集体备课教案以及学校精品课教案的基础上，编写了这本教材。本教材的内容框架是根据教育部数学与统计学教学指导委员会2007年制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，以及2009年教育部关于硕士研究生入学考试数学三、四合并，针对经济管理类各专业编写的。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、微分方程和差分方程初步、定积分、多元函数的微积分学和无穷级数。

本书在内容处理上注意到经济管理类各专业以及一般高等学校生源的情况，具有如下特点：在不影响本学科的系统性、科学性的前提下，尽量使数学概念、理论与方法易于学生掌握，简化和略去了某些结论冗繁的推导或仅给出直观解释，力求做到通俗简明而又重点突出，条理清晰，层次分明，难点处理得当而又形象直观；使数学文化与数学建模思想在教学内容中渗透，并将作者多年来积累的教学经验和成果适时融入；例题和习题选取不求多但求精典，而且尽可能地将微积分与经济管理领域中的实际问题相结合，与全国硕士生入学统一考试《数学考试大纲》相结合，在例题与习题的难度配置上遵循了循序渐进的原则，突出应用性、实用性；以培养学生分析问题、解决问题和运用数学知识的能力为宗旨。

本书第一至第四章由谢斌老师编写，第五至第八章由田立平教授编写。在本书的编写过程中得到了北京物资学院领导和同仁们的大力支持，特别是得到了数学教研室所有同仁的帮助，是他们给了我们很多有价值的建议，在此表示衷心的感谢！本书由北京市优秀教学团队——数学公共基础系列课程

教学团队项目（项目编号：PHR200907230）支持。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，本书难免会有欠妥和错误之处，恳请专家、学者和读者的批评指正，以便能使本书在教学实践中不断改进和完善。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

函数与极限是微积分最重要的基本概念，函数是微积分研究的对象，极限理论是微积分的理论基础.

第一节　函　　数

一、区间与邻域

1. 区间

定义 1.1　满足不等式 $a<x<b(a<b)$，的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a, b).

类似地，有：闭区间 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，半开区间 $(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$和$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$等，称为有限区间．而区间 $(a, +\infty)$、$[a, +\infty)$、$(-\infty, a)$、$(-\infty, a]$ 称为无限区间.

2. 邻域

定义 1.2　设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为 a 的 δ 邻域，记作

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

a 称为邻域的中心；δ 称为邻域的半径．常又表示为 $U(a)$，简称为 a 的邻域．

去掉中心 a 的数集$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为 a 的 δ 去心邻域，记作

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}.$$

常又表示为 $\mathring{U}(a)$，简称为 a 的去心邻域.

类似地，数集$\{x|0<x-a<\delta\}$称为 a 的右邻域，数集$\{x|-\delta<x-a<0\}$称为 a 的左邻域.

二、函数的概念

1. 变量

我们在研究过程中常常涉及到各种各样的量，其中变化的量称为变量，不变化的量称为常量或常数．函数是考察变量之间关系的重要概念.

例如，球的半径 r 与该球的体积 V：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中 π 是圆周率，是常量.

$\forall r\in[0,\ +\infty)$，都对应一个球的体积 V. r 和 V 都是变量，他们之间的关系用函数来表达.

2. 函数的定义

定义 1.3 设 D 是非空数集，若对 D 中任意数 x，按照某一确定的对应法则 f，总有惟一确定的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作

$$y=f(x),\ (\forall x\in D)$$

简写为"$y=f(x)$"，或称"$f(x)$ 是 x 的函数（值）". 其中数 x 称为自变量，数 y 称为因变量.

数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $f(D)=\{f(x)\,|\,x\in D\}$ 称为函数 f 的值域. 函数的两要素为定义域和对应法则，与变量用何符号表示没有关系.

3. 单值函数与多值函数

在函数 $y=f(x)$ 的定义中，要求对应于 x 值的 y 值是惟一确定的，这种函数也称为单值函数. 如果取消惟一这个要求，即对应于 x 值，可以有两个或两个以上确定的 y 值与之对应，那么函数 $y=f(x)$ 称为多值函数. 例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多（双）值函数.

以后若不特别声明，只讨论单值函数.

4. 函数举例

例 1 取整函数 $y=[x]$，表示 $\forall x\in\mathbf{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数.

如 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0]=0$，$[-\pi]=-4$，（图 1-1）.

例 2 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

例 3 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$，（图 1-2）.

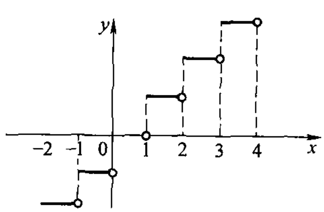

图 1-1

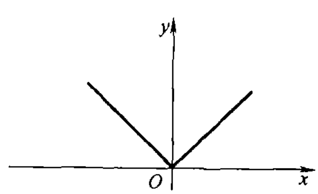

图 1-2

上述几个函数的定义域分成了若干部分，而在不同部分上，函数值用不同的表达式表示，这样的函数称为分段函数.

三、函数的性质

1. 有界性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in A$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 A 有界，否则称 $f(x)$ 在 A 无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，在 $[2,+\infty)$ 上是有界的.

2. 单调性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，若对 $\forall\ x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 A 上严格单调增加（严格单调减少）；若上述不等式改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 A 上单调增加（单调减少）.

例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的. 函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 内是严格单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 内是严格单调增加的. 因此，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 奇偶性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上，若 $\forall x\in A$，有 $-x\in A$，且

$$f(-x)=-f(x)\ (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数（偶函数）. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，函数 $y=x^4+3x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 都是偶函数. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^3$，$y=x\cos x$ 都是奇函数.

4. 周期性

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上，若 $\exists l>0$，使得对于 $\forall x\in A$，有 $x\pm l\in A$，且 $f(x\pm l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是周期函数，l 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

由定义可知，周期不惟一. 若 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $2l$ 也是它的周期，$nl(n\in\mathbf{N})$ 也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小的正周期，通常称之为函数 $f(x)$ 的基本周期，简称为周期.

例如，$y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π. 再如，常函数 $y=1$ 也是周期函数，任意正实数都是它的周期，所以常函数 $y=1$ 没有基本周期.

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

定义 1.8 设函数 $z=f(y)$ 定义在数集 B 上，函数 $y=\varphi(x)$ 定义在数集 A 上，又 $\varphi(A)\cap B\neq\varnothing$. $\forall x\in A$，按照对应关系 φ，对应惟一一个 $y\in B$，若再按照对应关系 f，对应惟一一个 z，即 $\forall x\in A$，可对应惟一一个 z. 于是在 A 上定义了一个函数，表示为 $f\circ\varphi$，称为函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的复合函数，即

$$z=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],\ x\in A.$$

y 称为中间变量.

例如，函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间 $[0,\ +\infty)$，函数 $y=1-x^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. 为使其生成复合函数，必须要求

$$y=1-x^2\geqslant0,\ 即\ -1\leqslant x\leqslant1$$

于是，$\forall x\in[-1,\ 1]$，函数 $y=1-x^2$ 与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z=\sqrt{1-x^2}.$$

又如，三个函数

$$u=\sqrt{z},\qquad z=\ln y,\qquad y=2x+3,$$

生成的复合函数是 $u=\sqrt{\ln(2x+3)}$，　　$x\in[-1,\ +\infty)$.

2. 反函数

定义 1.9 设函数 $y=f(x)$，$x\in I$. 若对任意 $y\in f(I)$，有惟一确定的 $x\in I$ 与之对应，使得 $f(x)=y$，则在 $f(I)$ 上定义了一个函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(I)$$

称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

按照书写习惯，将自变量写成 x，因变量写成 y，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常常被写作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与直接函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（图 1-3）.

定理 1.1 若函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上严格单调增加（严格单调减少），则函数 $y=f(x)$ 存在反函数，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$ 上也严格单调增加（严格单调减少）.

定理中“严格”两字不可忽略. 如单调函数 $y=[x]$ 非严格单调，不存在反函数.

函数是严格单调的仅是存在反函数的充分条件，如函数

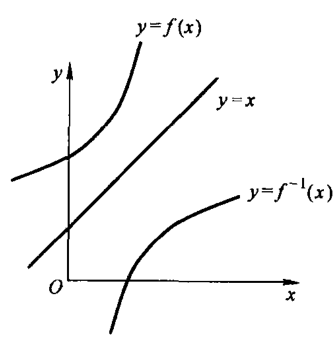

图 1-3

$$y=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间 [-1，1] 上不是单调函数，但它存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2\end{cases}.$$

五、初等函数

1. 基本初等函数

（1）常数函数　$y=c$；

（2）幂函数　$y=x^{\alpha}$；

（3）指数函数　$y=a^{x}$，$(a>0,\ a\neq 1)$. 特例 $y=\mathrm{e}^{x}$；

（4）对数函数　$y=\log_{a}x$，$(a>0,\ a\neq 1)$. 特例 $y=\ln x$；

（5）三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

（6）反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

定义 1.10　由基本初等函数经过有限次的四则运算及复合生成的用一个式子表达的函数称为初等函数.

例如，函数 $y=\sin\left(\ln\sqrt{x^2-1}\right)$ 是一个初等函数，它是由 $y=\sin u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2$，$s=1$ 经过四则运算及复合而得的.

由定义可知，那些不能用一个式子表达的分段函数，都不是初等函数.

习题 1.1

1. 求函数的定义域

（1）$y=\dfrac{x}{\ln(x+2)}$；　　（2）$y=\arcsin\sqrt{x^2-9}$.

2. 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域.

3. 下列几对函数中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是哪一对.

（1）$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；（2）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；（4）$f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$.

4. 某地电话局按如下办法收费. 每月通话次数不超过 30 次或不通话，收费 20 元；若超过部分每次以 0.18 元计算，请列出函数的表达式.

5. 设 $y=f(x)=3x^2-2x-1$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(f(x))$.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ 2, & x=0\\ 1+x, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$ 求函数的定义域，并求函数值 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，写出 $f(x)$ 的定义域及值域，并求$f\left(\frac{1}{2}\right)$和 $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

8. 证明：函数 $y=-x^2+1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调增加，在区间 $[0, +\infty)$ 内单调减少.

9. 证明函数$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$在它的整个定义域内有界.

10. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x\sin x+\cos x$；(2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；(3) $f(x)=2x^4+3x^3+1$.

11. 求函数 $y=\ln(x+2)-3$ 的反函数.

12. 设函数$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

13. 求 $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1\\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的反函数及其定义域.

14. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成

(1) $y=a^{\tan x}$；(2) $y=\ln\arcsin x^2$.

第二节　数列的极限

一、数列

通俗地讲，数列就是一系列数排成的一列（排）.

定义 1.11　数列是定义在自然数集上的函数，记为 $x_n=f(n)$，$n=1, 2, 3\cdots$.

数列的对应值可以按下标从小到大排成一列：x_1，x_2，…，x_n，…，有时也简记为$\{x_n\}$或数列 x_n. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n称为一般项或通项.

例 1　“一尺之棰，日截其半，万世不竭”.——《庄子·天下篇》

这句话说明，长一尺的棒子，每天截去一半，无限制地进行下去，那么剩下部分的长构成一个数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…，通项为$\frac{1}{2^n}$.

例 2　2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，…$\frac{n+1}{n}$，…；1，3，5，…，$2n-1$，…；

1，-1，1，…，$(-1)^{n-1}$，…；1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…；

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots;\ a,\ a,\ a,\ \cdots,\ a,\ \cdots$$

都是数列.

在数轴上，数列的每项都相应有点与之对应．如果将 x_n 依次在数轴上描出相应的点的位置，我们能否发现点的位置的变化趋势呢？显然，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无限接近于 0 的；$\{2n-1\}$是无限增大的；$\{(-1)^{n-1}\}$的项是在 1 与 -1 两点之间跳动的，不接近于某一常数；$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限接近常数 1.

对于数列来说，最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的那种渐趋稳定的状态，这就是常说的数列的极限问题.

二、数列的极限

1. 数学描述

若数列$\{x_n\}$的极限为 a，则意味当 $n\to\infty$，即 n 无限增大时，x_n无限接近 a，在数学上用距离$|x_n-a|$来度量 x_n 接近 a 的程度．因为 n 越大，x_n越接近于 a，所以 n 越大，$|x_n-a|$越小，所以对任意的正数 ε，在适当的 n 以后，$|x_n-a|$应该可以小于指定的正数 ε.

比如，我们来考察$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的情况．不难发现随着 n 的增大，$\frac{n+1}{n}$无限地接近 1，亦即 n 充分大时，$\frac{n+1}{n}$与 1 可以任意地接近，即$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$可以任意地小，换言之，当 n 充分大时，$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$可以小于预先给定的无论多么小的正数 ε.

例如，取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$，由$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，可得 $n>100$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第 101 项开始，以后的项 $x_{101}=\frac{102}{101}$，$x_{102}=\frac{103}{102}$，…都满足不等式$|x_n-1|<\frac{1}{100}$，或者说，当 $n>100$ 时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{100}$.

同理，若取 $\varepsilon=\frac{1}{10000}$，由$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10000}$，可得 $n>10000$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第 10001 项开始，以后的项 $x_{10001}=\frac{10002}{10001}$，$x_{10002}=\frac{10003}{10002}$，…都满足不等式$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$，或者说，当 $n>10000$ 时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{10000}$.

一般地，不论给定的正数 ε 多么小，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$. 这就充分体现了当 n 越来越大时，$\frac{n+1}{n}$无限接近 1 这一事实．这个数“1”称为当 $n\to\infty$ 时，$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的极限.

2. 数列极限的定义

定义 1.12 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是常数．若对于任意的正数 ε（不论 ε 多么小），总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 为数列 x_n 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称数列 x_n 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

这时我们说数列是收敛的，否则称数列是发散的.

例 3 证明数列 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，…，$\frac{n+1}{n}$，…收敛于 1.

证 对 $\forall\varepsilon>0$，要使得 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

这里的 N 是随 ε 的变小而变大的，是依赖于 ε 的函数．解题中，只要说明存在一个 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 就行了，而不必求最小的 N.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证 对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$

所以要使得 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只须 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$ 就行了.

即有 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$.

所以取 $N=[\frac{a^2}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，因为有$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，从而可得 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

从例 4 可以看出，有时找 N 比较困难，这时我们可把 $|x_n-a|$适当地变形、放大.

例 5 设 $|q|<1$，用“$\varepsilon-N$”定义证明 1，q，q^2，…，q^{n-1}，…的极限为 0.

证 若 $q=0$，结论是显然的.

现设 $0<|q|<1$，对 $\forall\varepsilon>0$，（因为 ε 越小越好，不妨设 $\varepsilon<1$），要使得 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即 $|q|^{n-1}<\varepsilon$，只须两边取对数后，$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$ 成立就行了．因为 $0<|q|<1$，所以 $\ln|q|<0$，从而只须 $n-1>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ 即 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$．

取 $N=1+\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$ 成立．

即　$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$　　$(|q|<1)$

3．数列极限的几何意义

由不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$．我们可得数列极限的几何意义：对于任意一个邻域 $U(a,\ \varepsilon)$，数列中总存在某一项 x_N，在此项后面的所有项 x_{N+1}，x_{N+2}，…，它们在数轴上对应的点，都位于邻域 $U(a,\ \varepsilon)$ 中（图 1-4）．因为 $\varepsilon>0$ 可以任意小，所以随着 n 的增大，数列中各项所对应的点 x_n 都无限聚集在点 a 附近．

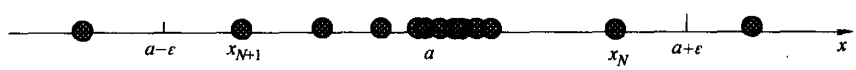

图 1-4

三、收敛数列的性质

1．极限惟一性

定理 1.2　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它只有一个极限．

证　设 a 和 b 为 x_n 的任意两个极限，下证 $a=b$．

由极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0$，必分别存在自然数 N_1，N_2，

当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon\cdots(1)$

当 $n>N_2$ 时，有 $|x_n-b|<\varepsilon\cdots(2)$

令 $N=\max\{N_1,\ N_2\}$，当 $n>N$ 时，(1)，(2) 同时成立．

现考察 $|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\leqslant|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

由于 a，b 均为常数，ε 为任意小的正数，故有 $a=b$，所以 x_n 的极限只能有一个．

例 6　证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是发散的．

证　反证法．

假设 x_n 收敛，由惟一性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

由定义，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，即

$$a-\frac{1}{2}<x_n<a+\frac{1}{2}$$

但因为 x_n 交替取值 1 与 -1，而此二数不可能同时落在长度为 1 的开区间 $\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)$ 内，所以矛盾，故 $x_n=(-1)^{n+1}$ 发散.

2. 有界性

定理 1.3 若数列 x_n 收敛，那么它一定有界．即存在 $M>0$，对 $\forall n$ 都有 $|x_n|\leqslant M$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义，对于 $\varepsilon=1$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon=1$，所以当 $n>N$ 时，$|x_n|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$，令 $M=\max\{|x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_N|,\ 1+|a|\}$，显然对一切 n，$|x_n|\leqslant M$.

但是，本定理的逆定理不成立，即有界未必收敛．如数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 有界，但不收敛.

3. 保号性

定理 1.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则对 $\forall r\in(0,\ a)$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时有 $x_n>r>0$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$，则对 $\forall r\in(a,\ 0)$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时有 $x_n<r<0$.

证 第一种情况下，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，取 $\varepsilon=a-r>0$，则 $\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon=a-r$，从而有 $a-(a-r)<x_n$，即 $x_n>r>0$.

第二种情况留予读者自证.

习题 1.2

1. 观察下列数列变化趋势写出它们的极限

(1) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；　　(2) $x_n=\dfrac{\cos\frac{n}{2}\pi}{n}$.

2. 根据数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}=1$.

3. 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为 0.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$．证明：若 $a>b$，则 $\exists N$，使得 $\forall n>N$，有 $a_n>b_n$.

6. 若数列 $\{y_n\}$ 满足 $|y_n-a|<\dfrac{1}{n}$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，则当 $n\to\infty$ 时，必有（　　）.

A. y_n 是无穷小量　B. y_n 是无界变量　C. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$　D. y_n 是无穷大量