丛书主编：陈兰荪

8
生物数学丛书

宋新宇 郭红建 师向云 编著

脉冲微分方程理论及其应用

科学出版社

生物数学丛书 8

脉冲微分方程理论及其应用

宋新宇　郭红建　师向云　编著

科学出版社

北京

《生物数学丛书》编委会

主　　编：陈兰荪

编　　委：（以姓氏笔画为序）

李镇清　陆征一　张忠占

周义仓　徐　瑞　唐守正

靳　祯　滕志东

执行编辑：陈玉琢

《生物数学丛书》序

传统的概念：数学、物理、化学、生物学，人们都认定是独立的学科，然而在20世纪后半叶开始，这些学科间的相互渗透、许多边缘性学科的产生，各学科之间的分界已渐渐变得模糊了，学科的交叉更有利于各学科的发展，正是在这个时候数学与计算机科学逐渐地形成生物现象建模，模式识别，特别是在分析人类基因组项目等这类拥有大量数据的研究中，数学与计算机科学成为必不可少的工具. 到今天，生命科学领域中的每一项重要进展，几乎都离不开严密的数学方法和计算机的利用，数学对生命科学的渗透使生物系统的刻画越来越精细，生物系统的数学建模正在演变成生物实验中必不可少的组成部分.

生物数学是生命科学与数学之间的边缘学科，早在1974年就被联合国科教文组织的学科分类目录中作为与“生物化学”、“生物物理”等并列的一级学科.“生物数学”是应用数学理论与计算机技术研究生命科学中数量性质、空间结构形式，分析复杂的生物系统的内在特性，揭示在大量生物实验数据中所隐含的生物信息. 在众多的生命科学领域，从“系统生态学”、“种群生物学”、“分子生物学”到“人类基因组与蛋白质组即系统生物学”的研究中，生物数学正在发挥巨大的作用，2004年*science*杂志在线出了一期特辑，刊登了题为“科学下一个浪潮 —— 生物数学”的特辑，其中英国皇家学会院士 Lan Stewart 教授预测，21世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一必将是“生物数学”.

回顾“生物数学”我们知道已有近百年的历史：从1798年 Malthus 人口增长模型，1908年遗传学的 Hardy-Weinberg“平衡原理”；1925年 Voltera 捕食模型，1927年 Kermack-Mckendrick 传染病模型到今天令人注目的“生物信息论”，“生物数学”经历了百年迅速地发展，特别是20世纪后半叶，从那时期连续出版的杂志和书籍就足以反映出这个兴旺景象；1973年左右，国际上许多著名的生物数学杂志相继创刊，其中包括 Math Biosci, J. Math Biol 和 Bull Math Biol；1974年左右，由 Springer-Verlag 出版社开始出版两套生物数学丛书：*Lecture Notes in Biomathermatics*（二十多年共出书100册）和*Biomathematics*（共出书20册）；新加坡世界科学出版社正在出版“*Book Series in Mathematical Biology and Medicine*”丛书.

“丛书”的出版，既反映了当时“生物数学”发展的兴旺，又促进了“生物数学”的发展，加强了同行间的交流，加强了数学家与生物学家的交流，加强了生物数学学科内部不同分支间的交流，方便了对年轻工作者的培养.

从20世纪80年代初开始，国内对“生物数学”发生兴趣的人越来越多，他（她）

们有来自数学、生物学、医学、农学等多方面的科研工作者和高校教师，并且从这时开始，关于“生物数学”的硕士生、博士生不断培养出来，从事这方面研究、学习的人数之多已居世界之首．为了加强交流，为了提高我国生物数学的研究水平，我们十分需要有计划、有目的地出版一套“生物数学丛书”，其内容应该包括专著、教材、科普以及译丛，例如：① 生物数学、生物统计教材；② 数学在生物学中的应用方法；③ 生物建模；④ 生物数学的研究生教材；⑤ 生态学中数学模型的研究与使用等．

中国数学会生物数学学会与科学出版社经过很长时间的商讨，促成了“生物数学丛书”的问世，同时也希望得到各界的支持，出好这套丛书，为发展“生物数学”研究，为培养人才作出贡献．

陈兰荪

2008 年 2 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

脉冲微分方程的理论研究始于 20 世纪 60 年代 Mil'man V D 和 Myshkis A D 的工作, 并在 80 年代以后得到了较大发展. 20 世纪 90 年代, 众多学者致力于脉冲微分方程理论的完善工作, 逐步建立了脉冲微分方程解的存在性基本定理、脉冲微分/积分不等式和脉冲微分方程稳定性的基本理论等. 在这期间, 大多数研究工作都集中于研究脉冲时刻固定的脉冲微分系统. 对该类系统稳定性的研究主要包括两个方面: 一是系统方面的拓广, 如脉冲摄动微分系统、脉冲混合系统、脉冲泛函微分系统等, 其中脉冲泛函微分系统是研究的热点; 二是稳定性概念方面的推广, 如脉冲微分方程实用稳定性、指数稳定性、全局稳定性、严格稳定性等.

脉冲微分系统兼具连续系统和离散系统的特征, 但又超出连续和离散系统的范围. 近三十年来, 尽管脉冲微分系统取得了大量的研究成果, 但亟待解决的问题还有很多. 对于脉冲微分系统来说, 依赖状态的脉冲微分系统比固定时刻的脉冲微分系统更具一般性, 与现实生活中的很多系统更接近, 但是因为系统的解曲线与脉冲面的碰撞时刻和碰撞次数的不确定性, 研究起来具有一定的难度, 致使目前所得的结果甚少, 因此该领域具有广阔的研究前景和很强的挑战性.

近年来, 人们发现有许多生命现象的发生, 以及人们对某些生命现象的管理和优化控制并非是一个连续的过程, 不能单纯地用微分方程或差分方程来描述, 而用脉冲微分方程来描述更为合适. 脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬间突发现象对系统状态的影响, 能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律. 随着科学技术的突飞猛进, 人们越来越认识到脉冲微分系统的重要性以及在实践中的应用价值. 因此脉冲微分方程被引入到生物数学中来, 并在种群生态动力学系统、传染病动力学系统、微生物连续培养模型及药物动力学模型等方面得到了非常广泛的应用. 例如, 药物动力学模型的研究, 由于口服、注射药物常常是以脉冲形式进入人体的, 因而描述药物在人体 (包括血液、脏器、肌肉等) 中浓度变化情况, 应用周期脉冲微分方程更为合理. 另外, 脉冲微分方程也被应用在可再生资源的开发及害虫防治、环境综合治理等领域, 并取得了许多令人鼓舞的结果.

本书的第一部分主要介绍脉冲微分系统基本理论、脉冲微分系统稳定性以及周期脉冲微分系统. 除 1.9 节、2.8 节和 3.4 节外, 基本上是从下面两本书编译的: [1] Lakshmikantham V, Bainov D and Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989. [2] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. New York: Longman

Scientific and Technical, 1993. 第二部分根据不同的实际问题分别介绍了脉冲生物动力系统的建模思想、研究方法和成果. 我们力图较为完整地介绍相关文献的研究方法, 而不是简单地罗列其结论, 以便使读者对该类问题的研究方法、数学结果及生物意义等有较清晰的了解, 对同类问题的相关研究仅以参考文献作为补充.

本书旨在向广大读者介绍近三十年来国内外脉冲微分方程理论及应用的相关研究成果, 其中也包含了信阳师范学院生物数学研究团队的一些创新性成果. 本书撰写过程中得到了中国科学院数学研究所陈兰荪研究员的指导, 在此深表感谢. 本书的出版受到国家自然科学基金、河南省科技创新杰出人才支持计划和河南省高校科技创新团队支持计划的资助.

由于编者的水平有限, 书中难免有错误和不当之处, 敬请读者批评指正.

作　者

2010 年 12 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一部分　基 本 理 论

第 1 章　脉冲微分系统基本理论

本章主要介绍脉冲微分系统基本理论, 为以后章节的研究作准备.

1.1 节介绍脉冲微分系统的基本情况和脉冲现象. 主要介绍三种常见的脉冲微分系统: 脉冲时刻固定的脉冲微分系统、脉冲时刻不固定的脉冲微分系统和自治脉冲微分系统, 最后还介绍了脉冲现象以及避免发生脉冲现象的条件.

1.2 节讨论脉冲微分系统解的局部存在性和唯一性定理以及解的延拓定理, 给出一些与常微分方程相平行的结论.

1.3 节研究线性脉冲微分系统. 首先给出齐次线性脉冲微分系统基解矩阵的定义, 并给出齐次线性脉冲微分系统解的表示和 Liouville 公式, 然后给出非齐次线性脉冲微分系统的参数变易公式.

1.4 节和 1.5 节介绍一些常用的脉冲微分不等式, 1.6 节分别给出 Gronwall 型和 Bihari 型脉冲积分不等式. 这些不等式成为脉冲微分系统定性和定量分析的有力工具.

1.7 节利用脉冲微分不等式证明解的全局存在性和唯一性定理, 1.8 节探讨解对初值的连续依赖性和可微性. 这两节内容与常微分方程初值问题理论相平行.

1.9 节初步给出脉冲时滞微分系统基本理论, 讨论带有时滞的脉冲微分系统解的全局存在性和唯一性.

最后, 1.10 节介绍脉冲半动力系统, 给出脉冲微分系统的一些拓扑抽象概念和脉冲半动力系统的定义.

1.1　脉冲微分系统与脉冲现象

本节首先简单介绍脉冲微分系统, 然后介绍什么是脉冲现象以及避免发生脉冲现象的条件. 本节内容来自文献 [1]~[3], 其中 1.1.2 小节部分相关定理来自文献 [3].

1.1.1　脉冲微分系统简介

首先给出脉冲微分系统的一般定义.

定义 1.1.1　(1) 考虑微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \tag{1.1.1}$$

其中 $f:\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$;

(2) 对任意 $t\in\mathbb{R}_+$, 存在两个集合 $M(t),N(t)\subset\Omega$;

(3) 算子 $A(t):M(t)\to N(t),t\in\mathbb{R}_+$.

设 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统 (1.1.1) 满足 $x(t_0)=x_0$ 的解. 它具有如下特点: 动点 $p_t(t,x(t))$ 起始于 (t_0,x_0) 并沿曲线 $\{(t,x)|t\geqslant t_0,x=x(t)\}$ 运动, 在 $t=t_1>t_0$ 处, p_t 与集合 $M(t)$ 相遇, 这时算子 $A(t)$ 将点 $p_{t_1}=(t_1,x(t_1))$ 作用到 $p_{t_1^+}=(t_1,x_{t_1}^+)\in N(t_1)$, 其中 $x_{t_1}^+=A(t_1)x(t_1)$. 而点 p_t 从 $p_{t_1^+}=(t_1,x_{t_1}^+)$ 出发继续沿解曲线运动, 直到 $t_2>t_1$ 时刻再次遇到集合 $M(t)$, 点 $p_{t_2}=(t_2,x(t_2))$ 被 $A(t)$ 作用到 $p_{t_2^+}=(t_2,x_{t_2}^+)\in N(t)$, 其中 $x_{t_2}^+=A(t_2)x(t_2)$. 同前面一样, p_t 沿着系统 (1.1.1) 的解曲线 $x(t)=x(t,t_2,x_{t_2}^+)$ 继续运动, 如果系统 (1.1.1) 的解存在, 则 p_t 一直运动下去. 将具有上述运动过程的 (1)~(3) 综合起来称为脉冲微分系统, 由 p_t 所描述的曲线称为积分曲线, 积分曲线所代表的函数 $x(t)$ 称为脉冲微分系统的解, p_t 与集合 $M(t)$ 相遇的时刻 t_k 称为脉冲时刻. 假设脉冲微分系统的解在脉冲时刻是左连续的, 即

$$x(t_k^-)=\lim_{h\to0^+}x(t_k-h)=x(t_k).$$

可自由地选取集合 $M(t),N(t)$ 和算子 $A(t)$, 从而可得到各种类型的脉冲微分系统. 本书主要讨论以下三种类型的脉冲微分系统.

1. 脉冲时刻固定的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列曲面 $\{M_k|M_k=\{(t_k,x),x\in\Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 $t_k<t_{k+1}$ 且 $\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=+\infty$. 设算子 $A(t)$ 仅在 t_k 处有定义, 满足

$$A(t_k):\Omega\to\Omega,\quad x\to A(t_k)x=x+I_k(x),$$

其中 $I_k:\Omega\to\Omega$. 因此, $N(t)$ 仅与 t_k 有关且 $N(t_k)=A(t_k)M(t_k)$. 这时脉冲时刻固定的脉冲微分系统可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & t\neq t_k,k\in\mathbb{Z}_+,\\ \Delta x=I_k(x), & t=t_k,\end{cases}\tag{1.1.2}$$

其中 $\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k),x(t_k^+)$ 表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限.

当 $t\in(t_k,t_{k+1}]\,(k\in\mathbb{Z}_+)$ 时, (1.1.2) 的解满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x);$$

当 $t=t_k\,(k\in\mathbb{Z}_+)$ 时, $x(t)$ 满足

$$\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k)=I_k(x).$$

有时, 系统 (1.1.2) 可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(t_k^+) = \psi_k(x(t_k)), \end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 $\psi_k : \Omega \to \Omega, \psi_k(x(t_k)) = x(t_k) + I_k(x(t_k))$.

2. 脉冲时刻不固定的脉冲微分系统

设 $M(t)$ 表示一列曲面 $\{S_k | S_k = \{(t, \tau_k(x)) | t = \tau_k(x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k(x) = +\infty$. 算子 $A(t)$ 满足

$$A(t) : \Omega \to \Omega, \quad x \to A(t)x = x + I_k(x),$$

其中 $I_k : \Omega \to \Omega$. 因此, 集合 $N(t) = A(t)M(t)\,(t = \tau_k(x))$, 进而脉冲时刻不固定的脉冲微分系统的模型如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad t \neq \tau_k(x), k \in \mathbb{Z}_+, \\ \Delta x = I_k(x), \quad t = \tau_k(x). \end{cases} \tag{1.1.4}$$

当 $t \neq \tau_k(x)$ 时, (1.1.4) 的解满足方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$; 当 $t = \tau_k(x)$ 时, 点 $(t, x(t))$ 与曲面 S_k 相遇, 这时发生脉冲效应.

3. 自治脉冲微分系统

设 σ 是相空间 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内的 $n-1$ 维流形. 自治脉冲微分系统有如下模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \notin \sigma, \\ \Delta x = I(x), \quad x \in \sigma. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

当相空间中的点与流形 σ 相遇时, 脉冲效应发生. 如果 σ 用方程 $\varphi(x) = 0$ 表示, 则 (1.1.5) 可表示成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad \varphi(x) \neq 0, \\ \Delta x = I(x), \quad \varphi(x) = 0. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

一般来说, 脉冲微分系统的解是分段连续的, 不连续点发生在脉冲时刻. 系统 (1.1.3) 的所有解都在同一时刻不连续, 而对系统 (1.1.4) 和 (1.1.6) 来说, 不同的解在不同时刻发生间断, 因而 (1.1.4) 和 (1.1.6) 的解的这种特性使其研究起来很困难.

1.1.2　脉冲现象

脉冲微分系统的解有时可能与同一个曲面相遇有限次或无限次, 从而成为有规律的碰撞, 把这种现象叫做脉冲现象. 脉冲现象的发生往往会为研究解的性质增加难度, 因而希望找出一些条件来保证脉冲微分系统不发生脉冲现象. 本节将解决这个问题.

考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), & t \neq \tau_k(x), k \in \mathbb{Z}_+, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.7}$$

其中 $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{R}^n], \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集. 下面的定理给出系统 (1.1.7) 不发生脉冲现象的一个充分性条件.

定理 1.1.1　若下列条件成立:

(1) $\tau_k \in C^1(\Omega,(0,\infty)), 0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots < \tau_k(x) < \cdots$, 并且 $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k(x) = \infty\,(x \in \Omega)$ 和 $I_k \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$;

(2) $\dfrac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} f(t,x) \leqslant 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(3) 当 $x \in \Omega$ 时, $x + I_k(x) \in \Omega$ 和对每个 k 和 $0 \leqslant s \leqslant 1$,

$$\left(\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x + sI_k(x))\right) I_k(x) \leqslant 0,$$

则系统 (1.1.7) 的每个解至多与曲面 $S_j : t = \tau_j(x)$ 相遇一次.

证明　假设 $t_k < t_{k+1}$ 是 (1.1.7) 的某个解 $x(t)$ 的两个相邻的脉冲点, 则 $t_k = \tau_i(x(t_k)), t_{k+1} = \tau_j(x(t_{k+1}))$. 由条件 (3) 知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\tau_k(x + sI_k(x))) \leqslant 0,$$

从而 $\tau_k(x) \geqslant \tau_k(x + I_k(x))$, 那么 $t_k = \tau_i(x(t_k)) \geqslant \tau_i(x(t_k) + I_i(x(t_k)))$. 由条件 (2) 可得 $\tau_i(x(t_k^+)) \geqslant \tau_i(x(t_{k+1}))$, 于是

$$t_k = \tau_i(x(t_k)) \geqslant \tau_i(x(t_{k+1})),$$

则

$$\tau_j(x(t_{k+1})) = t_{k+1} > t_k = \tau_i(x(t_k)) \geqslant \tau_i(x(t_k^+)) \geqslant \tau_i(x(t_{k+1})),$$

于是 $j > i$. 这表明系统 (1.1.7) 的解只与每个脉冲面碰撞一次.　证毕.

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com