

高中数学

名师学习方法指导丛书



天津科技翻译出版公司

名师学习方法指导丛书

高中数学

张济华 王方薇 贾少舟
戴宏祥 陈宪映

天津科技翻译出版公司

(津)新登字010号

责任编辑: 李丕章

高 中 数 学

(名师学习方法指导丛书)

张济华 王方薇 贾少舟 编著
戴宏祥 陈宪映

天津科技翻译出版公司出版

河北邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

× × ×

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 22.5 字数: 360千字

1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷

印数: 1—6000册

ISBN7—5433—0433—3/G·50

定价: 12.80 元

前 言

国际上激烈的经济竞争，归根结底是科学技术的竞争、人才的竞争。人才竞争的根本在于教育，造就成万上亿的高素质、高质量的智能型劳动大军，是国家经济腾飞的保证，跨世纪人才的培养落在教育部门的肩上，教育界的首要任务是将培养知识型人才观转变到智能型人才的轨道上来，这不仅是宏观体制上的改革，微观上的教与学也必须有根本的变革。

长期以来，特别是高中段的教学一直围着高考转，教师偏重于教的研究、应考的探讨，练习题的编写，而忽视了学生学习规律的研究，学生学习方法的指导。对学生如何学会这门功课之法授之更少。这对智能型人才的培养、“四有”人才国家的急需是不谐调的。放开步子，大胆改革，顺应国家经济改革、社会主义市场经济之需，各学科的教与改势在必行，为帮助广大师生顺应时代的要求，加强学习方法的探究，名师学习方法指导丛书编委会特编著：包含《高中数学》、《高中物理》、《高中化学》、《高中语文》、《高中英语》一套（名师学习方法指导丛书）。

（丛书）遵循各科教学大纲，紧扣高考各科说明编撰的，目的在于使同学们以掌握教材中的基本知识、理论、启智于各学科的独立思考的能力，向跨世纪智能型人才迈步。

（丛书）设计巧妙，按各学科知识单元设置有“精要解疑”，分析了学生学习中易混易错的原因，“导思拓径”结合例题给出了本单元知识的学习方法和解题方法，每单元、每章之后，配有同步的A、B两套智能训练题，A卷适用于教学同步，B卷适用于毕业总复习。从而全面地锻炼和培养了自己的智力。

该套书的作者来自教学第一线或教研部门的特级和高级教师，他们对学生的学习心理都有相当深的研究，又有雄厚的理论修养，同时有丰富的教学经验，可以说是他们积教学一生之宝而成。这套书高中生阅读后可学之入法，会之深广，得之智能，考之应手，是高中师生

不可多得的“良师益友”。

本（丛书）得到国家教委及天津市教育局和天津市河北区教育局有关部门领导的关心和支持，在（丛书）出版之际，谨向曾经给予（丛书）以支持和帮助的领导和同志们深表谢意。

限于各方面条件，（丛书）中疏漏之处在所难免。敬祈读者批评指正。

编 者

目 录

第一篇 代数

第一章 函数	(1)
〔本章知识结构〕	(1)
第一节 集合	(1)
第二节 函数及其性质	(15)
第三节 幂函数、指数函数和对数函数	(51)
〔全章知识检测〕	(70)
第二章 数列与极限	(75)
〔本章知识结构〕	(75)
第一节 数列的通项与前 n 项之和	(75)
第二节 等差数列与等比数列	(87)
第三节 无穷数列的极限	(99)
〔全章知识检测〕	(109)
第三章 数学归纳法	(113)
〔本章知识结构〕	(113)
第一节 关于自然数集归纳的主要类型	(113)
第二节 改变归纳范围的重要类型	(120)
〔全章知识检测〕	(124)
第四章 不等式	(127)
〔本章知识结构〕	(127)
第一节 不等式的性质与证明	(128)
第二节 解不等式	(163)

〔全章知识检测〕	(175)
第五章 复数	(181)
〔本章知识结构〕	(181)
第一节 复数的基本概念	(181)
第二节 复数的运算	(189)
〔全章知识检测〕	(206)
第六章 排列与组合	(211)
〔本章知识结构〕	(211)
第一节 “排列与组合”公式解题	(211)
第二节 “排列与组合”应用问题	(217)
〔全章知识检测〕	(229)
第七章 二项式定理	(233)
〔本章知识结构〕	(233)
第一节 二项展开式及其应用	(233)
第二节 求 $(a+b)^n$ 展开式中的特定项问题	(239)
〔全章知识检测〕	(244)

第二篇 三角

第一章 三角函数	(248)
〔本章知识结构〕	(248)
第一节 角和角集	(248)
第二节 同角三角函数的求值或化简	(255)
〔全章知识检测〕	(264)
第二章 三角函数的图象和性质	(270)
〔本章知识结构〕	(270)
第一节 三角函数的图象	(270)
第二节 三角函数的性质	(277)
〔全章知识检测〕	(303)

第三章 两角和与差的三角函数	(309)
〔本章知识结构〕	(309)
第一节 三角函数的化简和证明	(309)
第二节 三角函数的求值	(323)
〔全章知识检测〕	(344)
第四章 反三角函数和简单的三角方程	(354)
〔本章知识结构〕	(354)
第一节 反三角函数	(354)
第二节 简单的三角方程	(372)
〔全章知识检测〕	(380)

第三篇 立体几何

第一章 直线与平面	(385)
〔本章知识结构〕	(385)
第一节 三个角	(386)
第二节 正方体	(395)
第三节 空间四边形	(407)
第四节 四个面都是直角三角形的四面体	(419)
〔全章知识检测〕	(426)
第二章 多面体和旋转体	(431)
〔本章知识结构〕	(432)
第一节 棱柱、棱锥、棱台的定义	(432)
第二节 锥、台平行于底面的截面	(438)
第三节 运用已有数学知识解决一些实际问题	(442)
〔全章知识检测〕	(449)

第四篇 解析几何

第一章 直线	(454)
〔本章知识结构〕	(454)
第一节 平面直角坐标系	(455)
第二节 直线方程	(460)
〔全章知识检测〕	(487)
第二章 圆	(492)
〔全章知识结构〕	(492)
第一节 圆与圆的方程	(492)
第二节 点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系	(499)
〔全章知识检测〕	(507)
第三章 图纸曲线、坐标轴平移、轨迹	(510)
第一节 椭圆与方程	(510)
第二节 直线与椭圆的位置关系	(517)
第三节 双曲线	(520)
第四节 直线与双曲线的位置关系	(526)
第五节 抛物线与方程	(530)
第六节 直线与抛物线的位置关系	(533)
第七节 坐标轴平移	(537)
第八节 轨迹与轨迹方程	(544)
〔全章知识检测〕	(552)
第四章 参数方程与极坐标	(556)
〔全章识知识结构〕	(556)
第一节 几种常见曲线的参数方程	(556)
第二节 直线参数方程的简单应用	(563)
第三节 极坐标	(569)

〔全章知识检测〕.....	(576)
第五章 对称与最值	(579)
第一节 对称.....	(579)
第二节 最值.....	(585)
〔本章知识结构〕.....	(579)

答案与提示

第一篇 代数

第一章	(592)
第二章	(604)
第三章	(611)
第四章	(617)
第五章	(632)
第六章	(644)
第七章	(646)

第二篇 三角

第一章	(648)
第二章	(650)
第三章	(656)
第四章	(662)

第三篇 立体几何

第一章	(669)
第二章	(676)

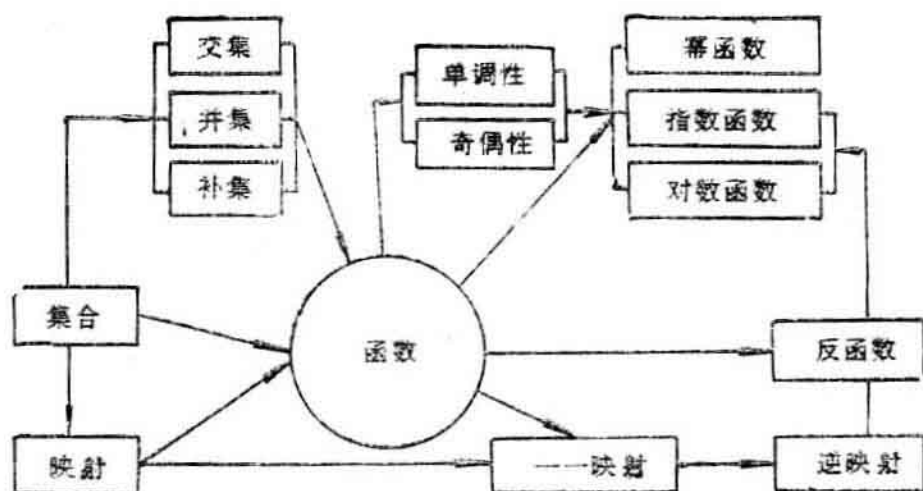
第四篇 解析几何

第一章.....	(680)
第二章.....	(688)
第三章.....	(690)
第四章.....	(691)
第五章.....	(692)

第一篇 代数

第一章 函数

一、〔本章知识结构〕



二、〔本章知识展析〕

第一节 集 合

(一)、【精要解疑】

(1) “集合”是一个不定义的原始概念，为了确切地把握住这个

概念，我们给出如下的描述语：“满足某种性质的事物的全体”。

(2) 集合概念在中学数学中引入有一个很重要的功能就是它可以把许多数学现象和结论用确切的、准确的符号表示出来。例如，函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域用 $x \geq 0$ 来表示是不确切的，准确的讲，函数的定义域就是一个以自变量 x 为代表元素的数集，它的确切的表示应为 $\{x | x \geq 0 \text{ 且 } x \in R\}$ 。（为了简缩符号 $x \in R$ 可以省略）。又如，求方程组

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{的解的问题的确切意义是：}$$

$$\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y) \mid x + y - 1 = 0 \right\} \cap$$

$$\left\{ (x, y) \mid x - y + 2 = 0 \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

再如，求两已知直线 l_1 和 l_2 与已知 $\odot O$ 的交点问题，即是求 $(l_1 \cup l_2) \cap \odot O$ 。

(3) 如前所述，既然引入集合概念的重要功能之一是集合符号的表示形式，那么，正确理解集合符号，正确运用集合符号就成为十分重要的问题。一个错误的集合表示，对集合符号的错误理解，往往导致整个解题的失败。例如，把空集 ϕ ，错误的表示为： 0 、 $\{0\}$ 、 $\{\phi\}$ ；把实数集 R 或 {实数}，错误的表示为：实数、{实数集}、 $\{R\}$ ；把以坐标为 $(1, 2)$ 的点集 $\{(1, 2)\}$ ，错误的表示为： $(1, 2)$ 、 $\{1, 2\}$ 、 $\{x=1, y=2\}$ ，等等。再如，对于符号 $\mathbb{Z}^+$ 认为是集合 {正整数、零} 是错误的。其错误的根源在于：“面对补集，一定要明确全集”。对于没有给出全集的数集的补集问题，我们只能认为全集是 R ，所以上述结果是错误的。请见下例：

【例 1】 已知 $I = R$ ，求不等式 $2x^2 - 3x - 9 > 0$ 在 $\mathbb{Z}^+$ 上的解集。

【解】 首先不等式 $2x^2 - 3x - 9 > 0$ 在 R 上的解集为： $\{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > 3\}$ ，故知不等式 $2x^2 - 3x - 9 > 0$ 在 $\mathbb{Z}^+$ 上的解集为：

$$\{x | 2x^2 - 3x - 9 > 0 \text{ 且 } x \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$= \{x | x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \text{ 且 } x \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{x | x > 3\}$$

(4) “集合”与“元素”以及它们之间的相对关系，应从问题的具体内涵去分析、理解，才能得出正确的判断，不应用固定的程式去套，诸如“集合之间只能有‘包含’关系，……等”。为了说明这个问题，请见下例：

【例2】 已知集合 $A = \{a, b\}$ ，集合 $B = \{x | x \subseteq A\}$ ，试写出 B 的元素，并确定集合 A 与 B 之间的关系。

【解】 首先从符号 $x \subseteq A$ 知， x 是集合，而且是代表集合 A 的子集。所以知 B 是由所有 A 的子集为元素组成的集合，故知 B 的元素有 ϕ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$ 。从而知道集合 A 是集合 B 的一个元素， $\therefore$ 有 $A \in B$ 。

(二)、【导思拓径】

(1) 集合中的几个重要的基本关系式在解题时能发挥很大的作用。如， $A \cap B \subseteq A, B$ ； $A \cup B \supseteq A, B$ ； $A \cap \overline{A} = \phi$ ； $A \cup \overline{A} = I$ ；若 $A \subseteq B$ 则 $A \cap B = A$ ， $A \cup B = B$ ……等。请见下例：

【例1】 设 S, T 是两个非空集合且 $S \cap T, T \cap S$ ，令 $X = S \cap T$ ，那么 $S \cup X$ 等于

(A) S ，(B) T ，(C) ϕ ，(D) X 。 答：()

【解】 $\because X = S \cap T \subseteq S, \therefore S \cup X = S$ 。

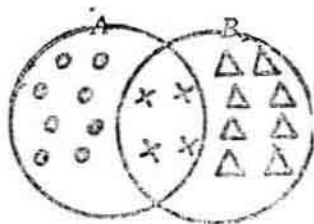
$\therefore$ 此题的正确解答为 (A)。(此题为1987年全国高考试题)

(2) 集合的图示法(韦恩图)，在解题过程中起到形象化试题，理解题意，提供解题思路等极其重要的作用。集合图示法的重要功能在于把抽象的集合形象化，便于我们对条件的理解和对情况的分析，从而提供解题的思路。如下例：

【例2】 已知集合 A 和集合 B 各含有12个元素，试问同时满足下面两个条件的集合 C 的个数：(i) $C \subseteq A \cup B$ ，且 C 中含有8个元素，

(ii) $C \cap A \neq \phi$ (ϕ 是空集)。

【解】 首先依据试题给出的条件描绘出示意图，如下：



由示意图可知， $A \cup B$ 共有 20 个元素，除 $A \cap B$ 中的 4 个元素外， A 和 B 还分别含有 8 个元素。由此可清楚的知道条件 (i) 要求 C 中是含有 $A \cup B$ 中的 20 个元素中的 8 个元素，条件 (ii) 要求 C 中必须有 A 中的元素。分析至此，运用组合法可得集合 C 的个数：

(方法一)： $C_{20}^8 - C_8^8 = 1084$ (个)；

(方法二)： $C_{12}^1 \cdot C_8^2 + C_{12}^2 \cdot \dots \cdot C_8^1 + C_{12}^8 = 1084$ (个)

(此题为 1986 年全国理科高考试题)

(8) 集合“交”与“并”的分配律及反演律在有关集合问题解题过程中的作用。有关集合“交”与“并”的分配律及反演律，在中学教材中已有所涉及，只是没有正面提出，但在实际解题中作用是很大的。所谓集合“交”与“并”的分配律有以下两个形式： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ； $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。所谓反演律有以下两个形式： $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ； $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 。

关于反演律的应用我们并不陌生，对于已知 A 、 B 求 $\overline{A \cap B}$ 时我们往往去求 $\overline{A \cup B}$ ，使过程变得简单、容易的得出。下面举出一个分配律与反演律联合运用解题的生动实例：

【例 3】 已知 $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ 且 $A \cap B = \{5, 11, 15\}$ ， $\overline{A \cap B} = \{9, 13\}$ ， $\overline{A \cup B} = \{1, 7\}$ ，求集合 A 与 B 。

〔解〕 由 $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = I \cap B = B$

$\therefore B = \{5, 9, 11, 13, 15\}$

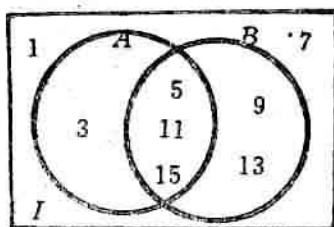
再由 $(\bar{A} \cap B) \cup \overline{A \cup B} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= \bar{A} \cap (B \cup \bar{B}) = \bar{A} \cap I = \bar{A}$$

故知 $\bar{A} = \{1, 7, 9, 13\}$, $\therefore A = \{3, 5, 11, 15\}$ 。

综合以上知: $A = \{3, 5, 11, 15\}$, $B = \{5, 9, 11, 13, 15\}$ 。

此题用图示法更方便:



$\therefore A = \{3, 5, 11, 15\}$,

$B = \{5, 9, 11, 13, 15\}$ 。

(4) 有关“数集”的“交、并、补”的解题思路。解决数集的交、并、补问题，解题人首先要掌握实数的系统以及实数内部的各种分类的数在数轴上一一对应的相对位置关系，请见下页系统表。

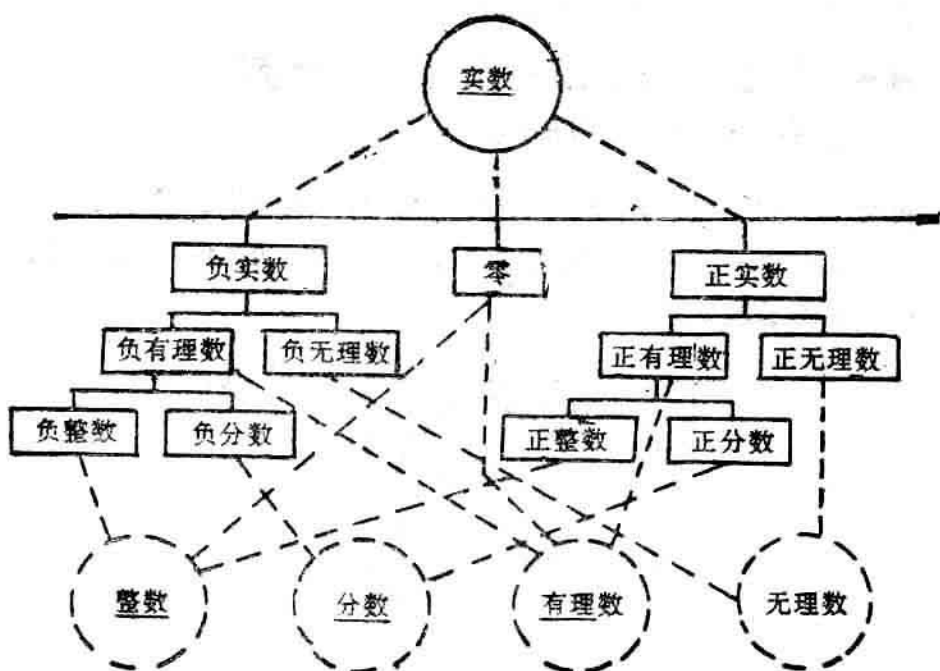
【例4】 已知全集 $I = \{\text{实数}\}$, $A = \{\text{有理数}\}$, $B = \{\text{正实数}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$

〔解〕 依照集合的“交、并、补”的意义，由以上所设计的实数的系统表，本着满足条件的集合中的元素既不缺少又不重复，其集合元素的描述形式与数轴的排列次序一致，这样，我们很容易的得出以下结果：

$A \cap B = \{\text{正有理数}\}$, $A \cup B = \{\text{负有理数、零、正实数}\}$,

$\bar{A} = \{\text{无理数}\}$, $\bar{B} = \{\text{负实数、零}\}$ 。

(5) 有关“形集”的“交、并、补”的解题思路。在解决有关几



何图形的集合问题之前，首先应当熟知图形的各种分类，从而理解它们之间的从属关系，这对解决其“交、并、补”的问题是十分重要的。对于补集的确定更应周密的考虑图形全集的内涵及条件之反意进行分析，特别是对于双重条件的图形更应按照严谨的逻辑推理进行分析而后得出正确的结果。

例如，{三角形}的一种分类与从属关系：

