21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

微积分教程（第2版）

张家琦　万重英　陈洪育◎编著

中国人民大学出版社

21 世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

微积分教程(第 2 版)

张家琦　万重英　陈洪育　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程/张家琦,万重英,陈洪育编著.—2版.—北京:中国人民大学出版社,2011.1
21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列
ISBN 978-7-300-13278-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… ②万…③陈… Ⅲ.①微积分-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第008318号

21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列
微积分教程(第2版)
张家琦 万重英 陈洪育 编著

出版发行	中国人民大学出版社			
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码		100080
电　话	010－62511242(总编室)	010－62511398(质管部)		
	010－82501766(邮购部)	010－62514148(门市部)		
	010－62515195(发行公司)	010－62515275(盗版举报)		
网　址	http://www.crup.com.cn			
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)			
经　销	新华书店			
印　刷	秦皇岛市昌黎文苑印刷有限公司			
规　格	185mm×260mm　16开本	版　次		2006年12月第1版
				2011年3月第2版
印　张	18.5	印　次		2011年3月第1次印刷
字　数	386 000	定　价		35.00元

版权所有　侵权必究　　印装差错　负责调换

21世纪高等继续教育精品教材

编审委员会

顾　问　董明传

主　任　杨干忠　贺耀敏

副主任　周蔚华　陈兴滨　宋　谨

委　员　（按姓氏笔画为序）

王孝忠　王晓君　王德发　龙云飞　卢雁影
刘传江　安亚人　杨干忠　杨文丰　李端生
辛　旭　宋　玮　宋　谨　张一贞　陈兴滨
周蔚华　赵树嫄　贺耀敏　贾俊平　高自龙
黄本笑　盛洪昌　常树春　寇铁军　韩民春
蒋晓光　程道华　游本强　缪代文

总 序

21 世纪，科学技术发展日新月异，发明创造层出不穷，知识更新日趋频繁，全民学习、终身学习已经成为适应经济与社会发展的基本途径。近年来，我国高等教育取得了跨越式的发展，毛入学率由 1998 年的 8%迅速增长到 2004 年的 19%，已经进入大众化的发展阶段，这其中高等继续教育发挥了重要的作用。同时，高等继续教育作为“传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度”，对实现“形成全民学习、终身学习的学习型社会”、“构建终身教育体系”的宏伟目标，发挥着其他教育形式不可替代的作用。

目前，我国高等继续教育的发展规模已占全国高等教育的一半左右，随着我国产业结构的调整、传统产业部门的改造以及新兴产业部门的建立，各种岗位上数以千万计的劳动者，需要通过边工作边学习来调整自己的知识结构、提高自己的知识水平，以适应现代经济与社会发展的要求。可见，我国高等继续教育的发展，既肩负着重大的历史使命又面临着难得的发展机遇。

我国的高等继续教育要抓住机遇发展，完成自己的历史使命，从根本上说就是要全面提高教育教学质量，这涉及多方面的工作，但抓好教材建设是提高教学质量的基础和中心环节。众所周知，高等继续教育的培养对象主要是已经走上各种生产或工作岗位的从业人员，这就决定了高等继续教育的目标是培养能适应新世纪社会发展要求的动手能力强、具有创新能力的应用型人才。因此，高等继续教育教材的编写“要本着学用结合的原则，重视从业人员的知识更新，提高广大从业人员的思想文化素质和职业技能”，体现出高等继续教育的针对性、实用性和职业性特色。

为适应我国高等继续教育发展的新形式、培养应用型人才、满足广大学员的学习需要，中国人民大学出版社邀请了国内知名专家学者对我国高等继续教育的教学改革与教材建设进行专题研讨，成立了教材编审委员会，联合中国人民大学、中国政法大学、东北财经大学、武汉大学、山西财经大学、东北师范大学、华中科技大学、黑龙江大学等 30 多所高校，共同编撰了“21 世纪高等继续教育精品教材”，计划在近两三年内陆续推出百余种高等继续教育精品系列教材。教材编审委员会对该系列教材的作者进行了严格的遴选，编写教材的专家、教授都有着丰富的继续教育教学经验和较高的专业学术水平。教材的编写严格依据教育部颁布的“全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学主要课程的教

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

学基本要求”；教材内容的选择克服了追求“大而全”的现象，做到了少而精，有针对性，突出了能力的训练和培养；教材体例的安排突出了学习使用的弹性和灵活性，体现“以学为主”的教育理念；教材充分利用现代化的教育手段，形成文字教材和多媒体教材相结合的立体化教材，加强了教师对学生学习过程的指导和帮助，形象生动、灵活方便，易于保存，可反复学习，更能适应学员在职、业余自学，或配合教师讲授时使用，会起到很好的教学效果。

这套“21世纪高等继续教育精品教材”在策划、编写和出版过程中，得到教育部高教司、中国成人教育协会、北京高校成人高教研究会的大力支持和帮助，谨表深切谢意。我们相信，随着我国高等继续教育的发展和教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的实施，这套高等继续教育精品教材必将为促进我国高校教学质量的提高作出贡献。

杨干忠

修订说明

本教材自2006年出版发行以来，获得中国人民大学优秀教材奖，由北京市教育委员会推荐为北京市成人高等教育教材，更得到读者广泛的认同和支持。同时，一些读者和资深的教授从不同的角度对本教材提出了宝贵的建议，这激励我们花费大量的时间和精力，对教材进行必要的修订和勘误。

此次修订保留了前版的系统和风格，对其原有的结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂、适合自学等特点加以继承；更吸收了同行及读者的建议，对一些内容作了审慎增删。删去的内容有：微分在函数的近似计算中的应用，全微分在函数的近似计算中的应用，有理函数的积分。还删去了一些定理、性质、公式的证明，强化了重要概念和定理的析疑与总结，以及重要公式的应用方法。在无界函数的积分(瑕积分)，以及在极坐标系下二重积分的计算内容上加了※号，选用本教材时可以根据教学的需要和学时安排斟酌取舍。

在教材的修订过程中，胡潇潇、张炎、李曦、张莹、胡建国、王士昱、张国华、姚佩华、李岩、张惠欣诸位教师先后参加了细致的校读与勘误工作，在此一并表示感谢。

限于水平，本教材虽经修订，缺点和错误仍在所难免，欢迎读者继续批评指正，以期不断改进完善。

作者

2010年12月于北京

前 言

高等继续教育事业近年来得到迅速发展，为了满足当前高等继续教育高等数学课程教学上的需要，我们参照高等院校对经济类与管理类本科学生学习的要求，同时考虑到高等继续教育教学的特点，编写了本书。

本书共分为八章，包括函数，极限与连续，导数与微分，基本定理与导数的应用，不定积分，定积分，多元函数，常微分方程初步。

本书是在我们编著的、北京市教育委员会推荐成人高等院校教材《微积分》的基础上进行了大量的修订而成，基本指导思想是便于自学，因此编写时力求深入浅出，条理清楚，概念明确，重点突出。

本书可作为高等继续教育经济类与管理类学生学习微积分课程的教材，也可作为高等院校网络教育高等数学（B)课程的教材或自学参考书。对于参加全国高等教育自学考试经济类与管理类专业的读者，本书也不失为一本有指导价值的读物。

本书的优点具体体现在：

1. 适当调整了教材体系，在注意数学学科的系统性、逻辑性的同时，又充分考虑经济类与管理类专业的专业课程所需要的数学必备知识。

2. 在教材内容的取舍上，减少了数学理论过深的原理与定理的证明，对基本概念、定理和基本公式的正确理解与运用，以及自学时容易产生的错误，增加了详细的阐述。

3. 针对成人学习的特点与需求，在本书的配套学习指导书《微积分教程学习指导》中，对全部的解答题作了详细的解答，以便使读者做到心中有数，把握学习的主动权。

本书的编写，融入了诸多专家、教授，包括长期在中国人民大学继续教育学院授课的一线教师的心血，凝结着“从以知识立意向以能力立意转化”的现代教育思想的精华。在教材的编写过程中，中国人民大学朱光贵教授、北京交通大学任国臣教授、北京建筑工程学院曹承宾教授、清华大学周辛庚教授、北京航空航天大学旋俊雄教授提出了许多宝贵的建议，李晓辉、马雪京、相学群、邱际毅教师对书中的例题及解答作了认真的校对，在此一并致谢！

书中存在的问题，欢迎广大读者、专家和同行批评指正。

作者

2006 年 8 月于北京

目　录

第 1 章 函数

初等数学研究的对象主要是常量，而高等数学的研究对象是变量，即：高等数学是研究变量及其相互关系的一门数学．变量之间的相互依赖关系即所谓函数关系，是微积分研究的对象，它是高等数学中最重要的基本概念之一，也是学好微积分的基础知识．

在中学的数学课程中，我们学习过函数，已熟悉了很多函数关系，对函数的概念有了初步的了解．本章是在初等数学的基础上，对函数进行复习和补充，以进一步加深对函数概念的理解和认识．

1.1 函数的概念

在分析某一科学技术问题或某一经济问题时，会遇到两种不同的量．一种称为常量，它是指在某个过程中数值保持不变的量；另一种称为变量，即在某个过程中数值变化的量．

通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z，t，u，w 等表示变量．

在同一过程或同一问题中，往往存在着几个变量，它们又往往不是孤立的，而是相互联系、相互依赖、遵循着一定的规律变化的．所以我们在研究问题的时候，就要研究各个变量在变化过程中的相互依赖关系及其内部规律．现在我们仅就两个变量的情况加以讨论（多个变量的情况将在第 7 章中讨论）．先看以下几个例子．

例 1 设圆的半径为 r，面积为 s．半径变化时，面积也随之变化．在初等数学中已知它们之间有关系：

$$s=\pi r^2$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

当半径 r 取某个正数时，面积 s 就可按上面的公式求出一个确定的数值.

例 2 设某种商品的价格是每个 5 元，则卖出 x 个商品的收入 R 与 x 之间有关系：

$$R=5x$$

当 x 取某个正数时，收入 R 就可按上式求出一个确定的数值.

上面两个例子虽然所包含的具体意义及变量之间关系的表现形式各不相同，但却有一个共同点，即在变化过程中，两个变量相互依赖，而且当其中的一个变量取某个值时，另一个变量按照一定的规律总有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系，就是函数概念的实质.

对于函数的概念，一般有以下的定义.

定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 而变化，如果变量 x 在实数集合 D 中取某一数值时，变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫**自变量**，y 叫**因变量**或**函数**.

在函数记号 $y=f(x)$ 中，f 是英文“function”(即“函数”) 的第一个字母，它代表 y 与 x 之间的对应关系. $f(x)$ 是一个完整的记号，切不可误认为是 f 乘以 x. $f(x)$ 又是一个抽象的记号，它可以代表 x 的任何函数. 至于它究竟代表什么样的函数关系，那就要看具体情况而定了. 例如在上面的例 1 中，$f(x)$ 就代表 πx^2；在上面的例 2 中，$f(x)$ 就代表 $5x$.

如果同时考虑几个不同的函数时，应分别用不同的符号如 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 等来表示它们，而不能用同一个符号来表示这些不同的函数.

在上述函数的定义中，很重要的一点是：自变量 x 在 D 上取每一数值时，函数 y 都有一个确定的数值与之对应，此时我们称函数是有定义的.（如果对应于 D 中的 x 的每个值，y 的值不止一个，在这样的情况下，我们称函数是多值的. 一般微积分中说到“函数”一词均指单值函数，多值函数不在我们讨论的范围. 多值函数通常都拆成几个单值函数分别研究.）

定义域 使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

值域 函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

正确理解函数定义应当注意以下几点：

(1) 定义域和对应规则是确定两个变量是否构成函数关系的两个要素，缺一不可. 因此，如果两个函数的定义域和对应规则完全相同，那么它们就是相同的函数；如果定义域和对应规则有一个不同，它们就是不同的函数.

(2) 在函数的定义中，并没有要求当自变量变化时函数一定要变，而是要求 x 取定一个值时，y 有一个确定的对应值. 例如 $f(x)=3$ 也表示一个函数，此函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，x 无论取什么实数值时，对应的函数值都等于 3.

(3) 函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示函数关系中的对应规则，而 $f(x)$ 就是指这个规则作用在 x 上. 如 $y=f(x)=2x^2+5$，这里 $f(x)$ 表示把 x 代入表达式$2(\quad)^2+5$ 的括号中进行运算，变量 x 与 y 之间的对应规则就是由这些运算确定的，即"f"表示这样的对应规则：与 x 对应的函数值，是由括号内的 x 值平方后乘以 2 再加上 5 而得到的.

当自变量 x 取某一个定值 a 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y|_{x=a}$.

例如，对于函数 $f(x)=2x^2+5$ 来说：

$$f(0)=2\cdot 0^2+5=5$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)^2+5=7$$

$$f(a)=2a^2+5$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^2+5=\frac{2}{x^2}+5$$

$$f(x-1)=2(x-1)^2+5=2x^2-4x+7$$

下面举例求函数的定义域.

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$ (2) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}$

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

解 (1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$，因为分式的分母不能为 0，所以当分母不为 0 时，函数有定义，即有

$$x^2-2x=x(x-2)\neq 0$$

也就是 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 时，函数是有定义的.

所以，函数的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, 2)\cup(2, +\infty)$，用不等式表示：$-\infty<x<0$，或 $0<x<2$，或 $2<x<+\infty$.

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}$，应有 $\lg(2-x)\neq 0$，又因为只有正数才有对数，且 1 的对数为 0，所以应有 $2-x>0$ 且 $2-x\neq 1$，即 $x<2$ 且 $x\neq 1$.

因此，函数的定义域为 $(-\infty, 1)\cup(1, 2)$，用不等式表示：$-\infty<x<1$，或$1<x<2$.

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$，因为函数式有两项，所以其定义域是使两项都有定义的 x 的取值范围.

对第一项 $\sqrt{\sin x}$，因为负数没有平方根，所以应有 $\sin x\geqslant 0$. 首先知道在 $[0, \pi]$ 上，$\sin x\geqslant 0$，而 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，所以在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)

上，有 $\sin x \geqslant 0$.

对第二项 $\sqrt{16-x^2}$，同理应有 $16-x^2 \geqslant 0$，即 $x^2 \leqslant 16$，即 $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

函数的定义域是上述两个定义域的公共部分，所以定义域为 $[-4, -\pi] \cup [0, \pi]$，用不等式表示：$-4 \leqslant x \leqslant -\pi$，或 $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

例 4 求函数 $y=\lg \dfrac{x}{x-2}+\arcsin \dfrac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解 设 $y_1=\lg \dfrac{x}{x-2}$，$y_2=\arcsin \dfrac{3x-1}{5}$. 对于 y_1，要求

$$\frac{x}{x-2}>0$$

解得 $x>0$ 且 $x-2>0$

或 $x<0$ 且 $x-2<0$

因此 y_1 的定义域为 $x>2$ 或 $x<0$.

对于 y_2，由反正弦函数的定义知，应有

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right| \leqslant 1, \quad 即 \quad -1 \leqslant \frac{3x-1}{5} \leqslant 1$$

$$\therefore \quad -5 \leqslant 3x-1 \leqslant 5$$

解得 $$-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$$

因此 y_2 的定义域为 $\left[-\dfrac{4}{3}, 2\right]$.

由于 $y=y_1+y_2$，所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的公共部分，即 $-\dfrac{4}{3} \leqslant x < 0$.

例 5 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，求函数 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，因此求 $f(x+a)$ 的定义域的问题就变成了求 x 的取值范围，使得 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，即 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$. 所以 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$.

例 6 设某工厂生产某种产品，每月最多生产 1 000 件，其生产总成本 C 是产量 x 的函数：$C=10+0.2x$(万元)，求它的定义域.

解 当函数由一个表达式表示而又未特别指出其定义域时，其定义域就是使表达式有意义的一切实数. 而对于实际问题的函数，不能直接从公式求它的定义域，而要从对实际问题的分析中求它的定义域.

此题如果直接从公式上看，定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

但从对实际问题的分析可以看出，产量 x 不能为负值，且最大的月产量为1 000件，所以函数的定义域应为 $[0, 1\,000]$，且 x 为整数.

求函数的定义域时，应注意以下几点：

(1) 分式的分母不能为 0；

(2) 偶次根的根底式应为非负数；

(3) 对数的真数应为正数；

(4) 正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\pi$ ($k=0$，±1，±2，…)；

(5) 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；

(6) 如果函数式由若干项组成，其定义域应是各项定义域的公共部分（即交集）.

一个函数可以写成公式形式，这就是函数的公式表示法，以上的几个例题都是这样的. 一个函数也可以画成图形或列成表格，即用图形法和表格法来表示. 在微积分的讨论中，我们感兴趣的主要是公式法. 有时为了直观起见，也要考察函数的图形.

最后要指出：有时还要考察这样的函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示. 这类函数称为“分段函数”.

例如，$y=|x|$ 就是一个分段函数，因为它可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，公式为 $y=-x$；当 $x\geqslant 0$ 时，公式为 $y=x$（如图 1—1 所示）. 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

又如，$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$

也是一个分段函数（如图 1—2 所示），函数的定义域也是 $(-\infty, +\infty)$.

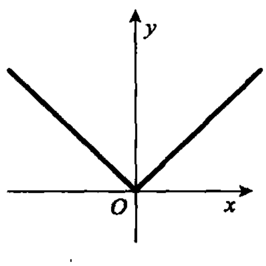

图 1—1

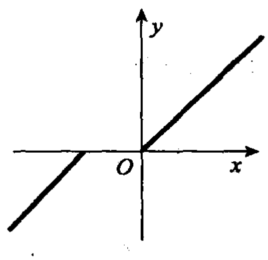

图 1—2

关于分段函数要注意以下几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2) 因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

(3) 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求；

(4) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例 7 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ x, & 0<x<1\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$ 及函数的定义域.

解 $f(-2)=\dfrac{1}{x-1}\Big|_{x=-2}=\dfrac{1}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$f(2)=2$$

因为在 $x=0$ 时函数无定义，所以它的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2)$，用不等式表示：$-\infty<x<0$，或 $0<x\leqslant 2$.

对于实际问题中的分段函数，可参看本章第 6 节的例 5.

1.2 函数的几何特性

在分析讨论某一个函数的时候，我们往往要讨论这个函数的一些几何特性，这些性质是：奇偶性、周期性、单调增减性和有界性.

1.2.1 函数的奇偶性

定义

如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足关系式：$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足关系式：$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，x^2，$\cos x$ 都是偶函数，x^3，$\sin x$，$\dfrac{1}{x}$ 都是奇函数.

偶函数的图形是对称于 y 轴的（如图 1—3 所示）. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点

$P(x, f(x))$是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点，则与它对称于 y 轴的点$P'(-x, f(x))$ 也是曲线上的一个点.

奇函数的图形是对称于坐标原点的（如图1—4所示）. 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $Q(x, f(x))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点，则与它对称于原点的点$Q'(-x, f(-x))$ 也是曲线上的一个点.

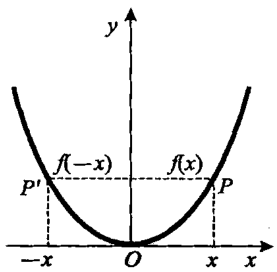

图1—3

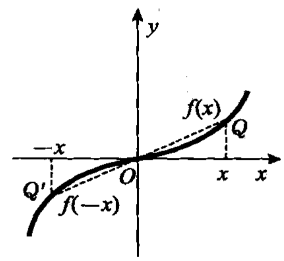

图1—4

例1 判定 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性.

解 设 $f(x)=x^4-2x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$\because$ $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$

$\therefore$ $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

例2 判定 $y=x\cos x$ 的奇偶性.

解 设 $f(x)=x\cos x$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$\because$ $f(-x)=(-x)\cos(-x)$

$=-x\cos x=-f(x)$

$\therefore$ $y=x\cos x$ 是奇函数.

例3 设 $y_1=f_1(x), y_2=f_2(x)$ 都是偶函数，其定义域均为 $D(f)$，试证明 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是偶函数.

证 设 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，定义域为 $D(f)$

$\because$ $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)$

$=f_1(x)\cdot f_2(x)$ （因为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数）

$=F(x)$

$\therefore$ $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 为偶函数，即两个偶函数的乘积是偶函数.

同样我们可以证明：

两个奇函数的乘积是偶函数.

奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com